

Tensor Métrico Normalizado e Torção: A Natureza do Espaço-Tempo

S. A. Melo

0009-0003-2015-666X

doi:10.5281/zenodo.22152928

29 de agosto de 2026

Resumo

Covariância propõe invariância de transformações coordenadas e a aplicação em referenciais inerciais permite a resolução de uma diversidade de problemas relativísticos do espaço-tempo. Entretanto, a aplicação gravitacional restringe o uso ao sistema de coordenadas esféricas. A transformação convencional para sistema cartesiano recai em problemas de simetria e comutatividade que resultam na descontinuidade do espaço-tempo pelo aparecimento de torção.

Coordenadas não possuem significado físico e a transformação entre representações cartesianas e esféricas deve ser trivial. A resolução do tensor métrico em coordenadas cartesianas por um grupo imaginário permite a resolução da torção da conexão Levi-Civita e, em consequência, conduz uma série de reconsiderações sobre o espaço-tempo.

A estrutura do espaço-tempo é revelada como construção topológica pelo fundamento hiperbólico de Minkowski, formalismo que permite representar tanto as propriedades ondulatórias da gravitação quando a caracterização métrica da eletrodinâmica.

O formalismo normalizado mostra-se produtivo, tanto na demonstração de sua consistência pela formulação normalizada do equilíbrio hidrostático de corpos compactos que sustenta ausência de singularidade (em alternativa à equação Tolman-Oppenheimer-Volkoff) quanto em sua apresentação de geodesia e corpos rotacionais (em alternativa à métrica de Kerr). Equacionamento da auto-organização do espaço-tempo pelo tensor momento-energia normalizado, como também questões cosmológicas sobre inércia, tempo e sua irreversibilidade, caracterização entrópica e o comportamento em larga escala. Métrica normalizada é um grupo contínuo e permite a demonstração métrica da equação de Dirac, acoplamento de Yukawa e lei de Hubble, além de ser propositivo em questões conceituais diversas, como simetria e polarização do vácuo.

Abstract

Covariance implies invariance under coordinate transformations, and its application within inertial reference frames enables the resolution of a wide range of relativistic spacetime problems. However, its application to gravitation restricts its use to spherical coordinate systems. Conventional

transformation to a Cartesian system leads to issues regarding symmetry and commutativity, resulting in spacetime discontinuity due to the emergence of torsion.

Coordinates lack physical significance, and the transformation between Cartesian and spherical representations should be trivial. Resolving the metric tensor in Cartesian coordinates via an imaginary group allows for the resolution of the Levi-Civita connection's torsion and, consequently, leads to a series of reconsiderations regarding spacetime.

The structure of spacetime is revealed as a topological construction through Minkowski's hyperbolic foundation – a formalism that allows for the representation of both the wave-like properties of gravitation and the metric characterization of electrodynamics.

The normalized formalism proves productive both in demonstrating its consistency – through the normalized formulation of the hydrostatic equilibrium of compact bodies, which supports the absence of singularities (as an alternative to the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation) – and in its treatment of geodesics and rotating bodies (as an alternative to the Kerr metric). Formulation of the self-organization of spacetime via the normalized energy-momentum tensor, as well as cosmological issues regarding inertia, time and its irreversibility, entropic characterization, and large-scale behavior. Normalized metric is a continuous group that allows for the metric derivation of the Dirac equation, Yukawa coupling, and Hubble's law, while also offering insights into various conceptual issues, such as symmetry and vacuum polarization.

1 Introdução

Coordenadas não possuem significado físico, e a representação de um mesmo espaço deve ser independente da escolha de sistema de coordenadas.

O empecilho prático desse princípio está na forma como o arranjo coordenado expressa a continuidade diferencial. O surgimento de torção é um obstáculo à transformação.

O conflito é que a transformação entre sistema de coordenadas deve ser trivial, e a condição de torção aparece por artifício da representação em uma escolha particular de coordenada. A resolução proposta transborda a forma algébrica convencional e refaz o entendimento intrínseco na natureza do espaço.

A refundamentação da base tensorial, seguindo um critério de normalidade, evita dependências implícitas do espaço de velocidades em relação ao espaço de posições. Um corpo pode transitar em uma posição com qualquer velocidade, assim a velocidade é independente da posição. Relativisticamente, a mobilidade da base deve ser condicionada ao espaço somente pela métrica, não pela arbitrariedade de variáveis paramétricas em conveniência da simetria na representação.

Seguindo essa proposição, a resolução cartesiana é obtida pela reinterpretação da relação entre simetria e comutatividade pela formulação da conexão que satisfaça requisitos de orientação, além da independência paramétrica.

Como resultado, o formalismo tensorial obtido satisfaz a independência da representação coordenada do espaço em elevação ao nível de abstração, promovendo a independência da própria escolha topológica condicionada à continuidade.

A consequência mais direta dessa nova forma de conexão, também um grupo contínuo, está em expressar o acoplamento dos corpos no espaço pelo mesmo

formalismo a despeito da diversidade de natureza ou extremos da escala de magnitude, o que é demonstrável em equações relevantes de campos distintos da física. A consistência desse formalismo cria uma perspectiva promissora na descrição de processos conhecidos e investigação de novos.

Ainda na introdução, a sec. 1.1 apresenta informação sobre a nomenclatura do tensor, enquanto sec. 1.2 apresenta recorte histórico sobre como o desenvolvimento do aparato matemático prioriza a generalidade coordenada em vez da especificidade mecânica.

A sec. 2 caracteriza a normalidade do tensor pela isometria na forma paramétrica e preservação da estrutura isomórfica da derivada direcional em transformações, o que é sintetizado na redução geodésica.

A discussão da sec. 2.1 apresenta a motivação do uso de coordenadas generalizadas e sua redefinição na necessidade de evitar o duplo propósito de simetria ou restrição holonômica no uso de variáveis cíclicas. As considerações específicas às coordenadas esféricas são feitas na sec. 2.2, que também aponta questões de parametrização na representação da mobilidade da base em relação a transformações. A independência paramétrica na base esférica é obtida ao longo da sec. 2.3, iniciando-se com a decomposição da identidade por operações vetoriais e transformação ortogonal da sec. 2.3.1, seguido da elaboração sobre linearidade das transformações coordenadas, sec. 2.3.2, e terminando na ponderação da normalidade pela participação na constituição de uma base, na sec. 2.3.3.

A formulação de covariância na transformação do tensor velocidade é apresentada na sec. 2.4, satisfazendo a forma paramétrica da transformação que preserva a estrutura isomórfica da derivada. A sec. 2.5 explana sobre preservação do determinante unimodular (elemento de volume), isometria, preservação da norma por duas curvaturas cardinais: tempo e diretriz espacial. A sec. 2.6, apresentada a derivada covariante-paramétrica capaz de representar o isomorfismo na mobilidade da base na transformação entre sistemas de coordenadas.

A sec. 2.7 se ocupa da equação geodésica pela métrica normalizada e expansão derivada covariante-paramétrica. Na sec. 2.7.1 é feita a decomposição da equação geodésica e reagrupamento de termos, enquanto a sec. 2.7.2 explana sobre o acoplamento temporal e a consequente derivada covariante temporal. A sec. 2.7.3 concilia a formulação mecânica pela derivada covariante temporal. A simplificação prossegue na sec. 2.7.4, que promove a substituição de símbolos, e avança pela sec. 2.7.5, com a reconstituição geodésica pela relação de ortogonalidade entre tensor velocidade e aceleração. A sec. 2.7.6 finaliza o rearranjo espacial na representação cinemática da equação geodésica. Uma ponderação sobre o significado das transformações serem correlatas a variações energéticas é feita na sec. 2.8, e a sec. 2.9 discorre sobre generalidades de transformações isométricas diversas e peculiaridades do símbolo de Christoffel covariante na mudança entre sistemas de coordenadas.

A sec. 3 apresenta representação em coordenadas cartesianas, satisfazendo a covariância na transformação entre sistemas de coordenadas obtida, mais uma vez, pela representação por identidades de operações tensoriais. Uma resolução preliminar é apresentada na sec. 3.1 por reagrupamento de índices.

A reorganização simplificada gera impasse na resolução do conflito de simetrias e comutatividade, e a sec. 3.2 apresenta proposição de uma dinâmica

hiperbólica e sua formulação a partir de instantâneos da métrica Minkowski, iniciada na sec. 3.2.1, na decomposição da base operações complementares à identidade: projeção e rejeição. Após reflexão sobre questões de direcionalidade e preservação de propriedades em espaço plano, avança pela sec. 3.2.2, com a reconstituição da transformação de Lorentz pela identidade das operações de projeção e rejeição e breve discussão sobre generalidades sobre transformação e grupos. A sec. 3.2.3 trata da direcionalidade e preservação de propriedades em espaço curvo, e a sec. 3.2.4 apresenta a forma cartesiana do tensor normalizado. A sec. 3.3 complementa o desenvolvimento com a elaboração de transformações por matrizes ortonormais nas variáveis coordenadas, seguida, na sec. 3.4, das elaborações sobre especificidades na forma normalizadas.

A seção 4 é dedicada ao estudo da curvatura por sua conexão (derivada) e continuidade. Iniciada por um breve recorte histórico, sec. 4.1, que evidencia o viés holonômico e generalidade coordenada em vez da especificidade mecânica. Prossegue com a sec. 4.2 no estudo da representação intrínseca e respectivas reformulações. Confronto entre o enquadramento holonômico e não-holonômico e a eliminação da dependência holonômica implícita se inicia na sec. 4.2.1, com a contextualização das peculiaridades de transformações, homogeneidade e simetria por discriminante para formas diferenciais. A sec. 4.2.2 discorre sobre o pressuposto de velocidade e sua independência do espaço, mas possui implicitamente dependência holonômica. Substituição da representação pela sec. 4.2.3, obtém-se independência, homogeneidade dimensional e isometria, em contraponto à continuidade não ser predicada por coordenada.

A sec. 4.3 estuda formulação de conexão e compatibilidade não-holonômicas no modelo de continuidade rotação hiperbólica e respectiva derivada covariante. A sec. 4.3.1 busca compatibilidade na definição dos símbolos e para operação do transporte paralelo. Significado mecânico de continuidade em descolamentos mecânicos conservativo e não-conservativo é apresentado na sec. 4.3.2 e a continuidade diferencial em deslocamentos variacionais é revista para desvio e rebalanceamento por dissipação por fórmulas de balanço.

A análise da continuidade é encaminhada por curvatura na sec. 4.4 por variações de segunda ordem e relações hiperbólicas. A caracterização pela decomposição das curvaturas principais da rotação hiperbólica e taxas relacionadas é feita na 4.4.1, seguida do desenvolvimento tensorial para um escalar representativo na síntese tensorial e escalar na sec. 4.4.2. As resoluções para continuidade no espaço coordenado e escolha topológica são apresentadas na sec. 4.4.3 e o equacionamento geodésico por propriedades orbitais, tempo (sincronia) e momento (definições angulares) são feitos na sec. 4.4.4. O estudo do equilíbrio de dois corpos é apresentado na sec. 4.4.5 resultando em fenômenos de auto-oscilação, aberrações e anomalias. A atribuição de uma frequência natural, o significado mecânico e interpretações pela dinâmica ondulatória são vistos na sec. 4.4.6.

A sec. 4.5 aprofunda-se no comportamento imaterial por ação da curvatura, primeiro, na sec. 4.5.1, por especificidades imateriais diante da métrica pela deflexão da luz sob curvatura métrica no desenvolvimento normalizado, e em seguida, na sec. 4.5.2, forma geral da codeterminação sistêmica entre material e imaterial. A sec. 4.5.3 aborda a generalidade de onda por natureza comum elétrico/gravitacional, e a sec. 4.5.4 formalismo da ação imaterial na forma normalizada, complementada pela sec. 4.5.5 na formulação conservativa de energia.

A resolução de torção na representação cartesiana holonômica é vista na sec. 4.6. A sec. 4.6.1 discorre sobre a arbitrariedade na escolha da representação e conformidade do elemento de linha por ambiguidade e indefinição do diferencial no limite. O uso de imaginários na representação explícita de orientação em superfícies é visto na 4.6.2. Uma proposta de representação cartesiana holonômica é apresentada na sec. 4.6.3.

A sec.5 aborda ponderações diversas e critérios para uma formulação sistêmica mais geral da composição estrutural na representação do espaço-tempo. A sec. 5.1 discorre condições abstratas na escolha da representação por consequência do invariante de velocidade, entre elas cardinalidade de dimensões, visto na 5.1.1, e correlaciona orientação e natureza relacional, seguido de macro condições consequentes na organização em sistema de partículas, visto em sec. 5.1.2, em que a estrutura do espaço-tempo é descrita por auto-organização e codeterminação.

Em outro extremo, a sec. 5.2 inspeciona a identidade assintótica da condição hiperbólica e sua neutralidade mecânica. A realidade em que nenhum sistema está perfeitamente isolado, o significado mecânico do espaço neutro (ou falta dele) é analisado na sec. 5.2.1. A sec. 5.2.2 avança na neutralidade de propriedades intrínsecas do vácuo, e a sec. 5.2.3 apresenta formulação de critério na proposição de composição estrutural alternativa.

A sec. 5.3 investiga a origem estrutural da extrinsicalidade temporal e síncrona na conformidade de simultaneidade entre os corpos, sua irreversibilidade e imponderabilidade.

Sec. 6 apresenta formulações métricas por condições diversas. A sec. 6.1 explora formas assimétricas por rotação estacionária. Na sec. 6.1.1, apresenta perda de simetria esférica por deformação rotacional, e a sec. 6.1.2 propõe composição estática pela métrica por assimetria e relações estáticas do espaço-tempo. A sec. 6.1.3 analisa o geopotencial e geóide no equilíbrio hidrostático.

A sec. 6.2 fundamentação métrica para representação hiperbólica de processos ondulatórios por sua representação exponencial. A sec. 6.2.1 apresenta rudimentos da onda estacionária por partícula-onda. A sec. 6.2.2 dedução da métrica exponencial por modulação métrica de frequência. A sec. 6.2.3 desenvolve formalismos e generalidade abstrata por ondas. Na sec. 6.2.4, dedução da equação de Dirac fundamentada no transporte paralelo e preservação implícita de ângulos de fase no processo de modulação. A sec. 6.2.5 elabora correspondência da representação com escalar curvatura.

A sec. 6.3 formula métrica pela curvatura residual de fundo da auto-organização dinâmica de um sistema de partículas. A sec. 6.3.1 pondera sobre estados emergentes em macroescala de processos em microescala, e a apresentação da motivação conceitual estrutura por codeterminação é vista na sec. 6.3.2. O desenvolvimento na sec. 6.3.3 segue por contingência as condições superlumínicas no mapeamento do Doppler longitudinal. A sec. 6.3.4 apresenta mapeamento por referenciais acelerados na presunção de horizonte superlumínico e consequente perda da causalidade. A sec. 6.3.5 apresenta o formalismo de grupo da métrica.

A seção 7 encerra a exposição com síntese e conclusão.

Índice

1	Introdução	2
1.1	Regular e Normalizado	8
1.2	Recorte Histórico: Álgebra Anticomutativa	8
2	Sistema de Coordenadas	11
2.1	Coordenadas Generalizadas	11
2.2	Coordenadas Esféricas	12
2.3	Base Esférica Normalizada	13
2.3.1	Base	14
2.3.2	Coordenadas Isométricas	15
2.3.3	Normalidade	17
2.4	Velocidade	18
2.5	Tensor Métrico Normalizado	19
2.6	Derivada Covariante-Paramétrica	20
2.7	Geodésica	21
2.7.1	Equacionamento pela Métrica Normalizada: Al-Muqabala	22
2.7.2	Tempo Extrínseco	25
2.7.3	Mecânica	27
2.7.4	Definições Paramétricas da Métrica	29
2.7.5	Transcrição: Al-Jabr	31
2.7.6	Vis-Radix, Vis-Redux	33
2.8	Covariância	35
2.9	Isometria da Base	37
3	Cartesiano	39
3.1	Resoluções Preliminares	40
3.2	Rotação Hiperbólica e Projeção Diedral	45
3.2.1	Projeção Ortogonal	46
3.2.2	Minkowski	47
3.2.3	Projeção Diedral	50
3.2.4	Tensor Métrico Diedral	51
3.3	Variável de Transformação	53
3.4	Christoffel	55
4	Conexão, Curvatura e Torção	60
4.1	Recorte Histórico: Conexão	61
4.2	Base Não-Holonômica e Mudança Categórica	63
4.2.1	Primeiro Enquadramento	64
4.2.2	Variável Cinemática	67
4.2.3	Segundo Enquadramento	68
4.3	Conexão e Compatibilidade	70
4.3.1	Compatibilidade	71
4.3.2	Conexão Mecânica	73
4.4	Curvatura Intrínseca (do Movimento)	80
4.4.1	Curvaturas Principais e Taxas Relacionadas	80
4.4.2	Curvatura (Função Escalar)	83
4.4.3	Formas diferenciais e Análise funcional: Variáveis Espaciais e sua Continuidade.	90

4.4.4	Kepler e Kepler	99
4.4.5	Ressonância Orbital e Movimento Oscilatório	103
4.4.6	Ondulatória e “Onda Piloto”	112
4.5	Ação da curvatura	117
4.5.1	Geodésica (radial) do Fóton	120
4.5.2	[Entwurf \$1-\$5] Einstein e a equação de campo preliminar	121
4.5.3	[Entwurf \$6] Gravidade e Eletromagnetismo: Vácuo e Meio Dielétrico	135
4.5.4	Ação de Hilbert	141
4.5.5	Energia em escala absoluta: De Émilie para Emmy	145
4.6	Torção	151
4.6.1	Elemento de Linha Infinitesimal de Minkowski	151
4.6.2	Torção e Orientação	153
4.6.3	Transcrição Cartesiana	155
5	Natureza do Espaço-Tempo	157
5.1	Imperativo Topológico	158
5.1.1	Espaço Métrico e Dimensionalidade	158
5.1.2	Auto-Organização	160
5.2	Espaço de Minkowski	169
5.2.1	Cinemático e Não-Cinético	169
5.2.2	Vácuo	170
5.2.3	Ponto de Inflexão	171
5.3	Tempo	172
6	Métricas Notáveis	178
6.1	Corpo em Rotação e Geodésia	178
6.1.1	Corpo Rotacional: Clairout-Somigliana-MacCullagh	178
6.1.2	Formulação Métrica	179
6.1.3	Equilíbrio Hidrostático Relativístico	183
6.2	Métrica Exponencial	185
6.2.1	Onda Estacionária	188
6.2.2	Modulação Métrica de Frequência	189
6.2.3	Grupo Contínuo	191
6.2.4	Equação de Dirac	194
6.2.5	Acoplamento de Yukawa	198
6.3	Métrica Extra-Hiperboloide e Hubble	199
6.3.1	Apresentação Conceitual	200
6.3.2	Estrutura Cosmológica	201
6.3.3	Modelo Extra-Hiperboloide	202
6.3.4	Coordenadas e Horizonte de Rindler	207
6.3.5	Grupo Extra-Hiperboloide	208
7	Considerações Finais	209
7.1	Síntese Conceitual	209
7.2	Recapitulação	210
7.3	Conclusão	215
8	Referências	216

1.1 Regular e Normalizado

Globalmente não-degenerado, o tensor métrico regular do presente texto refere-se a um tensor métrico que é suave (diferenciável) e não-degenerado (determinante $\neq 0$) em todos os pontos livres de uma variedade, e cujas componentes não possuam nem singularidades coordenadas, nem singularidade não-removíveis. Apesar da indicação acima, não-degenerado pode ser encontrado na literatura como uma propriedade algébrica pontual, enquanto, de forma distinta, regular é a propriedade de campo ou variedade ser diferencialmente suave.

A afirmação de não-degenerescência absoluta e universal em todo o domínio da métrica depende da definição desse mesmo domínio. A representação pontual do corpo deixa como domínio os pontos livres $r > 0$. Assim, ainda que a métrica de Schwarzschild seja introduzida como uma solução para o espaço-tempo fora de um corpo para o domínio $r > R$ (onde R é o raio do corpo que seja maior que o raio crítico), ela ainda seria posta como não-regular nos conceitos definidos acima tanto por haver singularidades coordenadas ¹ quanto singularidades não-removíveis em sua representação pontual.

Tensor unimodular é aquele cujo determinante $\det(g_{\mu\nu}) = \pm 1$. Entretanto, essa denominação genérica é utilizada em outras teorias gravitacionais onde a condição de determinante fixo é uma restrição fundamental. O texto emprega a denominação ‘tensor métrico normalizado’ para referir-se aos tensores métricos que apresentem a unimodularidade do determinante em todo domínio por reciprocidade entre a componente temporal e uma das direções espaciais, sem fazer distinção da forma funcional de suas componentes que possuam curvatura não-nula, excluindo-se a métrica Minkowski.

Tensores normalizados são grupos de contínuos em estrutura, ² e diversas formulações métricas descrevem especificidades mecânicas. No decorrer do texto, a terminologia também é empregada de forma intercambiável ou para referir-se a formulações específicas.

Condizente com a métrica ser a forma bilinear, no contexto puramente geométrico, a métrica normalizada pode ser caracterizada como tensor de não-metricidade, isso devido à especificidade da continuidade holonômica colocar-se como antecedente, em vez de consequente mecânico. No desenvolvimento histórico, essa caracterização evidencia o predomínio de abordagem intrinsecamente geométrica em definições extrinsecamente mecânicas, o que é visto a seguir.

1.2 Recorte Histórico: Álgebra Anticomutativa

Geometria tem estreita relação com fenômenos lumínicos, uma vez que a percepção das formas geométricas é trazida pela propagação da luz. Também pode-se dizer que, nas formas geométricas dos corpos materiais, a prontidão com que forças interatômicas entram em ação, em última análise, é consequência da transmissão em velocidade da luz, conectando luz e geometria tanto no meio material quanto imaterial.

Na forma mais sofisticada, a ocorrência de geometrias não-euclidianas na natureza está associada à peculiaridade eletrodinâmica ser limitada pela veloci-

¹Deixa-se de lado qualquer sugestão de mudança de coordenada, pois a transformação coordenada e o seu significado energético são os assuntos abordados.

²Aqui, incluída a métrica Minkowski como elemento identidade, um elemento mecanicamente neutro.

dade da luz. Em outro aspecto, ainda que todos os efeitos sejam bem descritos na atualidade, a introdução das matrizes de Pauli e Dirac pode, ainda, ser considerada abrupta em relação ao que é apresentado nas álgebras eletromagnética e geométrica. Recorte histórico evidencia os resquícios de descompasso no desenvolvimento histórico.

Geometria é trazida à forma analítica por René Descartes e Pierre de Fermat. No interesse cinemático, a forma analítica separa os graus de liberdade em que pode ocorrer independentemente em orientações concorrentes (*La Géométrie*). Descartes, em 1637, também nomeou de número imaginário o termo que surgia como artifício na solução de Cardano.

A geometria segue desacompanhada do imaginário. Quase um século depois, em 1730, Abraham de Moivre conecta o número imaginário à trigonometria pela potenciação. Euler, em 1748, faz conexão pela exponenciação pela manipulação de séries de potência, e em 1799, Wessel descreve o plano real-imaginário.

Apesar de sua inserção trinométrica e exponencial, o número imaginário somente entra na composição de seu próprio espaço abstrato. Em 1806, Argand prova o Teorema Fundamental da Álgebra para coeficientes reais e complexos. Em 1816, Gauß apresenta outra prova. O corpo dos números complexos torna-se algebricamente fechado com o Teorema Fundamental da Álgebra, por d'Alembert-Gauß.

Essa primeira vertente do recorte histórico segue dois enfoques distintos: um por Hamilton com os imaginários, chegando ao eletromagnetismo; outro ramo seguirá com Clifford, ambos influenciados pela abstração do espaço e a generalização da geometria de Grassmann.

Grassmann, entre 1841 e 1862, [42]³ apresenta a proposta de espaços vetoriais por combinações lineares. A conciliação da notação ocorreu com Felix Klein, quando, entre 1898 e 1933, montou a enciclopédia “*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*”. [1]

Hamilton usa as ideias de Grassmann e estende o plano complexo de Gauß, sendo o primeiro a ser desenvolvido em quatro dimensões. No plano de Argand, cada número representa naturalmente um vetor bidimensional com uma componente real e outra imaginária. Em 1843, Hamilton busca um sistema de vetores adequado ao espaço físico pela simples generalização da álgebra complexa para números tridimensionais. Entretanto os vetores $\tilde{i}$, $\tilde{j}$ e $\tilde{k}$ obtidos por Hamilton são adequados para representar rotações, mas não são adequados como vetores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ para álgebra do espaço cartesiano. [45][46]

As rotações são um avanço na simplificação em relação à representação cartesiana por matrizes, proposta em 1840 por Olinde Rodrigues. [91] Entretanto, não fica demonstrado que a decomposição matricial é representação para os números imaginários de Hamilton. No propósito do texto, a operação de rotação pode ser descrita como um rearranjo das direções e seguindo uma orientação. A operação pode ser obtida de matrizes, imaginário e, em caso específico de direções ortogonais, por um operador sobre operandos direcionais.

O conceito de vetor foi cunhado por Hamilton, também em 1843, com o produto entre quatérnions que produziam quantidades escalares (eixo dos reais) e vetoriais (espaço dos imaginários). Hamilton acreditava que o uso de imaginário

³O artigo de 1844 “*Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*”, foi posteriormente revisado, em 1862, sob novo título “*Die Ausdehnungslehre: Vollständig und in strenger Form bearbeitet*”

em polinômios era distinto do uso geométrico.⁴ Imaginários eram relacionados com polinômios, enquanto que os números complexos eram relacionados com geometria, algo que mudaria com a assinatura Minkowski-Poincaré.

Tanto nos números complexos quanto nos quaterniônicos há “transmutação de eixos” que não está presente em Descartes. A indesejável conflito entre direção e rotação nos quatérnions é resolvida adaptação das operações de Hamilton em operadores distintos: produtos escalar e vetorial operam sobre tuplas, e o significado geométrico está na operação e não nos operandos. Além de Gibbs e Heaviside, em aplicação ao eletromagnetismo, esta condição também é explorada por Clifford (além da linearidade de Grassmann).

Gibbs e Heaviside produziram uma representação do sistema cartesiano mais simples. Análise Vetorial produz os mesmos resultados que quatérnions, mas de forma mais simples (anti-comutatividade, norma negativa, componente escalar não utilizado), e passou a ser difundida rapidamente. Em 1888, cópias das aulas de Gibbs foram encaminhadas para Oliver Heaviside com as notações que utilizava para coordenadas cartesianas. Em 1892, Heaviside forneceu a notação que conhecemos para o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, além da distinção entre escalares e vetores na tipografia. [18]

Seguindo por outro ramo histórico, em 1878, Clifford escreveu uma álgebra com operações de reflexão, rotação e translação. [22] É curioso mencionar que, por influência de seu estudo sobre Riemann[89][20], para Clifford,[21] a gravitação poderia ser a manifestação da geometria. [37][17]⁵ A álgebra de Clifford dá origem álgebra geométrica, [22][23] e o trabalho de Grassmann reaparecerá com Cartan. Em 1899, Elie Cartan trabalha sobre o produto exterior de Grassmann. Posteriormente, em 1908, Cartan desenvolve formas diferenciais. [10]

Até meados da primeira década do século XIX, geometria era tida como absoluta e atemporal; seu progresso consistia em atender à continuidade coordenada em relação a definições intrínsecas vinculadas à curvatura, o que requer a propriedade comutativa em um espaço orientado. Concomitante a isso, o cenário de desenvolvimento algébrico iria se transformar nas décadas seguintes por consideração com cinemática em relação aos fenômenos eletrodinâmicos de Maxwell e sua velocidade constante.

O uso de quatérnions faz aparição nas equações de Maxwell(1865) [67]⁶, da mesma forma que imaginários no espaço-tempo de Minkowski (1908)[75], mas em ambos sem muita consequência se comparado com a álgebra anticomutativa das matrizes (*spinors*) de Pauli (1927) e Dirac (1928)[28].

Na geometria do espaço-tempo plano, embora as grandezas vetoriais representadas nele sejam orientadas, isso não se constitui como condicionante do espaço. O eixo imaginário é absorvido como assinatura métrica da forma bilinear. As transformações do espaço são identificadas como grupo hiperbólico, entretanto a forma bilinear é discreta e não é caracterizada como rotação.

Na segunda vertente histórica, desenvolvem-se geometrias não-euclidianas, que surgem a partir de 1813 com Gauß e Schweikart. Entre 1829 e 1830, Lobachevsky e Bolyai publicaram tratados de geometria hiperbólica. O trabalho póstumo de Riemann (1854)[88] estende para um número arbitrário de dimen-

⁴Influenciado por John Warren [104] em “Treatise geometrical significance of complex numbers”

⁵Essas ideias têm curso até o grupo de estudos de Einstein, “Akademie Olympia”, pela obra de Karl Pearson, “The Grammar of Science”. [83][95].

⁶As equações de Maxwell foram originalmente resumidas em quatérnions.

sões a geometria Gauß (1827) [38] por curvatura intrínseca.

O cálculo covariante desenvolvido por Gregorio Ricci-Curbastro entre 1887 e 1896 e difundido pelo seu antigo aluno Tullio Levi-Civita, em 1900, introduz o conceito de vetor e covetor.[87]

Nessas modalidades geométricas, generalidade dimensional torna essas geometrias incompatíveis com imaginários quaterniônicos, ou adaptação de suas propriedades. A anticomutatividade advém do espaço orientado pela necessidade de direcionar diferencialmente o tensor curvatura.

No quadro histórico resumido, é interessante salientar o resultado colateral pela escolha da abordagem. Generalidade no número de dimensões e abstração particularidades cinemáticas satisfazem ao propósito geométrico do mapeamento coordenado do espaço de posições em continuidade pela ausência de torção. Entretanto, a identificação de grupos e suas propriedades, a exemplo da construção de Cayley-Dickson, depende da cardinalidade dimensional, entre outras condicionantes peculiares.

A exemplo de Minkowski, a identificação de grupos torna-se relevante na resolução mecânica do espaço-tempo. A alternativa proposta segue uma abordagem de metrificação do espaço de velocidade. A mudança conceitual impõe uma série de reformulações, porém com correspondência estreita até no uso do mesmo formalismo notacional.

2 Sistema de Coordenadas

A seção é estruturada na análise tensorial com propósitos da definição de uma derivada direcional que satisfaça o requisito da formulação analítica da mecânica ser independente da descrição em um sistema de coordenadas particular, e consequente formulação geodésica para métrica normalizada. O operador depende da definição dos operandos, o que coloca em discussão como o sistema de coordenadas é estabelecido, como se transforma e como satisfaz a propriedade da derivada direcional diante de transformações paramétricas.

A motivação da arbitrariedade na escolha do sistema de coordenadas se faz com atenção ao propósito do movimento mecânico, o que traz, na definição da base móvel, a preocupação na distinção entre movimento intrínseco e movimento paramétrico.

Além da mobilidade da base, outras questões também são encaminhadas, como a homogeneidade dimensional e isometria.

2.1 Coordenadas Generalizadas

Coordenada generalizada é a representação paramétrica da coordenada real. É o mapeamento obtido pela transformação localmente invertível das cartesianas.

Na mecânica analítica de Lagrange, o estado do sistema é sempre definido por coordenadas, e a independência se refere à arbitrariedade da escolha por indiferença no resultado mediante transformação. A coordenada x^μ mapeia a quantidade de posição tensorial χ^ν por uma transformação.

$$x^\mu = J^\mu_\nu \chi^\nu \quad (2.1)$$

A escolha entre sistemas de coordenadas é feita por conveniência ou por propósito. A transformação de variáveis pode ser empregada tanto para obter proveito na simetria quanto para estabelecer um requisito de restrição.

Na resolução de problemas mecânicos, as equações que impõem restrições ao movimento podem ser simplificadas ao serem expressas em variáveis transformadas, as quais são tidas como paramétricas.

Coordenadas generalizadas também são úteis em sistemas sem restrições, mas com simetria geométrica, como atração central. Nesse caso, denomina-se de coordenadas curvilíneas a generalização do sistema de coordenadas.

A particularidade do problema e da transformação envolvida determina o propósito da variável. É importante destacar que ambas as situações são frutos de transformações, e a consideração de compatibilidade em relação às transformações covariantes busca evitar que uma simetria em um referencial se transforme indevidamente em uma restrição em outro.

Em comum aos dois empregos está a simetria, relacionada a variáveis cíclicas ou ignoráveis. Ainda, em um emprego das coordenadas generalizadas, relacionam-se a quantidades intrínsecas (movimento), e no outro, quantidades extrínsecas (força).

2.2 Coordenadas Esféricas

A simetria esférica da curvatura espacial produzida por massa central é facilmente descrita em coordenadas esféricas, aplicadas conjuntamente para os vetores da base, tensor métrico e componentes contravariantes do movimento.

Coordenadas são dadas com relação à base, a qual é o conjunto de tensores de referência. Embora se denomine esféricas as componentes de coordenada, a definição do sistema inicia-se na base.

Enquanto que em coordenadas cartesianas os tensores da base são fixos e suas definições são globais, em coordenadas curvilíneas mudam em direção e/ou magnitude de ponto para ponto e são uma base local.

É interessante destacar que a variação em direção e magnitude da base curvilínea se sobrepõe à variação intrínseca do espaço, que trata da continuidade da conexão de posições adjacentes. É necessário fazer a separação entre os dois tipos de variações, o que é possível na especificação conveniente de direção e magnitude.

A referência a uma base fixa se faz necessária na resolução da direção da base curvilínea. Os elementos da base esférica são parametrizados pelos ângulos coordenados, enquanto os ângulos coordenados são orientados pela posição da base. A circularidade é resolvida pela referência a uma base cartesiana.

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\theta, \varphi) \quad (2.2a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta, \varphi) \quad (2.2b)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\theta, \varphi) \quad (2.2c)$$

Derivada covariante trata apenas da variação intrínseca do espaço, deixando de fora a variação paramétrica. Considerando a conversão entre sistemas de coordenadas, pode-se encontrar a definição da operação de derivação que separa os dois efeitos.

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = J_a^\alpha (J_\lambda^\ell J_\mu^m \Gamma_{m\ell}^a + J_\lambda^\ell \partial_\ell (J_\mu^a)) \quad (2.3)$$

A covariância somente é demonstrada quando a transformação do símbolo de Christoffel for covariante, ou seja, $J_\lambda^\ell \partial_\ell (J_\mu^a) = 0$, o que é possível pela ortogonalidade da matriz de conversão J_μ^m ,

Por outro lado, quer-se representar a variação paramétrica. Algo pode ser obtido, se em vez de converter, apenas referenciar a base cartesiana para expressar a mudança de direção da base curvilínea. Sabendo que $\partial_\lambda (J_\mu^a) \neq 0$, pois a variável de derivação é diferente, podemos fazer:

$$\partial_\lambda \hat{e}_\mu = J_{\mu\lambda}^m \hat{e}_m + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \hat{e}_\alpha \quad (2.4)$$

Obtém-se a separação das variações propostas.

2.3 Base Esférica Normalizada

O movimento de um corpo somente pode ser descrito em relação a outros corpos[78]. Coordenadas curvilíneas são descritas por bases móveis e implicam que esse movimento deve ser definido parametricamente a partir de uma direção fixa.

Apontar para uma direção considerada fixa é um problema externo ao sistema. Adota-se o critério de que a consistência da demonstração está condicionada à premissa de que o observador consiga identificar direções fixas.

A métrica de simetria central presume a inércia do corpo central em consequência do campo ínfimo da partícula de teste. O sistema consiste em localizar a partícula de teste em relação à localização do corpo de massa central, sendo possível apontar para pontos de referência distantes o suficiente para não serem influenciados pela massa central e considerados imóveis diante da escala de tempo do movimento do corpo de teste.

Os tensores da base esférica são parametrizados pelos ângulos coordenados, enquanto os ângulos coordenados são orientados pela posição da mesma base esférica: a circularidade é resolvida pela referência a uma base cartesiana.

Base cartesiana é independente do movimento e, em uma transformação com a base esférica, é necessário que definição demonstre não haver introdução de dependência na base cartesiana, e que seja concomitante com a resolução da circularidade nas variáveis esféricas.

Conceitualmente, deve-se fazer considerações sobre o acoplamento implícito entre base e coordenadas.

Em coordenadas curvilíneas, os vetores da base podem ser matematicamente dados por uma definição holonômica da base.

$$\hat{\rho} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} / \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right\| \quad \hat{\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} / \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| \quad \hat{\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} / \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| \quad (2.5^*)$$

Na resolução analítica de um sistema, essa definição matemática existe para satisfazer a trajetória, o que implica que não faz distinção entre a trajetória ser geodésica ou não, a complicação está em definir como isso deve ser tratado

diante do fato de que o tensor da base entra na definição da métrica. Se a trajetória não for geodésica, então não é um resultado de campo, e coloca em dúvida se a métrica relacionada com a base atende à realidade física ou satisfaz uma condição puramente matemática.

Outra definição de transformação é dada na matriz jacobiana, que recai no mesmo problema de vínculo com variáveis de trajetória. A transformação entre coordenadas por uma matriz jacobiana recupera a transformação da mudança de base pela reciprocidade que faz com a mudança de coordenada.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} \quad (2.6)$$

É oportuno apontar aqui que a definição holonômica da base sugere um módulo normalizado, mas obter um valor unitário é conflitante com a definição do produto interno pela métrica. O fato será retomado adiante.

2.3.1 Base

A base esférica será definida pelas propriedades pretendidas na conversão de coordenadas cartesianas para esféricas. Especificamente, a independência de qualquer consideração sobre o movimento ou deslocamento infinitesimal, e requer uma definição que seja produto da álgebra, e não que seja um resultado do cálculo.

O movimento da base esférica é resultado da reorientação e sua dependência paramétrica circular, resolvida pela referência a uma base cartesiana. Será apresentada a definição feita por operações vetoriais, que são redutíveis a uma identidade vetorial.

Seja a decomposição do vetor em uma parcela projetada no eixo radial e outra parcela o rejeito da operação de projeção.

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) \hat{\boldsymbol{\rho}} - \hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) \quad (2.7)$$

A parcela de rejeição pode novamente ser decomposta em outros dois vetores ortogonais.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) \hat{\boldsymbol{\rho}} - [\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}})] \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} - [\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}})] \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= (\sin \theta \cos \varphi) \hat{\boldsymbol{\rho}} - (-\cos \theta \cos \varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - (\sin \varphi) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

A definição não altera a natureza fixa do vetor $\hat{\mathbf{x}}$, mesmo que os vetores da base esférica possuam dependência paramétrica, pois decomposição é uma identidade vetorial, o que também pode ser observado na forma escalar.

Completa-se a definição repetindo a operação para os vetores $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} & -\hat{\boldsymbol{\rho}} \times (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A matriz pode ser simplificada para reduzir o número de operações: resulta em escalares e introduz variáveis paramétricas. Na forma apresentada, a base cartesiana não possui dependência paramétrica em razão da redução à identidade vetorial, enquanto a inversão apresenta dependência funcional da base esférica.

A duplicidade do vetor $\hat{\rho}$ é redundante para o resultado escalar.

$$\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{x}} = 0\hat{\rho} + (\cos \theta \cos \varphi)\hat{\varphi} + (-\sin \varphi)(-\hat{\theta}) \quad (2.10a)$$

$$-\hat{\rho} \times (\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{x}}) = 0\hat{\rho} + (\cos \theta \cos \varphi)\hat{\theta} + (-\sin \varphi)\hat{\varphi} \quad (2.10b)$$

Substituindo os termos similares.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\rho}) & (\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\varphi} & (\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot (-\hat{\theta}) \\ (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\rho}) & (\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\varphi} & (\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{y}}) \cdot (-\hat{\theta}) \\ (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\rho}) & (\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\varphi} & (\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\hat{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

A base esférica está definida como a transformação da base cartesiana pela matriz ortogonal J_m^μ , que representa a rotação por dois parâmetros angulares.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\rho} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A transformação inversa em cartesianas é apresentada adiante, onde torna-se oportuno após a exposição de coordenadas.

2.3.2 Coordenadas Isométricas

A transformação de coordenadas segue demonstração distinta da base. Conhecida a posição $\{x, y, z\}$ cartesiana, pode-se descrever pelas variáveis esféricas pelas relações trigonométricas.

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi \quad (2.13a)$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi \quad (2.13b)$$

$$z = \rho \cos \theta \quad (2.13c)$$

A posição pode ser descrita pelo tensor:

$$\mathbf{r} = ct \hat{\mathbf{t}} + \rho \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \rho \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \rho \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (2.14)$$

O tensor posição em coordenadas esféricas possui uma particularidade que é interessante ser ressaltada. Diferente da base fixa, os vetores da base esférica somente são conhecidos em conjunto com as variáveis de coordenada, ou seja, a base está conjugada à coordenada.

Podemos compor o vetor unitário:

$$\hat{\rho}(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (2.15)$$

Os ângulos θ e φ , apesar de não serem nulos, não participam das coordenadas em razão da ausência dos vetores $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ no vetor posição.

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ct \\ \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{bmatrix}^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \quad (2.16)$$

A transformação dos vetores da base pode ser entendida como rotação dos eixos pelos ângulos polar e azimutal, e as amplitudes angulares se anulam nas coordenadas frente à nova configuração. Denominamos autorrotação quando os vetores transformados também operam como parâmetros de transformação.

Ângulos não são transformados linearmente. Ao considerar o mapeamento inverso, observa-se que θ e φ somente existem como parâmetro de $\hat{\rho}$. A definição da transformação reversa recai na escolha dos eixos fixos e em relações trigonométricas suplementares à transformação.

Invertendo a direção de transformação na equação matricial de coordenadas, tem-se na última linha a equação.

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = 0 \quad (2.17)$$

Considerando propriedades trigonométricas apropriadas, chega-se ao valor de φ expresso pelas cartesianas:

$$y/x = \tan \varphi \quad (2.18)$$

O valor obtido pode ser substituído na equação obtida da segunda linha da transformação inversa.

$$x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta = 0 \quad (2.19)$$

Duas substituições, em que é possível separar cartesianas de esféricas, resultam nas equações intermediárias:

$$x/z = \tan \theta \cos \varphi \quad (2.20)$$

$$y/z = \tan \varphi \tan \theta \cos \varphi \quad (2.21)$$

As variáveis x e y podem ser substituídas na primeira linha da equação do sistema inverso dado abaixo:

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi - z \cos \theta = 0 \quad (2.22)$$

A substituição das expressões conhecidas resulta na expressão em θ :

$$z = \rho \cos \theta \quad (2.23)$$

A transformação inversa dos tensores da base, ao contrário do que é observado para coordenadas, pode ser dada pela matriz inversa.

Substituímos os elementos da primeira coluna da matriz de transformação pelos valores:

$$x/\rho = \sin \theta \cos \varphi \quad (2.24)$$

$$y/\rho = \sin \theta \sin \varphi \quad (2.25)$$

$$z/\rho = \cos \theta \quad (2.26)$$

A segunda coluna vem das operações entre os valores conhecidos:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \theta \quad (2.27a)$$

$$(x^2 + y^2) + z^2 = \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta \quad (2.27b)$$

A terceira coluna vem das relações:

$$x/\sqrt{x^2 + y^2} = \cos \varphi \quad (2.28)$$

$$y/\sqrt{x^2 + y^2} = \sin \varphi \quad (2.29)$$

Como o determinante é unitário, a inversa é dada pela transformação de linhas em colunas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{\rho} & \frac{y}{\rho} & \frac{z}{\rho} \\ 0 & \frac{xz}{\rho\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{yz}{\rho\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{-(x^2 + y^2)}{\rho\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 & \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2.3.3 Normalidade

A normalidade do tensor é geralmente associada à magnitude unitária. Nesta definição ocorre o mesmo conflito mencionado anteriormente na definição holonômica. A norma do tensor está sujeita à variação do tensor métrico e entra em desacordo com a magnitude unitária geral.

A normalidade singular de cada tensor da base não pode ser estabelecida. Entretanto, pode-se aplicar o conceito à base em conjunto.

Entendido que a norma é o fator de escala que pondera a participação da base no resultado de uma combinação linear, podemos entender que a métrica assume essa função.

Na normalidade dada pela métrica, o tensor da base é unidade de direção do espaço, mas não é unitário. Transposição da magnitude em unidade é feita pela métrica.

A consistência da magnitude dos tensores da base se faz por isometria. Ortonormalidade é importante para definir a unidade da base em relação a outra base. Unidade na comparação entre bases, a métrica é normal se define o volume unitário na referência na transformação com outras métricas.

No conceito convencional de normalidade, a propriedade é individual de cada tensor da base. No conceito reformulado para métrica variável, o tensor é normal pela participação na definição de uma base com essa propriedade.

A explanação da normalidade do tensor métrico será apresentada adiante.

2.4 Velocidade

O tensor velocidade, em coordenadas esféricas, pode ser obtido diretamente da derivada ordinária do tensor posição.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma c \hat{\mathbf{t}} + \gamma \dot{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \gamma \rho \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \gamma \rho \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.31)$$

Para ser covariante, é necessário demonstrar que a velocidade acompanha o tensor de coordenadas na transformação cartesiano-esférica.

$$v^\mu = J^\mu_m v^m \quad (2.32)$$

A derivada do tensor $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ produz velocidades pela variação paramétrica, que está associada à derivada da transformação $\hat{J}_m^\mu$. Destaca-se que as velocidades não equivalem à variação canônica dos parâmetros nas direções respectivas a $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$. Abstratamente, tem-se $\dot{x}^\mu \neq J^\mu_m \dot{x}^m$, com isso, uma demonstração da transformação somente pode ser feita após a substituição das variáveis pelas expressões particulares do problema.

Considere a equação de transformação entre velocidades:

$$\dot{x}^m = J^\mu_m \dot{x}^\mu + (\dot{x}^\lambda J^\mu_{\mu\lambda}) x^\mu \quad (2.33)$$

Substituindo as variáveis para o índice da primeira componente cartesiana.

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + 0 \cos \theta \cos \varphi - 0 \sin \varphi \\ & + \dot{r} [r \partial_r (\sin \theta \cos \varphi) + 0 \partial_r (\cos \theta \cos \varphi) + 0 \partial_r (-\sin \varphi)] \\ & + \dot{\theta} [r \partial_\theta (\sin \theta \cos \varphi) + 0 \partial_\theta (\cos \theta \cos \varphi) + 0 \partial_\theta (-\sin \varphi)] \\ & + \dot{\varphi} [r \partial_\varphi (\sin \theta \cos \varphi) + 0 \partial_\varphi (\cos \theta \cos \varphi) + 0 \partial_\varphi (-\sin \varphi)] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Faz-se notar que as coordenadas esperadas nas posições θ e φ são nulas em razão de as variáveis não se apresentarem na tupla do respectivo tensor, enquanto as derivadas das mesmas variáveis aparecem em $\hat{J}_\mu^m = \dot{x}^\alpha \partial_\alpha J_\mu^m$ como velocidades angulares $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$.

Segue o resultado das substituições de todas as direções: $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$.

$$\dot{x} = \dot{\rho} \sin \theta \cos \varphi + \rho \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \quad (2.35a)$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta \sin \varphi + \rho \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \quad (2.35b)$$

$$\dot{z} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta \quad (2.35c)$$

Organizando em um arranjo matricial, obtém-se a relação entre as velocidades por meio da transformação:

$$\begin{bmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \dot{\rho} \\ \rho \dot{\theta} \\ \rho \dot{\varphi} \sin \theta \end{bmatrix} \end{pmatrix}^T \quad (2.36)$$

2.5 Tensor Métrico Normalizado

Motivado pela covariância nas transformações entre sistemas de coordenadas, chega-se à condição de ortonormalidade das transformações, que influencia a escolha da base móvel, que por sua vez define o tensor métrico.

A transformação entre coordenadas deve ser isométrica, ou seja, preserva a norma.

$$v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = v^m v^n g_{mn} \quad (2.37)$$

Da igualdade dos produtos, pode-se deduzir a transformação entre métricas:

$$g_{\mu\nu} = J_\mu^m J_\nu^n g_{mn} \quad (2.38)$$

Na condução do produto por operações matriciais, as transformações assumem a forma do produto $(J_\mu^m)^T (J_\nu^n)$. O determinante da transformação resulta na comparação direta entre os dois tensores métricos pelos respectivos determinantes.

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(g_{mn}) \quad (2.39)$$

Embora uma métrica particular seja parametrizada pelas variáveis do sistema coordenado correspondente, o determinante é uma característica compartilhada entre os sistemas que se alteram de maneira covariante uns em relação aos outros, sendo, portanto, independente de qualquer sistema. Pela definição, o determinante opera a contração entre índices, e o escalar resultante é invariante.

$$\det(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{\varepsilon^{\mu_0 \dots \mu_3} \varepsilon_{\nu_0 \dots \nu_3}} \varepsilon^{\mu_0 \dots \mu_3} \varepsilon_{\nu_0 \dots \nu_3} g_{\mu_0 \nu_0} \dots g_{\mu_3 \nu_3} \quad (2.40)$$

Denomina-se tensor métrico normalizado aquele cujo determinante seja unitário. O valor unitário corresponde diretamente à reciprocidade entre os componentes da métrica, mas também ao fator de escala entre os tensores da base e tensores que podem ser obtidos por combinação linear.

Pode-se escrever o invariante de Lorentz para coordenadas esféricas.

$$c^2 = \gamma^2 \begin{bmatrix} ct \\ \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \rho\dot{\varphi} \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{00} & & & \\ & g_{11} & & \\ & & g_{22} & \\ & & & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \rho\dot{\varphi} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Nessa assinatura $(+, +, +, +)$, o sinal é incorporado à métrica e aparece nas substituições por valores conhecidos da métrica regular[71].

$$g_{00} = \left(1 + \frac{\mu}{c^2 r}\right)^{-1} \delta_{00} \quad (2.42a)$$

$$g_{11} = - \left(1 + \frac{\mu}{c^2 r}\right) \delta_{11} \quad (2.42b)$$

$$g_{22} = -1 \delta_{22} \quad (2.42c)$$

$$g_{33} = -1 \delta_{33} \quad (2.42d)$$

$$\mu \neq \nu \implies g_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu} \quad (2.42e)$$

Para curvatura de simetria central, em razão do determinante unitário, a forma esférica do tensor expõe uma condição notável, que pode ser generalizada para as formas transformadas: a componente temporal está sempre em reciprocidade com o restante do determinante.

O arranjo pode ser resumido enunciando a existência de duas curvaturas cardinais: uma temporal e outra espacial. A natureza direcional da “aceleração” alinha-se à curvatura espacial. A direção nem sempre pode ser expressa por um único vetor da base, em consideração à mudança que essa base pode sofrer, e distingue-se essa direção espacial pela denominação de diretrix.

A métrica e o determinante são regulares, estão definidos em todo o espaço. A normalidade evita indefinições transientes, como em $\sin \theta = 0$ (singularidade polar é removível, porém inconveniente.) Também traz, como benefício, o número reduzido de símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} \quad (2.43a)$$

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{00} \quad (2.43b)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11} \quad (2.43c)$$

No esforço de preservar os índices, produz-se o tensor $\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = \delta_{11}$.

$$\partial_1 g_{11} = \frac{\mu}{r^2} \delta_{11} \|\hat{\mathbf{u}}_1\| \quad (2.44)$$

A condição de unimodularidade foi considerada por Einstein e Hilbert privadamente [29], e depois abertamente [49]. Entretanto, deixa de ser comentada após instrução de Hilbert sobre a métrica de Schwarzschild [50].

2.6 Derivada Covariante-Paramétrica

Um tensor obtido pela derivada direcional de Ricci transforma-se covariantemente com a mudança de coordenadas, ou seja, é linear. O fato de os símbolos

de Christoffel não serem covariantes, mas satisfazerem a linearidade na operação, é demonstrável para qualquer transformação de coordenadas [43].

$$\nabla_\lambda T^\mu = J_\ell^\lambda J_m^\mu \nabla_\ell T^m \quad (2.45)$$

O operador pode ser definido abstratamente, sem a presença do tensor métrico, e consequentemente sem quaisquer considerações sobre as propriedades métricas.

Ocorre que nem toda transformação é isométrica, condição obtida ao representar parametricamente a mobilidade de uma base em relação a outra.

Considere que a transformação entre tensores de base $\mathbf{r}_\mu = J_\mu^m \hat{\mathbf{e}}_m$ represente dependência paramétrica de uma base para com a outra, ou seja, $J_{\mu\lambda}^m \neq 0$. As variações dos vetores da base podem ser escritas por:

$$\partial_\lambda \hat{\mathbf{e}}_\mu = J_{\mu\lambda}^m \hat{\mathbf{e}}_m + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha \quad (2.46)$$

O resultado pode ser interpretado como sendo a soma da variação intrínseca com a variação paramétrica. A definição da derivada de Ricci e Levi-Civita incorpora toda a variação do tensor da base ao operador. Para a redefinição da operação, incorporamos apenas a variação do tensor da base de referência, que contém somente a variação intrínseca do espaço.

$$\nabla_\lambda \hat{\mathbf{e}}_\mu = \partial_\lambda \hat{\mathbf{e}}_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha = J_{\mu\lambda}^m \hat{\mathbf{e}}_m \quad (2.47)$$

O operador resultante corresponde à derivada covariante acrescida de um termo paramétrico.

$$\nabla_\lambda \mathbf{V} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} \hat{\mathbf{e}}_\mu + V^\mu \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\mu}{\partial x^\lambda} \quad (2.48)$$

$$= \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} \hat{\mathbf{e}}_\mu + V^\mu (\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha + J_{\mu\lambda}^m \hat{\mathbf{e}}_m) \quad (2.49)$$

Repara-se que não é possível agrupar os índices do símbolo Christoffel e os índices dos termos de conversão ao mesmo tempo. Um reagrupamento por direção é necessário para esse propósito.

$$\nabla_\lambda \mathbf{V} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} \hat{\mathbf{e}}_\mu + V^\alpha \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu + V^\mu J_{\mu\lambda}^m \hat{\mathbf{e}}_m \quad (2.50)$$

Para métrica normal e transformação ortonormal, a expressão é derivada isométrica.

2.7 Geodésica

A derivada covariante expõe a participação da mudança de direção pela variação métrica do espaço. A indução de termos deve satisfazer o invariante de velocidade, sendo possível equacionar o movimento inercial. Considerando a variação nula, o descolamento paralelo do vetor constitui a equação geodésica.

2.7.1 Equacionamento pela Métrica Normalizada: Al-Muqabala

Seguindo a constituição da métrica normalizada, a conjugação de duas curvaturas principais, uma temporal e outra espacial, as variações cinemáticas vinculam-se às variações posicionais.

Pela derivada covariante, a variação de $\dot{x}^\nu$ é dada por:

$$\gamma^2 \ddot{\chi}^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu + \gamma \dot{\gamma} \dot{x}^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu + 2\gamma^2 \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu = 0 \quad (2.51)$$

A componente de dimensão temporal geodésica corresponde à equação dos índices $\nu = 0$.

$$\gamma \dot{x}^0 \dot{\gamma} \hat{\mathbf{e}}_0 + 2\gamma^2 \dot{x}^0 \dot{x}^\mu \Gamma_{0\mu}^0 \hat{\mathbf{e}}_0 = 0 \quad (2.52)$$

Como $\dot{x}^0$ é constante, o termo $\ddot{\chi}^0 = 0$. O reagrupamento evidencia a vinculação que ocorre entre o movimento e a métrica pela forma como a variação do fator de Lorentz é induzida pelo símbolo Christoffel.

$$\dot{\gamma} = -\gamma \dot{x}^k 2\Gamma_{0k}^0 \quad (2.53)$$

Essa vinculação tem efeito sistêmico nas correspondências com as vinculações que serão estabelecidas nas outras equações, pois, da mesma forma que o fator γ estabelece relações funcionais implícitas entre as componentes de velocidade v^k pelo invariante de velocidade, a normalidade métrica estabelece relação funcional implícita na variação das componentes métricas.

Tomando que a métrica não varia no tempo, $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, a métrica somente possui variações posicionais. Isso posto, as relações funcionais implícitas entre as componentes métricas são dadas nas variações posicionais do determinante da métrica. Dado que o determinante da métrica é constante, $\partial_k \det(g_{..}) = 0$, com isso, para a métrica somente com elementos diagonais, chega-se a:

$$g^{00} \partial_k g_{00} + g^{nn} \partial_k g_{nn} = 0 \quad (2.54)$$

$(n \neq 0, k \neq 0)$

O que pode ser expresso na relação entre os símbolos de Christoffel.

$$\delta_0^0 \Gamma_{0k}^0 + \delta_n^n \Gamma_{nk}^n = 0_k \quad (2.55)$$

Com a manipulação de índices em $\dot{\gamma} = \gamma \dot{x}^k 2\Gamma_{nk}^n$, é simples constatar que a variação $\dot{\gamma}$ se apresenta na variação de termos espaciais, ou seja, $g^{nn} \partial_k g_{nn}$, com $n \neq 0$, antecipando a relação que deverá existir na equação espacial.

$$\gamma \dot{\gamma} \dot{x}^n = \gamma^2 \dot{x}^n \dot{x}^k 2\Gamma_{nk}^n \quad (2.56)$$

As relações cruzadas ocorrem pela relação funcional implícita dos termos cinemáticos γ , quando $\dot{\gamma}$, e pela relação funcional implícita dos termos métricos $\det(g)$ quando feito $\partial_k \gamma$.

A equação geodésica espacial é obtida em substituição dos índices $\nu = k$ em (2.51), com $k \neq 0$. Se, pela métrica diagonal, os termos $\dot{x}^m \dot{x}^n \Gamma_{mn}^k$ da equação geodésica de índices espaciais puderem ser simplificados, em razão da métrica diagonal, para soma $\dot{x}^n \dot{x}^n \Gamma_{nn}^k$, então podemos compor a componente espacial da geodésica no rearranjo dos termos:

$$\gamma^2 \ddot{\chi}^k \hat{\mathbf{e}}_k + \gamma \dot{\gamma} \dot{x}^k \hat{\mathbf{e}}_k + [\gamma^2 \dot{x}^0 \dot{x}^0 \Gamma_{00}^k - \gamma^2 \dot{x}^n \dot{x}^n \Gamma_{nn}^k] \hat{\mathbf{e}}_k + 2\gamma^2 \dot{x}^n \dot{x}^n \Gamma_{nn}^k \hat{\mathbf{e}}_k = 0 \quad (2.57)$$

O rearranjo evidencia, como antecipado na equação (2.56), a similitude entre o segundo e o último termo do lado da equação.

$$\begin{aligned} \gamma \dot{\gamma} \dot{x}^k + 2\gamma^2 \dot{x}^n \dot{x}^n \Gamma_{nn}^k &= 0 \\ (n \neq 0) \end{aligned} \quad (2.58)$$

A disposição dos índices não é a mesma da equação (2.56), mas, na condição de métrica diagonal e para condição de a métrica variar apenas em uma direção espacial, tem-se $\Gamma_{nn}^k = \Gamma_{nk}^n = \Gamma_{0k}^0$ onde $(n \neq 0)$. Portanto, na variação métrica em ocorrência apenas no primeiro índice, a componente desse índice é $\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{01}^0$, enquanto nos outros índices $\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{02}^0 = 0_{02}^0$, assim como $\Gamma_{33}^3 = -\Gamma_{03}^0 = 0_{03}^0$.

A igualdade dos termos em 2.58 é consequência das propriedades da métrica normalizada: variação temporal é conjugada à variação espacial. Além das relações funcionais implícitas do $\det(g_{..}) = 0$, outra relação, proveniente da definição dos símbolos, é dada por $g_{nn} \Gamma_{nk}^n = -g_{kk} \Gamma_{nn}^k$, onde $(n \neq k)$. A demonstração é direta e válida para definição métrica diagonal:

$$2\Gamma_{nn}^k = -g^{kk} \partial_k g_{nn} \quad (n \neq k) \quad (2.59a)$$

$$2\Gamma_{nk}^n = g^{nn} \partial_k g_{nn} \quad (2.59b)$$

Retornando à equação geodésica (2.57), a equivalência entre o segundo e últimos termos da equação dos índices espaciais da geodésica implica a igualdade dos remanescentes.

$$\gamma^2 \ddot{\chi}^k + [\gamma^2 \dot{x}^0 \dot{x}^0 \Gamma_{00}^k - \gamma^2 \dot{x}^n \dot{x}^n \Gamma_{nn}^k] = 0 \quad (2.60)$$

A equação propõe uma segunda vinculação, além da expressa anteriormente na equação (2.53), desta vez entre $\ddot{\chi}^k$ e as definições espaciais dos símbolos de Christoffel, ponderada pela velocidade. Torna-se importante observar que a variação do fator de Lorentz, em sua forma coordenada, $\dot{\gamma} = \gamma^3 a \cdot v/c^2$, é dependente de uma variação de segunda ordem. Para que essas taxas sejam condizentes, deve haver conformidade entre as vinculações.

A condicionante encaminha a resolução, o que é feito no confronto entre o termo em (2.60) contra o “gradiente” do fator de Lorentz expresso por $\gamma = (x^0 x^0 \delta_{00})^{1/2} (\dot{x}^0 \dot{x}^0 g_{00} + \dot{x}^n \dot{x}^n g_{nn})^{-1/2}$.

$$\partial_k \gamma = -\frac{\gamma^3}{c^2} [\dot{x}^0 \dot{x}^0 \Gamma_{0k}^0 g_{00} + \dot{x}^n \dot{x}^n \Gamma_{nk}^n g_{nn}] \quad (2.61)$$

Mais uma vez, a disposição dos índices não é a mesma, e há diferença de sinal. Similar ao desfecho anterior, a equivalência é dada na especificidade da métrica. Para a métrica diagonal na condição de variar apenas em uma direção espacial, o termo temporal do gradiente $g_{00}\Gamma_{01}^0 = -g_{11}\Gamma_{00}^1$, enquanto que o termo espacial $g_{11}\Gamma_{11}^1 = g_{11}\Gamma_{11}^1$, basta que não seja nulo.

Do gradiente, tem-se:

$$g^{kk}\frac{c^2}{\gamma}\partial_k\gamma = \gamma^2 [\dot{x}^0\dot{x}^0\Gamma_{00}^k - \dot{x}^n\dot{x}^n\Gamma_{nn}^k] \quad (2.62)$$

Substituindo essa última expressão na geodésica espacial da equação (2.57), junto dos resultados obtidos anteriormente, a expressão geodésica espacial é reformulada para:

$$\gamma^2\ddot{\chi}^k + \gamma\dot{\gamma}\dot{x}^k - \frac{\gamma^2}{\gamma^2}g^{kk}\frac{c^2}{\gamma}\partial_k\gamma - \gamma\dot{\gamma}\dot{x}^n = 0 \quad (2.63)$$

A inversão de sinal dos dois últimos termos do lado esquerdo da expressão reproduz a mudança de sinal que ocorre na passagem da tupla $[c, \dot{x}^k]$ para o produto entre tuplas na forma quadrática, por efeito da assinatura. Similarmente, a transferência de expressões de índices temporais da forma quadrática para o índice espacial ocorre inversão de sinal.⁷

A expressão geodésica espacial simplifica para o equacionamento da variação da velocidade pelo “gradiente”⁸ do fator de Lorentz:

$$\ddot{\chi}^k = g^{kk}\frac{c^2}{\gamma^3}\partial_k\gamma \quad (2.64)$$

A similaridade com a expressão coordenada $a \cdot v = c^2\dot{\gamma}/\gamma^3$ é o conseqüente das substituições envolvidas. Entretanto, é necessário atenção nas relações cruzadas que a notação sugere.

É equivocado presumir equivalência, a despeito do que a compositividade possa sugerir. Para o equacionamento apresentado, o que se demonstra é:

$$\dot{\gamma} \neq \dot{x}^k\partial_k\gamma \quad (2.65)$$

As substituições resultam em $\dot{\gamma} = 2\dot{x}^k\partial_k\gamma$; ao que pode ser apurado da equação (2.53), as contrapartes espaciais (2.56) e (2.58) em contraparte com o gradiente (2.61). É interessante ressaltar que $\dot{\gamma}$ é um diferencial total, enquanto o gradiente possui apenas as parcelas espaciais ($k \neq 0$).

No espaço curvo, o fator de Lorentz depende do espaço e da velocidade $\gamma(\dot{x}^k, x^k)$, com isso tem dependência implícita do tempo por $\dot{x}^k(t)$. A variação total $\dot{\gamma}$ dá conta da parcela “impulsionada” pela métrica no deslocamento espacial e da variação “intrínseca” pelo efeito que causa na taxa de variação da velocidade, e essa reverte-se ao fator no decorrer do tempo. Entretanto, a expressão $\dot{x}^k\partial_k\gamma$ apresenta apenas a parcela espacial, não havendo a parcela temporal $\dot{x}^0\partial_0\gamma$.

⁷O intercâmbio seria direto se considerarmos a assinatura da tupla. $[c, -\dot{x}^k]$

⁸O gradiente por $\partial^k = g^{kk}\partial_k$ resulta no produto $c^{-2}\dot{\gamma}^3\dot{x}^k\ddot{\chi}^k = \dot{x}^k\partial^k\gamma$

É possível especular o termo omitido por uma “variação aparente”, implícito pela dinâmica e reconstituindo o diferencial total.

$$\dot{x}^0 \partial_0 \gamma \equiv \dot{\gamma} - \dot{x}^k \partial_k \gamma \quad (2.66)$$

O remendo é conveniente, mas, apesar de ser matematicamente satisfatório, não dá conceito de causa ou efeito ou em que condições mecânicas é válido. Nesse ponto, é importante enfatizar que não se trata de uma peculiaridade para a pretensão de simplificar o equacionamento geodésico. O tema é recorrente e torna-se questão central da generalidade, tornando essa a primeira oportunidade de discussão do assunto.

O entendimento de que o diferencial total introduz nova condição mecânica encomenda a inspeção na abordagem por princípios variacionais, o que será apresentado adiante. Entretanto, a noção pode ser introduzida pela definição derivada covariante, não sem antes discutir as implicações e consequências nos aspectos conceituais.

Essa forma diferencial total revelará-se necessária pela normalidade da métrica, independente da redução da geodésica que se faz nessa seção, para rotação hiperbólica.

2.7.2 Tempo Extrínseco

Uma noção correlata de diferencial total vem da derivada covariante temporal $\nabla S_{\mu\nu} = 0$ proposta originalmente por Hadamard[44][43]. Embora a métrica normalizada não esteja relacionada com a evolução temporal de superfícies móveis, a similitude está na vinculação entre variação espacial e a variação temporal por uma velocidade de propagação do interface métrica, que no caso presente é dada por $\partial_0 \equiv c^{-1} \partial_t$. Simplificadamente, trata-se do problema de velocidade relativa entre o corpo e a métrica, em que deve-se apurar a velocidade do corpo em consideração à velocidade de arrasto devido ao movimento da métrica. A diferença significativa para Hadamard é que, no que concerne à relatividade, essa velocidade é sempre constante. Entretanto, o desenvolvimento não é tão trivial quanto a descrição o faça parecer. Nessa forma, o acoplamento temporal é extrínseco à métrica, externalizado a um evento de simultaneidade.

A elaboração relativística traz em si as próprias congruências que se fazem necessárias, ora pelo invariante de velocidade, ora pela simultaneidade. O equacionamento coerente com o entendimento físico é condizente com a resignificação de como algumas situações são percebidas ou interpretadas.

Pela conformidade com um equacionamento sistêmico, as equações devem ser acopladas por necessidade de promover simultaneidade. Duas “incongruências” são aparentes: a primeira é que temos corpo fixo; a segunda é que a métrica passa a ser percebida como um descritor de espaço absoluto.

Até então, descreve-se a situação de uma métrica produzida por um corpo fixo com simetria espacial central. Sendo assim, o corpo fixo não promove o movimento da métrica que se origina nele pela variação de seu movimento. Nessa forma, a variação temporal sugere a ideia de fluxo. Essa primeira concepção é desfeita ao recobrar que a situação é idealizada: o corpo é considerado fixo pela condição assintótica na diferença de massas.⁹ Fluxo torna-se intratável quando,

⁹A condição de corpo fixo simplifica o equacionamento ao eliminar a composição tem-

na situação de dois corpos, a fonte da métrica move-se pelas definições circulares do movimento do espaço no próprio espaço, ou indireção por substâncias etéreas.

Aprimorado para a situação de dois corpos, seria prematuro introduzir uma outra causa para o retardo que não a própria causalidade do equilíbrio entre os corpos. A manifestação de propagação imaterial é o fenômeno da percepção pela própria composição do espaço-tempo, é ofício da métrica viabilizar a condição temporal aos observadores para que esses façam a distinção entre situações de simultaneidade, como no equilíbrio dos momentos; ou de retardo, quando há força. Inércia, em sua composição temporal, torna-se a taxa de variação no tempo que tem o seu próprio tempo para acontecer, somente então procede discriminar os efeitos que decorrem de transporte imaterial. Pela métrica, o espaço é a medida da inércia temporal, quando a ação tem reação.

No estado de equilíbrio, a latência do estímulo de posição pregressa deve condizer com a velocidade de propagação. A vinculação temporal dos eventos é equacionada pelas peculiaridades que cada configuração sistêmica promove.

Uma vez que seja possível esclarecer que, pelas próprias condições de equilíbrio da métrica, todos os corpos oscilam, condizente com a onda-material de de Broglie, o mecanismo de autopropagação é entendido pela própria latência. Se o corpo de onde a métrica se origina oscila, então a própria métrica oscila, produzindo alternância¹⁰ entre a maior ou menor contração temporal e dilatação espacial.¹¹ A condição de onda requer velocidade que satisfaça a **derivada covariante temporal**.

A segunda “incongruência”, que decorre da externalidade temporal na vinculação de eventos, refere-se à quantidade de corpos vinculados a uma mesma métrica. Ao colocar-se o evento de simultaneidade externo à métrica, interdita-se que a métrica seja utilizada para mais de uma posição. Dito de outra forma, cada métrica mede somente a velocidade relativa entre dois corpos: ainda que se repitam as definições, consideram-se distintas. O entendimento é que o instante em que os momentos relativos entre os corpos se equilibram é considerado evento de simultaneidade.

Do ponto de vista gravitacional, a métrica de um corpo primário, que é massivo em relação aos corpos acompanhantes, não deve ser empregada para triangulação de velocidade entre os menores, por meio da adição relativística. Em vez, calcula-se a propensão geodésica atuante de cada par: além da ação que cada corpo menor sofre do maior, a ação pela métrica entre eles. A resultante das “forças” em cada corpo retraça uma geodésica resultante. A velocidade mais exata é aquela dada na geodésica pela métrica entre os corpos considerados e quaisquer ações externas.

Um exemplo instigante no qual a métrica se apresenta de maneira diferenciada entre os corpos é a interação metrificada entre o próton, o elétron e o múon. Diferentemente da natureza gravitacional, em que ocorre atração que atua na mesma proporção que a inércia, eletricamente a métrica é pela relação

poral. Isso viabiliza a definição em termos de parâmetros espaciais, mas em detrimento da regularidade temporal, ou melhor, força uma regularidade temporal.

¹⁰ O padrão periódico permite representar no domínio do tempo, ou sua transformação no domínio da frequência. A percepção retardada dos eventos coloca incerteza sobre a posição e equilíbrio dos momentos.

¹¹ Realização do postulado relativístico da velocidade da luz: se houver propagação, a métrica não pode ser estacionária, o que é obtido pela sua oscilação. Essa autoconsistência implica em uma elaboração mais extensa em que modula em frequência pelo próprio valor da métrica.

carga-massa, a força exercida em função da carga independe da reação dada pela massa. Assim, uma métrica próton-elétron informa como o próton enxerga o movimento do elétron e, em reverso, a métrica elétron-próton como o elétron enxerga o movimento do próton; o mesmo para próton-múon, elétron-múon. Fosse um próton e dois elétrons, consideraria-se o mesmo número de métricas. Essa natureza de atração torna claro que a simultaneidade é distinta.

Considerar triangulação por uma mesma métrica ignora a latência com que os corpos reagem a uma posição diferente. Métrica é função da posição e independe do tempo. A métrica não tem memória do movimento pregresso, o que é esperado da geodésica. Na configuração que favoreça a regularidade espacial com que os eventos ocorrem, a habilidade de predição no problema do corpo fixo é uma exceção. Antes que se confunda com atributos do espaço absoluto, a estabilidade garante a regularidade temporal pelo fato de o corpo não se mover. O trabalho de separar em métricas é necessário, pois os corpos têm movimentos distintos. Ainda assim, a métrica por consideração do corpo fixo é fundamental na decomposição do problema: por se conhecer um instantâneo antes de qualquer ponderação temporal, assinala um marco intrínseco do espaço antes do registro extrínseco no tempo.

Ao contrário de privilegiado, é inabilitado, mas antes por ser especializado do que insuficiente. Cada relação métrica é um sistema aberto entre dois corpos em que operam tanto as interações internas quanto as ações externas. Diante de uma resultante, cada corpo reage produzindo equacionamento geodésico na métrica de interesse, entre todas em que se encontra inserido.

Evento de simultaneidade entre dois corpos no revezamento do papel de corpo fonte afetado define, pela igualdade das distâncias apuradas na métrica¹² em um mesmo instante, uma condição de espaço-tempo. Assim, metrificar a velocidade relativa entre os corpos por medida obtida do próprio movimento do “campo” permite o mapeamento topológico por velocidades da natureza do espaço-tempo.

A limitação do número de corpos tem contrapartida na representação de natureza diferente, e como cada par deve ser calculado individualmente.

2.7.3 Mecânica

Seguindo o que foi explanado na seção anterior, acrescenta-se termo extra tal qual a derivada covariante temporal de Hadamard. Segue-se a apresentação lagrangiana de como o termo extra é acompanhado por princípios variacionais.

No espaço curvo, o fator de Lorentz depende da velocidade e do espaço $\gamma(\dot{x}^k, x^k)$. Em um deslocamento, há variação métrica promovida pelo movimento, e com isso, γ assume um novo valor a cada nova posição. Como a variação da métrica é fixa, o resultado tem efeito na velocidade.

O gradiente de γ atende à variação por referência ao espaço, mas desconsidera o sobreefeito da reincidência sobre a velocidade, que se apresenta na variação no tempo.

O fato de que a métrica não varia no tempo torna o termo parcial temporal $\dot{x}^0 \partial_0 \gamma$ implícito e definido na relação com outros termos do equacionamento geodésico.

¹²A distância radial é paramétrica ou involuta pelo próprio deslocamento da luz sobre a métrica e respectivo tempo próprio.

A equação geodésica é obtida de Euler-Lagrange para escolha da função lagrangiana $\mathcal{L} = -mc^2\gamma^{-1}$.

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.67)$$

A substituição possível para definição é:

$$mc^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - mc^2 \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.68)$$

Motivando a discussão, um “descuido” ocorre no passo seguinte: opera-se diretamente a substituição da expressão definida por γ . Por generalidade, é correto que nem todas as variáveis produzam variação, como o caso das variáveis angulares, mas a condição que impõe-se é que γ varia intrinsecamente no tempo, enquanto a métrica não.

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{d\dot{x}^\mu}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \gamma^2 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\nu g_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.69)$$

Prosseguindo, a seção anterior demonstrou que, pelas relações implícitas que o tensor métrico normalizado proporciona, o equacionamento geodésico pode ser particionado em duas equações de balanço.

$$\left\{ g_{\mu\nu} \gamma^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{d\dot{x}^\mu}{dt} \right) - \frac{1}{2} \gamma^2 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\nu g_{\alpha\beta} = 0 \right. \quad (2.70a)$$

$$\left. \frac{dx^\mu}{dt} \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} \gamma) = 0 \right\} \quad (2.70b)$$

A equação (2.70b) corresponde soma das equações temporal (2.52) e espacial (2.58), enquanto (2.70a) corresponde, pela nulidade da parte temporal, inteiramente com a equação espacial (2.60).

A separação torna simples observar o mecanismo de acoplamento entre a métrica em movimento. Em (2.70b), a taxa de variação de γ atua em reciprocidade com a de $g_{\mu\nu}$. Entretanto, em (2.70a), em razão de $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, a velocidade toma o seu valor de γ apenas pelo gradiente da métrica, não cumprindo o que é estabelecido em (2.70b).

A separação em das equações de balanço também torna simples verificar que a discrepância seria eliminada na escolha da função lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}} = -2mc^2/\gamma$, o que evidencia que a falta de equivalência em (2.65) é removível em apenas um caso. Porém, a solução simplista abre a possibilidade de um número infinito de formulações que passam a depender de peculiaridades do problema, e.g., dos valores que métrica deve produzir para se conduzir uma determinada aceleração, em detrimento da referida equivalência.

A arbitrariedade da escolha da função lagrangiana, embora arremate a falta de equivalência em (2.65), não é satisfatória, pois torna a equivalência somente

um caso peculiar. Mais apropriado é endossar a condição de diferencial total em $\dot{\gamma}$. Uma primeira medida é estabelecer que $\partial_0\gamma$ não se confunde com $\partial_0g_{\mu\nu}$, corrigindo o “descuido” mencionado. A substituição prematura pela métrica acaba por omitir o termo $\partial\mathcal{L}/\partial x^0$.

Para a função lagrangiana, faz-se a equação de Euler-Lagrange: ¹³

$$mc^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - mc^2 \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x^0} - mc^2 \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x^k} = 0 \quad (2.71)$$

A operação pela métrica é incapaz de representar o termo de variação temporal, embora seja claro que $\partial\gamma/\partial x^0 \neq 0$. A dependência implícita no tempo é resolvida pela regra da cadeia aplicada a $\gamma(\dot{x}^k(t), g_{\mu\nu}(x^k))$.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x^0} = \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{x}^\mu} \cdot \frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial (ct)} \quad (2.72)$$

A geodésica por derivada covariante alcança resultado similar, o que somente é possível se definir a operação variação total como composição pela derivada covariante, evitando que o termo de variação temporal fique subentendido no caso de $\partial_0g_{\mu\nu} = 0$.

$$\frac{d}{dt}V^\mu = D_0V^\mu + D_kV^\mu \quad (2.73)$$

A geodésica é dada pela variação espacial definida pela derivada covariante ¹⁴ $D_k = \dot{x}^k \nabla_k V^\mu$, enquanto a variação temporal D_0V^μ , além dos símbolos explicitamente definidos no tempo, complementa o diferencial total com as parcelas temporais para os termos em (2.66) que não podem ser expressos por $\dot{x}^0 \partial_0$.

2.7.4 Definições Paramétricas da Métrica

Pelas simplificações apresentadas anteriormente, torna-se interessante reescrever a equação geodésica de forma a expressar diretamente, pela definição paramétrica da métrica em (2.42a) a (2.42d), a resolução que a variável de variação coordenada encaminha.

Para a definição em (2.42b), o resultado da métrica toma a forma:

$$\partial_1 g_{11} \equiv \delta_{11} \delta_{11} \gamma^2 \frac{f^1}{c^2} \quad (2.74)$$

onde

$$f^1 = \frac{\mu}{r^2} \quad (2.75)$$

¹³ Em uma inspeção mais rigorosa, para o valor $\dot{x}^0 = \text{cte}$, a operação pelo contravariante $\partial\gamma/\partial \dot{x}^0$ não está definida, mas pelo covariante $\partial\gamma/\partial \dot{x}_0$ está (exceto para o espaço plano, o que terá atenção quando se fizer oportuno). O entendimento é que relações sistêmicas dão suporte para indefinições transitórias.

Outro aspecto, a discussão sobre discriminação de parâmetro e expressão para lagrangiano manifestamente covariante pode ser encontrada em Lanczos [60], Goldstein [41] e Cline [24]

¹⁴ Rigorosamente, $\ddot{x}^k = \dot{x}^\mu \partial_\mu \dot{x}^k$ não tem sentido, pois velocidade é independente da posição.

O valor está relacionado à convergência da atração para o valor do gradiente do potencial $\hat{\mathbf{e}}_1 \partial^1 U = \hat{\mathbf{e}}_1 f^1$ para campo fraco. Em razão da covariância, há introdução de símbolos delta de Kronecker para acertar os índices sem afetar a magnitude.¹⁵

A métrica não depende da velocidade, entretanto a variação da velocidade que ela produz é afetada em razão da própria velocidade desenvolvida. O valor fixo da métrica no ponto produz o valor assintótico na velocidade, pois, ao se aproximar da velocidade limite, o fator γ^2 se eleva, tornando a variação coordenada da velocidade f^1 assintoticamente menor.

A posição do índice também é adequada diante de expressões covariantes envolvendo símbolos de Christoffel. Para $\partial_1 g_{11} = 2g_{11}\Gamma_{11}^1$:

$$2g_{11}\Gamma_{11}^1\hat{\mathbf{e}}_1 = \delta_{11}\delta_{11}\gamma^2 f^1 \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (2.76)$$

Para a definição paramétrica temporal da métrica em (2.42a), pode-se empregar a propriedade (2.54) para chegar em $\partial_1 g^{kk} = -g^{kk}g^{kk}(\partial_1 g_{kk})$, com isso:

$$\partial_1 g_{00} = -\delta_{00}\delta_{11}\partial_1 g^{11} = \delta_{00}\delta_{11}g^{11}g^{11}(\partial_1 g_{11}) \quad (2.77)$$

Os símbolos de Chrisoffel (2.43a) e (2.43b) são reescritos como:

$$2\Gamma_{01}^0 = -g^{11}\partial_1 g_{11} \quad (2.78a)$$

$$2\Gamma_{00}^1 = -\delta_{00}\delta_{11}g^{11}g^{11}(\partial_1 g_{11}) \quad (2.78b)$$

Retomando a geodésica, o balanço entre os termos espaciais da equação (2.58) pode ser reescrito como:

$$\gamma\dot{\gamma}\dot{x}^1\hat{\mathbf{e}}_1 + \gamma^4\dot{x}^1\dot{x}^1g^{11}\delta_{11}\delta_{11}\frac{f^1}{c^2}\hat{\mathbf{e}}_1 = 0 \quad (2.79)$$

Implícito em $\dot{\gamma}$, há o produto entre a velocidade e sua variação, o que deve ser correspondido no segundo termo do lado esquerdo. Dado que é possível por (2.59a) e (2.59b) alterar, pela manipulação de índices, a vinculação de contração do vetor da base, a equivalência é obtida fazendo-se $\dot{x}^1 f^1 = g^{11}\dot{x}^1 f_1$. Também é interessante fazer $\gamma_r^{-2} = \delta_{11}g^{11}$, um fator recorrente nas expressões.¹⁶

$$\gamma\dot{\gamma}\dot{x}^1\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\gamma^4}{\gamma_r^4} \cdot \frac{(\dot{x}^1 f_1)}{c^2} \dot{x}^1 \hat{\mathbf{e}}_1 = 0 \quad (2.80)$$

O mesmo procedimento é aplicável à equação geodésica de índice temporal (2.52). Iniciando por

$$\gamma\dot{x}^0\dot{\gamma}\hat{\mathbf{e}}_0 - \gamma^4\dot{x}^0\dot{x}^1g^{11}\delta_{11}\delta_{11}\frac{f^1}{c^2}\hat{\mathbf{e}}_0 = 0 \quad (2.81)$$

¹⁵Pelo equacionamento geodésico, o gradiente do “escalar” da métrica seria $\hat{\mathbf{e}}^1\partial_1(\delta^{11}g_{11}) = g_{11}f^1\hat{\mathbf{e}}^1$, entretanto perder-se-ia a definição paramétrica da métrica na derivada pela variável coordenada (contravariante), pois teria-se $g^{11}\partial_1(g_{11}) = \delta_{11}f^1$.

¹⁶O fator métrico é definido pela componente temporal da métrica $\gamma_r^2 = \delta_{00}g^{00}$, ou determinante das componentes espaciais da métrica.

chega-se a:

$$\gamma \dot{x}^0 \dot{\gamma} \hat{\mathbf{e}}_0 - \frac{\gamma^4}{\gamma_r^4} \dot{x}^0 \frac{(\dot{x}^1 f_1)}{c^2} \hat{\mathbf{e}}_0 = 0 \quad (2.82)$$

Na métrica normalizada, o gradiente do fator de Lorentz tem componente apenas na direção radial, dado por $\hat{\mathbf{e}}^1 \partial_1 \gamma = \hat{\mathbf{e}}_1 g^{11} \partial_1 \gamma$.

Pela equação (2.55), chega-se a $\partial_1 \gamma = \gamma \Gamma_{11}^1$, e o símbolo de Christoffel pode ser substituído por (2.76).

$$\hat{\mathbf{e}}_1 g^{11} \partial_1 \gamma = \gamma g^{11} \Gamma_{11}^1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^3}{\gamma_r^4} \cdot \frac{f^1}{c^2} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (2.83)$$

O resultado em (2.83) é um termo da expressão geodésica (2.60).

$$\gamma^2 \ddot{\chi}^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \gamma^2 \frac{c^2}{\gamma^3} (\hat{\mathbf{e}}_1 g^{11} \partial_1 \gamma) = 0 \quad (2.84)$$

$$\gamma^2 \ddot{\chi}^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2}{\gamma_r^4} \cdot f^1 \hat{\mathbf{e}}_1 = 0 \quad (2.85)$$

Da definição $\ddot{\chi}^k$, tem-se que $\dot{\gamma} = 2\dot{x}^k \partial_k \gamma$. A conclusão de que $\ddot{x}^k = 2\ddot{\chi}^k$ vem do exposto na seção 2.7.3.

O equacionamento obtido na expressão temporal (2.82) e nas expressões espaciais da equação (2.80) e da equação (2.85) remete à equação geodésica, com concisão obtida na redução do número de símbolos e com maior clareza no significado, pelas relações entre os símbolos pelas substituições promovidas. A simplificação é um avanço expressivo em comparação à forma canônica (2.51) da geodésica.

Há uma forma mais direta de apresentar o resultado pela sua coesão com o invariante de velocidade. Na próxima seção, a equação geodésica perde o caráter geométrico para assumir o seu significado mecânico.

2.7.5 Transcrição: Al-Jabr

A equação geodésica na forma canônica da equação (2.51) é uma caracterização geométrica do movimento. Na métrica normalizada, a existência de duas curvaturas principais conjugadas, uma temporal e outra em uma direção espacial, relaciona-se com o conjugado dilatação temporal e contração espacial promovido pelo fator de Lorentz. O significado mecânico da geodésica surge na substituição das expressões paramétricas da métrica, eliminando todos os símbolos geométricos. O entendimento mecânico da geodésica torna-se estabelecido na demonstração de que as equações do movimento satisfazem o invariante de velocidade.

A equação (2.82) pode ser abstraída na expressão $\mathcal{A}^0 + \mathcal{F}^0 = 0$, com os símbolos, para $\dot{x}^0/(\dot{x}^0 \dot{x}_0) = \delta^0/c$, definidos como:

$$\mathcal{A}^0 = \gamma^4 \frac{\mathbf{a}^n \cdot \mathbf{v}_n}{c} \delta^0 \quad \mathcal{F}^0 = \frac{\gamma^4}{\gamma_r^4} \frac{f^n \cdot \mathbf{v}_n}{c} \delta^0 \quad (2.86a)$$

A equação espacial $\gamma^2 a^1 = (\gamma^2/\gamma_r^4) f^1$ é obtida da equação (2.85), em duplicidade, pela modulação necessária. Outra igualdade, $\gamma^4 (a^n \cdot v_n) v^1/c^2 = (\gamma^4/\gamma_r^4) (f^n \cdot v_n) v^1/c^2$, é obtida (2.80). A soma das duas equações em rearranjo, agrupando em termos coordenados e termos métricos em símbolos diferentes, é representada pela soma $\mathcal{A}^1 + \mathcal{F}^1 = 0$, onde os símbolos são definidos como:

$$\mathcal{A}^1 = \gamma^2 a^1 + \gamma^4 \frac{a^n \cdot v_n}{c^2} v^1 \quad \mathcal{F}^1 = \frac{\gamma^2}{\gamma_r^4} f^1 + \frac{\gamma^4}{\gamma_r^4} \frac{f^n \cdot v_n}{c^2} v^1 \quad (2.86b)$$

As dimensões espaciais de índice angular não são influenciadas em magnitude pela métrica e variam em direção pelo movimento da base, mantendo a taxa e variação conforme o invariante.

$$\mathcal{A}^2 = \gamma^2 a^2 + \gamma^4 \frac{a^n \cdot v_n}{c^2} v^2 \quad \mathcal{F}^2 = 0^2 \quad (2.86c)$$

$$\mathcal{A}^3 = \gamma^2 a^3 + \gamma^4 \frac{a^n \cdot v_n}{c^2} v^3 \quad \mathcal{F}^3 = 0^3 \quad (2.86d)$$

O entendimento das relações entre os símbolos distintos e suas dimensões é dado em dois equacionamentos. O primeiro reformula a equação geodésica para os novos símbolos pela derivada total (2.73) do tensor velocidade $V^\mu = \gamma v^\mu$

$$\frac{d}{dt} V^\mu = \mathcal{A}^\mu + \mathcal{F}^\mu = 0 \quad (2.87)$$

A segunda equação é a demonstração da invariância da velocidade $V^\mu V_\mu = c^2$.

$$\frac{d}{dt} (V^\mu V_\mu) = 2 (\mathcal{A}^\mu + \mathcal{F}^\mu) V_\mu = 0 \quad (2.88)$$

O produto é trivialmente nulo pelo resultado da soma, entretanto é possível demonstrar que $\mathcal{A}^\mu V_\mu = 0$, implica que os tensores são ortogonais entre si, assim como a contraparte $\mathcal{F}^\mu V_\mu = 0$.

$$\mathcal{A}^0 V_0 = \gamma^4 (a^n v_n) g_{00} \quad (2.89a)$$

$$\mathcal{A}^k V_k = \gamma^2 a^k v_k + \gamma^4 \frac{(a^n v_n)}{c^2} v^k v_k \quad (2.89b)$$

No produto entre os termos covariante e contravariante, a assinatura da métrica é $(+, +, +, +)$, o sinal é interno à métrica. Da definição de γ , a soma das duas parcelas resulta em:

$$\mathcal{A}^0 V_0 + \mathcal{A}^k V_k = 0 \quad (2.90)$$

Pela igualdade entre os símbolos, o mesmo ocorre em $\mathcal{F}^k$

$$\mathcal{F}^0 V_0 + \mathcal{F}^k V_k = 0 \quad (2.91)$$

A expressão mecânica da geodésica explora a direcionalidade espacial dos tensores. A análise tensorial é simplificada conhecendo-se a direção relativa entre os tensores e a curvatura espacial, o que é visto adiante.

2.7.6 Vis-Radix, Vis-Redux

A métrica normalizada estabelece duas curvaturas principais em reciprocidade, uma espacial e outra em uma direção espacial. Na geodésica, a magnitude da variação na atração é tanto maior quanto maior for o produto $f^n v_n$ em $\dot{\gamma}$. Na dimensão temporal, essa magnitude é dada por $\mathcal{F}^0$.

Entre as dimensões espaciais, apenas uma direção corresponde à contraparte temporal, e na composição com o movimento nem todas as direções estão alinhadas com a direção da curvatura. A direção espacial $\mathcal{F}^1$ combina efeitos da curvatura com os cinéticos, o que torna interessante separar os efeitos de causa métrica dos efeitos de causa cinética. Isso é possível ao fatorar a parcela produtiva em uma operação escalar $\mathcal{F}^1 V_1$, que corresponde a $\mathcal{F}^0 V_0$.

A parcela f^1 da componente espacial $\mathcal{F}^1$ possui intensidade que depende, exceto pelo fator γ , somente da métrica. A parcela complementar possui influência cinemática tanto em magnitude quanto em direção. É proveitoso decompor os efeitos dessa segunda parcela.

O triplo produto dá oportunidade de aplicar a identidade de Grassmann. Na forma vetorial:

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v} \times \vec{a}) = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v})\vec{a} - (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}_1 \quad (2.92)$$

A forma tensorial no espaço plano:

$$\varepsilon^i{}_{mk} v^m (\varepsilon^k{}_{j\ell} v^\ell a^j) = \delta^i{}_j a^j (\delta_{m\ell} v^\ell v^m) - \delta^i{}_\ell v^\ell (\delta_{mj} v^m a^j) \quad (2.93)$$

Aplicando a métrica no produto escalar:

$$\epsilon^i{}_{mk} v^m (\epsilon^k{}_{j\ell} v^\ell a^j) = \delta^i{}_j a^j (g_{m\ell} v^\ell v^m) - \delta^i{}_\ell v^\ell (g_{mj} v^m a^j) \quad (2.94)$$

Os símbolos deltas de Kronecker que representam o produto escalar são substituídos pela presença da métrica. Não há uma substituição equivalente para o símbolo de Levi-Civita. O resultado é indicado por similitude ao produto vetorial, mas, como não há definição para o operador, a expressão por essa operação é unitária.

$$v^1 \otimes (v^k \otimes a^k) = (v^1 v^n g_{1n}) a^k - (v^m \cdot a^n g_{mn}) v^1 \quad (2.95)$$

A recomposição transcrita nos novos termos é sintetizada nas equações:

$$\mathcal{A}^k = \gamma_v^4 a^k + \gamma_v^4 \frac{v^k \otimes (v \otimes a)}{c^2} \quad (2.96a)$$

$$\mathcal{F}^k = \frac{\gamma_v^4}{\gamma_r^4} f^k + \frac{\gamma_v^4}{\gamma_r^4} \frac{v^k \otimes (v \otimes f)}{c^2} \quad (2.96b)$$

Cada símbolo é definido pela soma de dois termos: um principal, resultado da ação do gradiente da métrica em direção e magnitude, é denominado vis-radix; outro, a ação de efeito conjugado, induzida para preservar a invariância da velocidade, é denominado vis-redux.

Análogo ao que acontece com $\dot{\gamma}$, que possui parcela métrica $\partial_k \gamma$ e parcela cinética $\partial_0 \gamma$, a componente espacial da atração $\mathcal{F}^k$ se decompõe em vis-radix, por causa métrica, e em correspondência que o efeito espacial $\mathcal{F}^1 V_1$ tem com o efeito temporal $\mathcal{F}^0 V_0$. Vis-redux ocorre por causa cinética, ou seja, induzido pela velocidade na preservação do seu invariante.

Conforme a curvatura torna-se mais acentuada, a atração torna-se mais intensa, produzindo maior taxa de variação na velocidade. Essa dinâmica contrasta com a existência de uma velocidade limite, que exige uma aceleração assintoticamente decrescente com a evolução da velocidade. O fator métrico γ_r^4 atua na moderação das magnitudes da atração, mas também há indução da mudança de direção para a regulação da taxa de variação.

A análise da dinâmica parte da parcela $v^1 \otimes (v \otimes f)$ do símbolo $\mathcal{F}^1$ pela expansão dos termos:

$$v^1 \otimes (v^k \otimes f^1) = v^1 \times (v^2 \times f^1 + v^3 \times f^1) = u^2 + u^3$$

A coordenada segue a curvatura.

$$v^1 \otimes (v^k \otimes a^1) = v^1 \times (v^2 \times a^1 + v^3 \times a^1) = u^2 + u^3$$

O resultado revela uma situação nova pela introdução de direções estranhas à direção original. A variação de segunda ordem $\mathcal{A}^1$ é vinculada à curvatura $\mathcal{F}^1$. Para preservar o invariante, a resultante induz movimento que transcende a dimensão espacial que ocupa.

Para as direções angulares, tem-se que $f^2 = 0^2$ e $f^3 = 0^3$, e com isso $f^n \cdot v_n = f^1 \cdot v_1$ não tem influência direta no movimento em outras direções, entretanto as velocidades são interdependentes no invariante. Como f é direção fixa, e velocidades são afetadas na mesma proporção, a ação em $v^1 \otimes (v \otimes f)$ preserva a orientação do plano $v^1 \times f$.

Ocorre que f^1 é percorrido com velocidade v^1 que varia conforme a^1 que, em conjunto com a^2 e a^3 , afetam com $\dot{\gamma}$ a variação possível em todo conjunto de velocidades v^n , sem violar o invariante.

Por outro lado, as variações de segunda ordem nas dimensões de índices angulares $\mathcal{A}^2$ e $\mathcal{A}^3$ não são vinculadas diretamente à $\mathcal{F}$. Analisando as expressões, percebe-se que, à medida que a curvatura do espaço torna-se mais intensa, perde-se a expressão de conservação do momento angular canônico por conta do efeito indireto de $\mathcal{F}^1$.

Além da falta de vinculação das componentes coordenadas com $\mathcal{F}$, o que se pode inferir sobre a direção é que, em espaço de curvatura intensa, as componentes $\mathcal{A}^2$ e $\mathcal{A}^3$ não sofrem mudança de plano orbital por efeito de $\mathcal{F}^1$, mas tornam, também, qualquer reorientação de plano indiferente a $\mathcal{F}^1$, contanto que a magnitude continue a mesma. Esse “grau de liberdade” no orbital esférico é interessante na presença de forças ortogonais E^2 , E^3 que ocupem o espaço das direções omissas de $\mathcal{F}$.

Assim, $f^2 = 0$ e $f^3 = 0$, e as componentes são nulas.

$$v^2 \otimes (v^k \otimes a^2) = v^2 \otimes (v^k \otimes f^2) = 0 \quad (2.98a)$$

$$v^3 \otimes (v^k \otimes a^3) = v^3 \otimes (v^k \otimes f^3) = 0 \quad (2.98b)$$

Exceto se por uma ação externa E^k , onde $E^1 = 0^1$, e ocorra $a^2 = E^2$ e $a^3 = E^3$ tal que não se conflite com o produto $\mathcal{A}^\mu V_\mu = 0$, ou seja, por ortogonalidade a ação externa sempre atue perpendicular à velocidade $(E^2 + E^3)V_\mu = 0$, e, além de não interferir na direção principal $E^1 = 0^1$, não induza termos nessa direção.

$$v^2 \otimes (v^k \otimes a^2) = v^2 \times (v^1 \times a^2 + v^3 \times a^2) = w^1 + w^3 \quad (2.99a)$$

$$v^2 \otimes (v^k \otimes a^3) = v^2 \times (v^1 \times a^3 + v^2 \times a^3) = 0 - y^3 \quad (2.99b)$$

$$v^3 \otimes (v^k \otimes a^2) = v^3 \times (v^1 \times a^2 + v^3 \times a^2) = 0 - w^2 \quad (2.99c)$$

$$v^3 \otimes (v^k \otimes a^3) = v^3 \times (v^1 \times a^3 + v^2 \times a^3) = y^1 + y^2 \quad (2.99d)$$

2.8 Covariância

Em física, covariância concerne à transformação difeomórfica de coordenadas em concordância com invariante obtido das equações de Maxwell[68], que motiva a busca por expressões analíticas que descrevam o fenômeno da invariância da velocidade de onda de uma emissão eletromagnética a partir de um corpo em movimento no vácuo[65].

Entre referenciais separados por velocidade constante, o grupo de transformação de Lorentz satisfaz a descrição dos fenômenos eletromagnéticos, e os efeitos da velocidade no espaço e no tempo são interpretados pela Teoria da Relatividade [30], cuja relação entre espaço e tempo é descrita por Minkowski [75] em uma geometria hiperbólica.

No movimento do corpo com velocidade constante, a relação com o invariante eletromagnético é sintetizada pela equação do escalar de Lorentz [63], em notação tensorial é complementada pela métrica de Minkowski, escreve-se como:

$$c^2 = \gamma^2 v^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (2.100)$$

Um grupo de transformações opera a covariância de um sistema se, pela álgebra e cálculo tensorial, a transformação preserva uma expressão que se contrai em um invariante e, além disso, for diferenciável, invertível e sua inversa diferenciável[43].

Para emprego na mecânica, a transformação covariante deve ser a mesma para todas as quantidades relacionadas pelo cálculo. O requisito implica que a transformação de velocidade segue a mesma transformação Λ_α^μ aplicada à coordenada.

$$x^\mu = \Lambda_\alpha^\mu x^\alpha \quad (2.101a)$$

$$v^\mu = \Lambda_\alpha^\mu v^\alpha \quad (2.101b)$$

A transformação deve atender condições de difeomorfismo no cálculo das quantidades tensoriais. Na relação entre posição e velocidade, dado que $v = \dot{x}$, a transformação Λ_α^μ satisfaz a equação:

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} v^{\alpha} = \frac{d}{d\tau} (\Lambda_{\alpha}^{\mu} x^{\alpha}) \quad (2.102)$$

O grupo de transformações de Lorentz é constante diante da operação de derivação, e a demonstração da propriedade algébrica da covariância é elementar em velocidade constante.

A observação empírica do fenômeno da invariância da velocidade nas ondas eletromagnéticas emitidas não se restringe a corpos com velocidade constante. Covariância geral [77] é uma discussão em aberto.¹⁷ Delimita-se a abrangência do assunto identificando como sistema covariante aquele que possui um invariante de movimento e ao menos um grupo de transformação que opera a covariância.¹⁸ Nessa definição, enquadra-se a descrição analítica de sistemas com velocidade variável, como encontrada na gravitação.

A covariância é recepcionada como princípio na formulação do movimento produzido por gravitação.¹⁹ Relatividade Geral [32][31] propõe descrever o movimento de corpos sob influência gravitacional que atendam ao invariante de Lorentz. A teoria ainda enuncia o Princípio da Equivalência, que atribui estado inercial ao movimento, e aceita a covariância das transformações de Lorentz para referenciais inerciais instantaneamente comóveis [58]. A teoria demonstra que é possível equacionar um tensor métrico pelo potencial gravitacional como consequência da relação que a curvatura produzida pela métrica possui com a distribuição de energia-massa em uma trajetória geodésica [49]. A resolução para o tensor métrico é obtida por Schwarzschild [94] para o espaço-tempo.

Nas formulações pelo tensor normalizado, emprega-se o tensor métrico regular [71] para representar a curvatura do espaço-tempo, entretanto a estrutura que se monta é primariamente aplicada ao invariante de velocidade. Entre outras distinções, a covariância é melhor entendida como uma mudança de escala energética do que mudança de coordenada. Em outras palavras, os grupos de transformações covariantes expressam condições cinéticas distintas de observadores pela forma que energia modula as grandezas físicas, dentre elas, coordenadas.

Entende-se que, apesar de preservar a denominação familiar, a mudança de sistema de coordenadas expressa a arbitrariedade na escolha de direções cardinais na decomposição da velocidade. Sendo um fator cinemático, as transformações feitas nessa variável calibram a escala de energia cinética.

Assim, o grupo de transformação de Lorentz expressa conhecimento do ajuste de escala energética entre referenciais inerciais separados por velocidade constante. Uma transformação entre sistemas de coordenadas é um caso elementar em que não se muda escala.

¹⁷O questionamento é se a relatividade geral é a generalização de aceleração, dado que geodésica é um estado inercial. Ou ainda, se basta ser covariante para representar aceleração de referenciais não-inerciais ou deve-se apurar a existência de pseudo-forças locais no acelerômetro do referencial não-inercial.

¹⁸Grupo de transformação aplicado primariamente ao invariante de velocidade, que pela energia cinética modula as grandezas físicas, dentre elas, coordenadas.

¹⁹Covariância possui um correlato matemático no “Princípio da Permanência da Forma”, uma heurística para descoberta de novas estruturas algébricas. Modernamente, em matemática, esse tipo de modalidade foi suplantado por demonstrações rigorosas construídas sobre axiomas.

O binômio invariância e covariância é bipartição de um mesmo sistema de aspecto correlato por perspectivas (e abordagens) complementares. No primeiro, a contração de uma grandeza física pela métrica em um invariável sobre transformação torna os termos participantes da expressão tensores. Nesse critério, a abordagem invariante associada à velocidade aparenta ser mais fundamental, porém, pela própria identidade que se estabelece no invariante, a covariância assume importância pela sua contingência na articulação das formas válidas pela coerência física.²⁰

Se o invariante torna um sistema formalmente apto à covariância, a realização pela existência de um grupo de transformação entre sistemas denota o aspecto conceitual do que expressa o contorno energético. Entre as diversas situações que se possa formular, referenciais inerciais não possuem causas externas ao sistema, situação em que o equilíbrio pela geodésica é considerado intrinsecamente inercial; enquanto que não-inerciais acusam existência de pseudo-forças no acelerômetro local, o motivando a investigação de forças externas, ainda que deslocadas no espaço-tempo, como causas pela absorção, e também as consequentes por emissão, que serão tidas como efeitos. Tais variações energéticas produzem transformações covariantes dependentes do tempo e de como cada observador percebe a energia emitida.

Mudança de sistema de coordenadas é uma transformação que não produz alteração na forma como energia é calculada, assim:

$$\mathcal{L}(\Lambda_m^\mu x^m, \Lambda_m^\mu \dot{x}^m) = \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) \quad (2.103)$$

2.9 Isometria da Base

Pela simetria central da influência gravitacional, o tensor métrico é descrito em coordenadas esféricas. A mudança entre sistemas de coordenadas cartesiano-esférico não possui significado físico, o que implica que não entra na composição do movimento.

Covariância refere-se também às transformações de coordenadas que não se relacionam com o estado de movimento. Mudanças entre sistemas de coordenadas são transformações passivas, não envolvem translação de posição[4][105], e resumem-se a satisfazer a covariância na arbitrariedade da escolha de um sistema de coordenadas. Embora o significado físico seja diferente, a álgebra tensorial da mudança de coordenada é similar ao que é visto na covariância da mudança de referenciais.

Na mudança de coordenadas, é esperado que se preserve a norma do vetor, o que na aplicação mecânica do formalismo tensorial resulta em um invariante físico. Em entendimento matemático, o conceito se confunde com isometria.²¹

Seja $g_{\mu\nu} = J_\mu^\kappa J_\nu^\lambda g_{\kappa\lambda}$, a transformação esférico-cartesiana, a mesma norma é obtida nos dois sistemas de coordenadas.

$$v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = v^\kappa v^\lambda g_{\kappa\lambda} \quad (2.104)$$

²⁰Grupo de transformações assume formas e parâmetros diversos, e implica em uma série de escrutínios da derivada covariante e sincronicidade.

²¹Similaridade puramente algébrica.

A mesma isometria deveria ocorrer nos tensores da base para mudança de coordenada, entretanto, pela sua natureza covariante, a base não se contrai em um invariante, e é improdutivo fabricar um tensor unitário. A base não possui medida para cada elemento, porém um invariante relacionado à base é definido pelo determinante da métrica, que, em certo sentido, metrifica a si mesma. Denomina-se, aqui, isometria da base diante de uma transformação quando essa operação resultar na propriedade da métrica com determinante invariante constante.

A isometria nos vetores da base estende a mesma transformação entre sistemas de coordenadas a todos os vetores de uma mesma posição. O que está implícito na generalização tensorial é a forma paramétrica da transformação, que deve preservar a estrutura isomórfica da derivada.

Para o propósito do texto, isometria é um tipo especial de covariância, e os termos serão empregados de forma intercambiável. Para denotar a transformação entre sistemas de coordenadas, adotamos a convenção notacional de indicar a distinção entre os sistemas pelas letras dos alfabetos latino e grego aplicados aos índices.

$$x^\mu = J_m^\mu x^m \quad (2.105a)$$

$$v^\mu = J_m^\mu v^m \quad (2.105b)$$

A transformação entre sistemas de coordenadas resulta na mesma velocidade sobre variáveis diferentes. O quadro está completo ao observar que a velocidade é variável da gravitação, e sua derivada resulta na equação geodésica.

$$a^\mu = J_m^\mu a^m \quad (2.106)$$

Pretende-se estabelecer que a transformação covariante entre coordenadas J_m^μ , a sua inversa e respectivas derivadas, satisfazem a álgebra da transformação:

$$J_m^\mu a^m = \frac{d}{d\tau}(J_m^\mu) \gamma v^m + J_m^\mu \frac{d}{d\tau}(\gamma v^m) \quad (2.107)$$

Isolando a^m na equação, e sabendo que o primeiro termo da soma torna-se nulo, então o sistema é reduzido à diferencial ordinária $d(\gamma v^m)/d\tau = 0$.

A resolução de uma transformação J_m^μ para a equação pode ser dividida em duas partes. Uma solução candidata, não trivial, é dada por:

$$J_\mu^m \frac{d}{d\tau}(J_m^\mu) = 0_m^m \quad (2.108)$$

O zero não trivial implica ortogonalidade. Na segunda parte, a operação diferencial pela derivada covariante deve transigir as propriedades da transformação covariante J_m^μ encontrada entre os diferentes operandos. No caso da resolução, uma equação concorrente é:

$$\frac{d}{d\tau}v^m = \frac{d}{d\tau}(J_\mu^m v^\mu) \quad (2.109)$$

A derivada introduzida por Ricci e Levi-Civita [87] generaliza a noção de derivada direcional, incluindo na definição da operação o símbolo de Christoffel. O tratamento intrínseco satisfaz a geometria não-euclidiana de Riemann, recebendo a denominação covariante pela propriedade do tensor derivado seguir a mesma variância do tensor primitivo na transformação de variáveis.

O operador é definido pela relação com a variação dos tensores da base. Porém, a derivada covariante não faz distinção entre variação intrínseca do espaço que é variação exclusiva da métrica, e a variação paramétrica, que ocorre pela sua dependência funcional. Uma base fixa de tensores independentes varia apenas pela métrica, enquanto uma base móvel inclui também a variação pelos parâmetros que descrevem a mobilidade.

Os símbolos de Christoffel são definidos como a derivada parcial do tensor da base. A transformação de coordenadas é contravariante à transformação do tensor da base. A variação de um vetor móvel é dada por:

$$\partial_\lambda \hat{e}_\mu = J_{\mu\lambda}^m \hat{e}_m + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \hat{e}_\alpha \quad (2.110)$$

A derivada parcial do tensor da base $\partial_\lambda \hat{e}_\mu$ torna-se o símbolo de Christoffel acrescido do termo $J_{\mu\lambda}^m$, correspondente à variação paramétrica. Esse termo extra permitirá redefinir o operador diferencial.

A transformação dos símbolos de Christoffel entre dois sistemas de coordenadas.

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = J_a^\alpha (J_\lambda^\ell J_\mu^m \Gamma_{m\ell}^a + J_\lambda^\ell \partial_\ell (J_\mu^a)) \quad (2.111)$$

Uma consequência interessante da transformação é que o símbolo Christoffel torna-se covariante somente se:

$$J_\lambda^\ell \partial_\ell (J_\mu^a) = 0_{\mu\lambda}^a \quad (2.112)$$

A equação é trivial para transformação entre duas bases fixas. Entre uma base fixa e outra móvel, a transformação ortonormal produz o mesmo resultado.

Recordando que a mudança de coordenadas não possui significado físico, é esperado que a transformação incorra no rearranjo dos índices, correspondente à mudança de base. O termo extra em $\partial_\lambda \hat{e}_\mu$ permite separar a variação paramétrica da variação intrínseca na definição da operação de derivação. A condição de covariância da transformação entre coordenadas está ligada à ortonormalidade.

3 Cartesiano

A realização da covariância, em sua forma primária, vem com a obtenção da métrica cartesiana. Covariância deve permitir que exista transformação invertível entre sistemas de coordenadas. Como consequência, a transformação revela propriedade sobre a simetria da métrica que terá implicação no entendimento da torção de curvatura.

3.1 Resoluções Preliminares

A conversão é uma realização algébrica: decomposição e recomposição pelas propriedades da restauração e balanceamento.

Considerando que ocorra conversão entre bases $\hat{\mathbf{x}} = \tilde{J}\hat{\mathbf{e}}$, o mesmo deve ocorrer entre as operações bilineares $g(\hat{\mathbf{x}}_\mu, \hat{\mathbf{x}}_\nu) = h_{\mu\nu}$ e $g(\hat{\mathbf{e}}_m, \hat{\mathbf{e}}_n) = \tilde{g}_{mn}$.²² É interessante destacar que a associação entre a operação e o seu produto relaciona tensorialmente a propriedade de comutação e simetria.

A solução parte da abstração geral $h_{\mu\nu} = \tilde{J}_\mu^m \tilde{J}_\nu^n \tilde{g}_{mn}$, mas somente é possível conhecendo-se as propriedades da métrica e da transformação, o que é melhor ilustrado pela peculiaridade do caso particular.

A simplificação da expressão é sempre proveitosa e, não havendo transformação na componente temporal, é possível restringir a demonstração à análise dos índices espaciais. Com isso, a expansão da expressão geral para os termos espaciais:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} = & \tilde{J}_\mu^1 \tilde{J}_\nu^1 \tilde{g}_{11} + \tilde{J}_\mu^2 \tilde{J}_\nu^2 \tilde{g}_{22} + \tilde{J}_\mu^3 \tilde{J}_\nu^3 \tilde{g}_{33} \\ & + \tilde{J}_\mu^1 \tilde{J}_\nu^2 \tilde{g}_{12} + \tilde{J}_\mu^2 \tilde{J}_\nu^1 \tilde{g}_{21} \\ & + \tilde{J}_\mu^2 \tilde{J}_\nu^3 \tilde{g}_{23} + \tilde{J}_\mu^3 \tilde{J}_\nu^2 \tilde{g}_{32} \\ & + \tilde{J}_\mu^3 \tilde{J}_\nu^1 \tilde{g}_{31} + \tilde{J}_\mu^1 \tilde{J}_\nu^3 \tilde{g}_{13} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Identificando a métrica cartesiana $h_{\mu\nu}$, e a esférica por $\tilde{g}_{mn}$, cabe ressaltar que a mudança entre sistema de coordenadas funciona nos dois sentidos, e a expressão da transformação inversa pode ser expressa pela mudança da convenção. Na resolução, a existência de um termo não nulo em um sistema mantém correspondência aos respectivos no outro, enquanto os valores nulos são ambíguos, pois um valor nulo em um dos sistemas pode ocorrer pela nulidade dos termos no outro, ou no cancelamento de opostos. A última proposição é interessante, a existência de elementos em oposição ocorreria se a comutação de índices resultasse em antissimetria, mas se assim o fosse, a propriedade não se aplicaria a todos os elementos. A provocação motiva a exposição. O que se segue ao conflito com a álgebra é que a preferência pela forma analítica da geometria incorre em pressupor a forma algébrica; e ao presumir uma condição, especifica-se implicitamente uma restrição.

Convencionalmente, tem-se que $\tilde{g}_{mn} - \tilde{g}_{nm} = \tilde{0}_{mn}$, métrica da conexão Levi-Civita, entretanto, covariância é mais geral e independente que conexão. Ao adotar a restrição, estamos implicitamente introduzindo, pela preferência de uma definição de espaço, uma propriedade que pode não ser consistente com a álgebra.

Para não recair na arbitrariedade da preferência do espaço, é interessante observar que, se estiver na métrica esférica, a solução tem propriedade de ser indiferente à simetria dos componentes de índices distintos:

$$\tilde{g}_{mn} \pm \tilde{g}_{nm} = \tilde{0}_{mn}; \quad (m \neq n) \quad (3.2^*)$$

²²Sobre a convenção de notação: o interesse está em destacar o contraste entre os sistemas de coordenadas. Adota-se índices em letras do alfabeto grego para o sistema cartesiano $g_{\mu\nu}$ e romano para esféricos g_{mn} . No índice numérico, e.g. g_{11} e $\tilde{g}_{11}$, bem como na mesclagem de índices, e.g. $\tilde{J}_\mu^m J_m^\mu$, a presença ou ausência do diacrítico remete ao emprego em relação à base esférica ou cartesiana.

Naturalmente, apenas uma forma é válida, mas é interessante observar que a métrica esférica é indenpendete da simetria dos termos da métrica de índices distintos $m \neq n \implies g_{mn} = \tilde{0}_{mn}$. Ao ponderar que a transformação inversa recairá na mesma questão, mas com componentes espaciais cartesianas na forma $\mu \neq \nu \implies h_{\mu\nu} \neq 0_{\mu\nu}$, o resultado terá a forma:

$$\mu \neq \nu \implies h_{\mu\nu} + h_{\nu\mu} = 0_{\mu\nu}; \quad (3.3)$$

Pela generalidade da resolução cartesiana, faz-se a contingência de que a expressão não seja trivialmente nula, portanto, diferente do que ocorre no caso esférico.

A condição de antissimetria é estrita aos termos em que $\mu \neq \nu$, deixando os termos $\mu = \nu$ com a simetria originária. O tensor cartesiano não possui propriedade simétrica total, mas ainda assim é definido por partes fixas e consistentemente identificáveis. Uma designação apropriada possui uma “assinatura” simétrica característica, que para o propósito do texto se denominará ambissimétrica.

Tal situação é tratável pela definição de propriedades adequadas, mas abre um precedente sobre a simetria do tensor.

Enquanto a métrica esférica é estritamente simétrica, a métrica cartesiana, obtida por transformação covariante, não é nem exclusivamente simétrica, nem exclusivamente antissimétrica. Apesar de incomum, é aceitável que a métrica esférica, pelo posto por (3.2*), tenha a mesma simetria da métrica cartesiana. Porém, o que é mais razoável é que a transformação covariante mude a propriedade simétrica do tensor. Entretanto, transformação não tem a propriedade operativa de alterar a “assinatura” da simetria.

A situação de impasse é resolvida no refinamento algébrico iniciado ao presupor a operação de conversão bilinear da base. A condição paraconsistente adia a síntese até que a resolução elimine ambiguidades para então achar a condição de conformidade, reformulando alguma das premissas.

Prosseguindo a demonstração, a substituição dos valores conhecidos da métrica esférica normalizada, dado por (2.42a) até (2.42e), e as definições de J_m^μ em (2.12) podem ser, pela associatividade pretendida, agrupadas de acordo com a similaridade dos índices.

Para ($\mu = \nu$), a associação entre os índice similares revela que:

$$\begin{aligned} h_{\kappa\kappa} = & \tilde{J}_\kappa^1 \tilde{J}_\kappa^1 \tilde{g}_{11} + \tilde{J}_\kappa^2 \tilde{J}_\kappa^2 \tilde{g}_{22} + \tilde{J}_\kappa^3 \tilde{J}_\kappa^3 \tilde{g}_{33} \\ & + \tilde{J}_\kappa^1 \tilde{J}_\kappa^2 (\tilde{g}_{12} + \tilde{g}_{21}) \\ & + \tilde{J}_\kappa^2 \tilde{J}_\kappa^3 (\tilde{g}_{23} + \tilde{g}_{32}) \\ & + \tilde{J}_\kappa^3 \tilde{J}_\kappa^1 (\tilde{g}_{31} + \tilde{g}_{13}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ponderando pela similaridade que a expressão possui nos dois sentidos de conversão, nos termos agrupados pela associativa, o cancelamento é circunstancial em esféricas, pela trivialidade dos valores definidos em (2.42e), enquanto que em cartesianas advém de propriedade estrutural.

Seguido com as substituições particulares desse primeiro caso, e tomando o primeiro índice espacial, com $B = 1 + \mu/(c^2 r)$, tem-se:

$$h_{11} = \tilde{J}_1^1 \tilde{J}_1^1 \tilde{g}_{11} + \tilde{J}_1^2 \tilde{J}_1^2 \tilde{g}_{22} + \tilde{J}_1^3 \tilde{J}_1^3 \tilde{g}_{33} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \delta^{11} h_{11} &= (\sin \theta \cos \varphi)^2 B + (\cos \theta \cos \varphi)^2 + (-\sin \varphi)^2 \\ &= (\sin \theta \cos \varphi)^2 (B - 1) + (\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\cos \theta \cos \varphi)^2 + (-\sin \varphi)^2 \\ &= (x \cdot \rho)(x \cdot \rho)(B - 1) + 1 \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma para as outras componente métricas de índices iguais, as expressões resultantes da transformação são resumidas em:

$$\delta^{11} h_{11} = (x \cdot \rho)(x \cdot \rho)(B - 1) + 1 \quad (3.6a)$$

$$\delta^{22} h_{22} = (y \cdot \rho)(y \cdot \rho)(B - 1) + 1 \quad (3.6b)$$

$$\delta^{33} h_{33} = (z \cdot \rho)(z \cdot \rho)(B - 1) + 1 \quad (3.6c)$$

Para índices distintos ($\mu \neq \nu$), os termos associativos produzem outro equacionamento. As definições para a métrica esférica são nulas, entretanto o mesmo não deve acontecer com a métrica cartesiana. É interessante destacar que na transformação inversa de (3.4), embora $h_{\mu\nu} \neq 0$, a antissimetria anula-se na contração de índices quando associativos em uma soma pela oposição do sinal. O contraste está em não ser possível replicar o mesmo procedimento na nova situação que se forma em:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \tilde{J}_\mu^1 \tilde{J}_\nu^1 \tilde{g}_{11} + \tilde{J}_\mu^2 \tilde{J}_\nu^2 \tilde{g}_{22} + \tilde{J}_\mu^3 \tilde{J}_\nu^3 \tilde{g}_{33} \\ &\quad + (\tilde{J}_\mu^1 \tilde{J}_\nu^2 - \tilde{J}_\mu^2 \tilde{J}_\nu^1) \tilde{g}_{12} \\ &\quad + (\tilde{J}_\mu^2 \tilde{J}_\nu^3 - \tilde{J}_\mu^3 \tilde{J}_\nu^2) \tilde{g}_{23} \\ &\quad + (\tilde{J}_\mu^3 \tilde{J}_\nu^1 - \tilde{J}_\mu^1 \tilde{J}_\nu^3) \tilde{g}_{31} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para ser condizente com as definições sistêmicas $h_{\mu\nu} + h_{\nu\mu} = 0_{\mu\nu}$ quando $\mu \neq \nu$, duas questões emergem: uma relacionada com a expressão de transformação direta; e outra pela consideração da reversa. A transformação direta precisa produzir uma métrica antissimétrica a partir de outra simétrica; a expressão inversa deve eliminar os termos antissimétricos.

No caso da transformação direta por (3.7), da métrica simétrica para a ambissimétrica, é possível resolver apenas metade das componentes com as definições dadas até aqui. A situação torna-se paraconsistente, pode-se estimar os antissimétricos exatamente por causa dessa propriedade. Nas expressões provisórias, o próprio resultado da transformação sugere como a antissimetria é estabelecida operativamente, ou seja, uma forma consistente de expressar a antissimetria, o que será apresentado adiante pela identidade de Binet-Cauchy.

No caso da expressão reversa de (3.7), não ocorrem os cancelamentos entre os termos antissimétricos, como destacados anteriormente em (3.4). Das substituições pela métrica esférica normalizada (2.42a) até (2.42e), chega-se a:

$$|\varepsilon^{12}|h_{12}=(x \cdot \rho)(y \cdot \rho)(B-1) \quad (3.8a)$$

$$+ |\varepsilon^{23}|(\cos \theta)\tilde{g}_{23} + |\varepsilon^{31}|(-\sin \theta)\tilde{g}_{31}$$

$$|\varepsilon^{23}|h_{23}=(y \cdot \rho)(z \cdot \rho)(B-1) \quad (3.8b)$$

$$+ |\varepsilon^{12}|(-\sin \varphi)\tilde{g}_{12} + |\varepsilon^{23}|(\sin \theta \cos \varphi)\tilde{g}_{23} + |\varepsilon^{31}|(\cos \theta \cos \varphi)\tilde{g}_{31}$$

$$|\varepsilon^{31}|h_{31}=(z \cdot \rho)(x \cdot \rho)(B-1) \quad (3.8c)$$

$$+ |\varepsilon^{12}|(\cos \varphi)\tilde{g}_{12} + |\varepsilon^{23}|(\sin \theta \sin \varphi)\tilde{g}_{23} + |\varepsilon^{31}|(\cos \theta \sin \varphi)\tilde{g}_{31}$$

A organização em arranjo matricial revela que seguem o padrão sistêmico dos índices. A substituição revela, fora da trivialidade, tensores ortogonais.

$$\begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\varepsilon^{23}|\tilde{g}_{23} \\ |\varepsilon^{31}|\tilde{g}_{31} \\ |\varepsilon^{12}|\tilde{g}_{12} \end{bmatrix} = 0_{mn} \quad (3.9)$$

A coincidência com (2.12) decorre das propriedades.²³ Para a conversão de esférico-cartesiana, o sistema é homogêneo:

$$\begin{vmatrix} \tilde{J}_\mu^m & \tilde{J}_\nu^n \\ \tilde{J}_\mu^\mu & \tilde{J}_\nu^\nu \end{vmatrix} \tilde{g}_{mn} = (\tilde{J}_\mu^m \tilde{J}_\nu^n - \tilde{J}_\mu^\mu \tilde{J}_\nu^\nu) \tilde{g}_{mn} = 0_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

O sistema linear homogêneo é acidental na transformação de esféricas para cartesianas. A forma geral é:

$$\begin{vmatrix} \tilde{J}_\mu^m & \tilde{J}_\nu^n \\ \tilde{J}_\mu^\mu & \tilde{J}_\nu^\nu \end{vmatrix} \tilde{g}_{mn} = h_{\mu\nu} - \tilde{J}_\mu^k \tilde{J}_\nu^k \tilde{g}_{kk} \quad (3.11)$$

O que é expandido em:

$$\begin{bmatrix} (J_2^2 J_3^3 - J_2^3 J_3^2) & (J_2^3 J_3^1 - J_2^1 J_3^3) & (J_2^1 J_3^2 - J_2^2 J_3^1) \\ (\tilde{J}_3^2 \tilde{J}_1^3 - \tilde{J}_3^3 \tilde{J}_1^2) & (\tilde{J}_3^3 \tilde{J}_1^1 - \tilde{J}_3^1 \tilde{J}_1^3) & (\tilde{J}_3^1 \tilde{J}_1^2 - \tilde{J}_3^2 \tilde{J}_1^1) \\ (\tilde{J}_1^2 \tilde{J}_2^3 - \tilde{J}_1^3 \tilde{J}_2^2) & (\tilde{J}_1^3 \tilde{J}_2^1 - \tilde{J}_1^1 \tilde{J}_2^3) & (\tilde{J}_1^1 \tilde{J}_2^2 - \tilde{J}_1^2 \tilde{J}_2^1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\varepsilon^{23}|\tilde{g}_{23} \\ |\varepsilon^{31}|\tilde{g}_{31} \\ |\varepsilon^{12}|\tilde{g}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\varepsilon^{23}|(h_{23} - \tilde{J}_2^k \tilde{J}_3^k \tilde{g}_{kk}) \\ |\varepsilon^{31}|(h_{31} - \tilde{J}_3^k \tilde{J}_1^k \tilde{g}_{kk}) \\ |\varepsilon^{12}|(h_{12} - \tilde{J}_1^k \tilde{J}_2^k \tilde{g}_{kk}) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Essa expressão sugere que a métrica em esféricas, ao que foi posto em (3.2*), teria a mesma simetria a cartesianas, não fossem os termos nulos.

$$m = n \implies \tilde{g}_{mn} - \tilde{g}_{nm} = \tilde{0}_{mn} \quad (3.13a)$$

$$m \neq u \implies \tilde{g}_{mn} + \tilde{g}_{nm} = \tilde{0}_{mn} \quad (3.13b)$$

Então, poderia-se considerar a transformação dos elementos de (3.13b).

²³Matriz ortogonal, aquela que é igual à própria matriz dos cofatores. Lembrando que o arranjo matricial de tensores é sempre um recurso de apresentação (notação), não garante propriedades. Neste caso, a substituição da propriedade matricial é imprópria, dado que ignora a combinação dos índices tensoriais.

$$(\tilde{J}_\mu^m \tilde{J}_\nu^n \tilde{g}_{mn}) + (\tilde{J}_\nu^n \tilde{J}_\mu^m \tilde{g}_{nm}) = \tilde{0}_{\nu\mu} \quad (3.14)$$

O que satisfaz:

$$(\tilde{J}_\mu^m \tilde{J}_\nu^n - \tilde{J}_\nu^n \tilde{J}_\mu^m) \tilde{g}_{mn} = \tilde{0}_{\nu\mu} \quad (3.15)$$

A expressão em reverso, de cartesiano para esférico, segue a mesma equação (3.12), mas com a mudança da convenção entre os símbolos.

Ao retomar as substituições indicadas em (3.8a) até (3.8c), ao contrário do que foi exposto no caso simétrico, no qual a covariância dos índices foi assinada pelos símbolos delta de Dirac nas expressões antissimétricas, devido à sua atuação em índices distintos, utiliza-se o símbolo de Levi-Civita. Entretanto, o símbolo é introduzido em módulo, condizente com as operações contidas na expressão. A ideia de que o símbolo deve condizer com a operação é sugestiva em como expressar a antissimetria.

A conversão não faz distinção de simetria, o que será elaborado adiante, entretanto, é possível apresentar um elemento de cada par assimétrico da métrica aplicando a identidade de Binet-Cauchy para os vetores da base.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \equiv (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (3.16)$$

Assim, por substituição direta dos vetores unitários, pode-se chegar a:

$$(\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\rho}) = (\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{y}})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\rho}) + 0 = \begin{vmatrix} \mathbf{r} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{x} \cdot \mathbf{r} \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

A indicação do determinante sugere uma representação mais compacta. Denotando $(\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} = \hat{\rho}_x$,²⁴ pode-se interpretar a identidade para a base como:

$$(\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\rho}) = \|\hat{\rho}_x \times \hat{\rho}_y\| \quad (3.18)$$

Observando que $\|\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}\| = 1$, é simples constatar a igualdade entre os produtos, entretanto o valor absoluto evita que a comutatividade da operação expresse o antissimétrico. Introduzir a alternância de sinal por $-\|\hat{\rho}_y \times \hat{\rho}_x\|$ parece viável, mas ignora a maneira própria que a operação comuta.

Tanto a simetria quanto a comutatividade são inesperadas na definição original de $\tilde{J}_\mu^m$, pois concerne apenas a um operando em (2.12). O conflito em obter os termos antissimétricos decorre do fato de que o tensor métrico é operado duplamente pela transformação. O desenvolvimento, até então, aponta que uma resolução parte da escolha da estrutura algébrica e resolve-se na mudança de representação na operação bilinear, considerando ainda que deve viabilizar a transformação covariante.

Até então, não foi enunciado um motivo intrínseco para que o bilinear possua o comportamento ambissimétrico²⁵, apenas as condições que se estabelecem

²⁴Na projeção, o vetor deixa de ser unitário, mas a preservação do diacrítico evita confusão com a projeção pelo vetor não unitário.

²⁵Considerando que a forma ambissimétrica em esférica é degenerada, do exposto em (3.13a) e (3.13b)

por covariância. É preciso explicitar o que fundamenta a necessidade de ambissimetria. O que será visto adiante, a caracterização métrica que contribui para o invariante vem de como os efeitos cinemáticos seguem rotação hiperbólica pela conjugação das curvaturas do espaço e tempo, e as propriedades operativas que produzem ambissimetria.

Enquanto a simplicidade da forma esférica proporciona resoluções diretas, as expressões cartesianas revelam uma estrutura interessante na análise do espaço-tempo. O que não é aparente na forma esférica é como as direções se decompõem na operação bilinear.

Sendo assim, é produtivo obter uma representação da métrica que atenda às propriedades de simetria, a despeito da transformação. A simetria dos termos não-diagonais da métrica é resolvida ao substituir diretamente pela forma vetorial:

$$(\hat{\rho} \times \hat{x}) \cdot (\hat{y} \times \hat{\rho}) \rightarrow \hat{\rho}_x \times \hat{\rho}_y \quad (3.19)$$

A operação vetorial resulta em um elemento direcional, alterando, com isso, a concepção da métrica. Ponderando que a métrica expressa a relação entre os tensores da base pela decomposição nos produtos escalar e vetorial, não é estranho admitir que a métrica contenha tanto elementos direcionais quanto escalares. A forma direcional possui mais recursos de operações, o que será proveitoso em uma condição tensorial mais geral que as operações elementares de transformação entre coordenadas.

A conversão fornece a forma geral da métrica. Provisoriamente, as componentes cartesianas são:

$$h_{11} = \hat{\rho}_1 \cdot \hat{\rho}_1 (B - 1) + \delta_{11} \quad (3.20a)$$

$$h_{22} = \hat{\rho}_2 \cdot \hat{\rho}_2 (B - 1) + \delta_{22} \quad (3.20b)$$

$$h_{33} = \hat{\rho}_3 \cdot \hat{\rho}_3 (B - 1) + \delta_{33} \quad (3.20c)$$

$$h_{12} = \hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_2 (B - 1) \quad (3.20d)$$

$$h_{23} = \hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3 (B - 1) \quad (3.20e)$$

$$h_{31} = \hat{\rho}_3 \times \hat{\rho}_1 (B - 1) \quad (3.20f)$$

$$h_{21} = \hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_1 (B - 1) \quad (3.20g)$$

$$h_{32} = \hat{\rho}_3 \times \hat{\rho}_2 (B - 1) \quad (3.20h)$$

$$h_{13} = \hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_3 (B - 1) \quad (3.20i)$$

Uma condição tensorial mais geral é proposta ao demonstrar que a forma cartesiana satisfaz a rotação hiperbólica, realizando, dessa forma, a equivalência com a forma esférica.

A transformação covariante é retomada na ocasião de outros tensores, com interesse em particular na conexão.

3.2 Rotação Hiperbólica e Projeção Diedral

O espaço-tempo, proposto por Minkowski[75], em sua descrição sobre a contração do espaço e a dilatação do tempo por efeitos cinemáticos, segue um modelo

hiperbólico. Métrica normalizada generaliza essa proposta por uma dinâmica que, presente no espaço curvo, promove a continuidade variacional do invariante de velocidade: rotação hiperbólica.

Depreende-se desse modelo que a contração do espaço e dilatação do tempo são ocorrências conjugadas, sendo que as variações ocorrem na proporção inversa.

Apesar dos efeitos no espaço, a principal condição é que a velocidade transforme-se por rotação segundo o invariante hiperbolóide, e permanece nessa condição por transformações igualmente hiperbólicas. Assim, existindo aceleração, a variação da velocidade segue movimento hiperbólico[5], o que pode ser constatado na comparação por transformação de Lorentz: ou pela mudança para um referencial comóvel, ou na adição de velocidade[58] em um instantâneo.

O ponto crítico da descrição é apontar que há transformações hiperbólicas na ausência de curvatura hiperbólica, para evidenciar que concernem primariamente à velocidade. Com isso, a métrica normalizada, igualmente, concerne à velocidade.

O produto interno com assinatura hiperbólica [74], elaboração originada no plano complexo proposto por Poincaré[84], é hiperbólica na assinatura, mas plana na curvatura. Tensor métrico normalizado é antes o espaço das rotações hiperbólicas, do que o espaço de curvatura hiperbólica.

3.2.1 Projeção Ortogonal

Projeção concerne aos termos espaciais e é útil na caracterização da direcionalidade, como também na decomposição da base em operações, como em (2.7).

Operação de projeção vetorial, em uma direção $\hat{\rho}$, e a operação rejeição vetorial, em relação à mesma direção, são complementares.

$$\hat{\mathbf{x}} = \text{Proj}_{\hat{\rho}}(\hat{\mathbf{x}}) + \text{Rej}_{\hat{\rho}}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (3.21)$$

Uma forma mais elaborada, pode-se dispor em arranjo matricial para a decomposição $\hat{\rho}_x^2 + \hat{\rho}_y^2 + \hat{\rho}_z^2 = 1$.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_x^2 & \hat{\rho}_x \hat{\rho}_y & \hat{\rho}_x \hat{\rho}_z \\ \hat{\rho}_y \hat{\rho}_x & \hat{\rho}_y^2 & \hat{\rho}_y \hat{\rho}_z \\ \hat{\rho}_z \hat{\rho}_x & \hat{\rho}_z \hat{\rho}_y & \hat{\rho}_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\rho}_y^2 + \hat{\rho}_z^2 & -\hat{\rho}_x \hat{\rho}_y & -\hat{\rho}_x \hat{\rho}_z \\ -\hat{\rho}_y \hat{\rho}_x & \hat{\rho}_z^2 + \hat{\rho}_x^2 & -\hat{\rho}_y \hat{\rho}_z \\ -\hat{\rho}_z \hat{\rho}_x & -\hat{\rho}_z \hat{\rho}_y & \hat{\rho}_x^2 + \hat{\rho}_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

É possível abstrair na forma matricial:

$$I_{ij} = [\text{Proj}]_{ij} + [\text{Rej}]_{ij} \quad (3.23)$$

Entretanto, em um refinamento subsequente, pode-se querer compor por operações vetoriais ordinárias,²⁶ obtendo-se o contraexemplo:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\rho}_x \cdot \hat{\rho}_x & \hat{\rho}_x \cdot \hat{\rho}_y & \hat{\rho}_x \cdot \hat{\rho}_z \\ \hat{\rho}_y \cdot \hat{\rho}_x & \hat{\rho}_y \cdot \hat{\rho}_y & \hat{\rho}_y \cdot \hat{\rho}_z \\ \hat{\rho}_z \cdot \hat{\rho}_x & \hat{\rho}_z \cdot \hat{\rho}_y & \hat{\rho}_z \cdot \hat{\rho}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\rho}_y^2 + \hat{\rho}_z^2 & -\hat{\rho}_x \cdot \hat{\rho}_y & -\hat{\rho}_x \cdot \hat{\rho}_z \\ -\hat{\rho}_y \cdot \hat{\rho}_x & \hat{\rho}_z^2 + \hat{\rho}_x^2 & -\hat{\rho}_y \cdot \hat{\rho}_z \\ -\hat{\rho}_z \cdot \hat{\rho}_x & -\hat{\rho}_z \cdot \hat{\rho}_y & \hat{\rho}_x^2 + \hat{\rho}_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24^*)$$

²⁶A intenção é relacionar com as equações (3.20a) até (3.20i).

A estranheza está no fato de que o produto escalar que realiza a projeção escalar,²⁷ pode ser aplicado individualmente na projeção vetorial, no caso $(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\boldsymbol{\rho}}$, mas as operações combinadas em um arranjo matricial²⁸ não formam uma matriz de projeção.

Os termos fora da diagonal são projeções escalares, e é notável que:

$$1 = \hat{\boldsymbol{\rho}}_x^2 + \hat{\boldsymbol{\rho}}_y^2 + \hat{\boldsymbol{\rho}}_z^2 \quad (3.25a)$$

$$0 = \hat{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_j = \hat{\boldsymbol{\rho}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_i \quad (3.25b)$$

Embora seja viável conferir à realização das operações ordinárias uma expressão matricial, e mesmo contando com a propriedade de complementaridade entre as matrizes, sustentadas pela identidade (3.25a), a disposição matricial não se caracteriza como um operador de projeção, apesar da equivalência do resultado específico.

A operação projeção deve ser idempotente, o que implica, abstratamente, que as matrizes satisfazem, abstratamente, as propriedades:

$$P^2 = P \quad P = -R^2 \quad PR = RP = R \quad (3.26)$$

Ignorando-se, por enquanto, a relação pretendida entre o produto escalar e a matriz, pode-se definir um operador que realize as operações elementares para composição da projeção em (3.22).

$$\langle \hat{\boldsymbol{\rho}}_i, \hat{\boldsymbol{\rho}}_j \rangle = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_j & (i = j); \\ \|\hat{\boldsymbol{\rho}}_i \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_j\| & (i \neq j); \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\langle \hat{\boldsymbol{\rho}}_i, \hat{\boldsymbol{\rho}}_j \rangle \geq 0 \quad (3.28)$$

A operação pode ser descrita como o produto das magnitudes dos vetores, e a definição, um tanto incomum, pretende evidenciar a maneira como a comutatividade da operação se relaciona à simetria (ou falta dela) quando agrupada em arranjo matricial.

Os termos assimétricos seguem a identidade Binet-Cauchy da equação (3.18) para a base definida para a métrica.

O operador é definido para operandos ortonormais. A mesma elaboração da base pode ser replicada para definição das componentes vetoriais, observando-se essa mesma condição.

$$\tilde{P}^{ij} = \frac{\langle v^i, v^j \rangle}{v^2} \quad (3.29)$$

3.2.2 Minkowski

Transformação de Lorentz promove, no movimento inercial em espaço plano, a rotação hiperbólica entre as variáveis de dimensão temporal e a variável de dimensão espacial na direção espacial da velocidade desenvolvida.

²⁷É interessante mencionar a origem do produto vetorial no produto de quatérnions e posterior reformulação por Gibbs[18]

²⁸Matriz de Gram expressa a independência linear.

A métrica Minkowski não é dotada de curvatura, mas ainda assim, pela representação da assinatura, revela padrão de deformação do espaço-tempo em que ocorre dilatação do tempo mediante contração do espaço em virtude da magnitude da velocidade.

O ponto crítico é observar que as deformações ocorrem pela necessidade de conformidade da velocidade com o rotação hiperbólica. Dito de outra forma, o essencial é que a assinatura condicione o invariante hiperbólico da velocidade, o colateral é o efeito do espaço-tempo.

A complementaridade pela conjugação do espaço-tempo na assinatura da métrica resulta na forma invariante como a velocidade se modifica, o que é demonstrável nas transformações de Lorentz.

A transformação de Lorentz é dada pela expressão: ²⁹

$$\begin{aligned}\Lambda_\nu^\mu &= I_\nu^\mu + (\gamma - 1) \frac{\langle \beta^\mu, \beta_\nu \rangle}{\beta^2} \\ &= \gamma \frac{\langle \beta^\mu, \beta_\nu \rangle}{\beta^2} + \left(I_\nu^\mu - \frac{\langle \beta^\mu, \beta_\nu \rangle}{\beta^2} \right)\end{aligned}\quad (3.30)$$

A motivação do rearranjo é relacionar com a identidade de projeção e rejeição $I_\nu^\mu = \tilde{P}_\nu^\mu + \tilde{R}_\nu^\mu$. A definição de $\tilde{P}_\nu^\mu$ estende a expressão em (3.29) para abranger a componente temporal, e a expressão de rejeição $\tilde{R}_\nu^\mu$ é deduzida da identidade.

$$\tilde{P}_\nu^\mu = \frac{\langle \beta^\mu, \beta_\nu \rangle}{\beta^2} \quad (3.31)$$

$$\tilde{R}_\nu^\mu = I_\nu^\mu - \tilde{P}_\nu^\mu \quad (3.32)$$

A decomposição nas operações em projeção e rejeição evidencia a direcionalidade espacial da deformação pelo fator de Lorentz.

$$\Lambda_j^i = \gamma \tilde{P}_j^i + \tilde{R}_j^i \quad (3.33)$$

Embora exposto, o alinhamento direcional da deformação não deixa explícito como a direção projetada participa em rotação hiperbólica, e o fator γ aplica-se de forma indiscriminada por toda projeção.

A decomposição ³⁰ da transformação de Lorentz Λ_j^i na rotação hiperbólica $\mathcal{H}_\ell^r$ por rotação ordinária da direção toma a forma: ³¹

$$\Lambda_j^i = \tilde{\mathcal{R}}_r^i \mathcal{H}_\ell^r \mathcal{R}_j^\ell \quad (3.34)$$

A rotação circular equivale à mudança de sistema de coordenadas, e a decomposição em projeção pode ser alinhada para obter rejeição nula.

A rotação hiperbólica na transformação de Lorentz é dada por:

²⁹Tomando a definição de Kopeikin-Efroimsky-Kaplan [58] e reagrupando o termo temporal com os termos espaciais e mistos das eqs. (2.82a) a (2.82d) em uma única expressão matricial.

³⁰A mesma expressão é feita por rotação em [66], eq. (13)

³¹Rotacionado de forma que $\tilde{\mathcal{R}}_r^i \mathcal{H}_\ell^r \mathcal{R}_j^\ell = 0_j^i$.

$$\mathcal{H}_\ell^r = \begin{bmatrix} (A + 1/A)/2 & -(A - 1/A)/2 & 0 & 0 \\ -(A - 1/A)/2 & (A + 1/A)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Fazendo $A = e^\alpha$, chega-se às funções trigonométricas hiperbólicas, convencionalmente consideradas em substituições $\gamma_v = \cosh \alpha$ e $\gamma_v \beta_v = \sinh \alpha$.

Na composição das componentes, as expressões na variável A permitem evidenciar o núcleo da transformação $\hat{\mathcal{H}}$, denominado hiperbólica canônica,³² pelo rearranjo entre os eixos espacial e temporal:

$$\mathcal{H}_\ell^r = \Pi_a^r \hat{\mathcal{H}}_b^a \Pi_b^r$$

$$\mathcal{H}_\ell^r = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) & 0 & 0 \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A rotação hiperbólica canônica é assemelhada à forma esférica da métrica normalizada, com $B = 1/A$.³³

Entretanto, além da assinatura, verifica-se o intercâmbio entre os eixos temporal e espacial, o que torna a transformação hiperbólica canônica conceitualmente distinta: existem duas maneiras pelas quais a rotação hiperbólica influencia o resultado da operação.

Na transformação de Lorentz, a rotação hiperbólica ocorre de modo que a grandeza sob o índice espacial nunca seja maior (em módulo) que a grandeza sob índice temporal.

Na rotação hiperbólica pela métrica, a dilatação que ocorre sobre a dimensão temporal se realiza como contrapartida na contração que ocorre na dimensão espacial (e vice-versa).

Os resultados dessa seção são cardinais no entendimento conceitual da métrica normalizada, o que será desenvolvido no restante do texto. O primeiro passo consiste em conciliar a transformação covariante entre os sistemas de coordenadas.

Transformações de Lorentz concernem mudanças por efeitos cinemáticos dos elementos contravariantes da velocidade, enquanto as transformações pela métrica são relacionadas ao comportamento da base covariante. O mesmo conceito de rotação hiperbólica é aplicável à métrica, entretanto pela mudança da forma hiperbólica e aplicação covariante. A forma de projeção passa a ser:

$$g_{ij} = BP_{ij} + R_{ij} \quad (3.37)$$

O processo apresenta rotação hiperbólica como a condição geral que se faz necessária para representar a variação do tensor velocidade. O resultado independe da escolha de sistema de coordenadas, uma vez que a parte indesejada é eliminada nas transformações por rotação circular.

³²A denominação é específica desse texto.

³³Rotação hiperbólica na forma canônica destaca duas “curvaturas”: uma temporal e outra espacial. Entretanto, o mesmo efeito é possível por causas diferentes: enquanto para transformação de Lorentz, $A = e^\alpha$ é um termo exato no espaço plano, para a métrica, $g_{00} = e^\alpha$ é apenas uma “boa aproximação em campo fraco” se (2.42a) for considerado a forma correta.

Anteriormente, na sec. 3.1, mudança de sistema de coordenadas impasse pelo embaraço causado pelas propriedades de simetria não expressa pela transformação. Mudanças entre sistemas de coordenadas consistem em decomposição em um sistema e recomposição em outro, em que as bases são relacionadas por rotação circular.

$$\hat{\mathbf{e}}_m = R_x(\pi/2) \cdot R_y(\pi/2 - \theta) \cdot R_z(-\varphi) \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mu \quad (3.38)$$

A decomposição em Projeção e Rejeição é autoconsistente nas definições das propriedades. A exigência feita é uma definição de operação bilinear condizente.

A seção seguinte, a definição de um novo operador bilinear, condizente com a decomposição em projeção e rejeição, encontra a forma cartesiana do tensor métrico normalizado, que, pela natureza autoconsistente da decomposição, torna-se a expressão definitiva.

3.2.3 Projeção Diedral

A projeção ortogonal em (3.29) é definida pelo produto (3.27) com propriedade comutativa, obtendo, com isso, a propriedade simétrica dos termos, relevante na demonstração da transformação de Lorentz.

A definição similar para uma projeção com antissimetria dos termos de índices distintos serviria às propriedades simétricas do tensor normalizado cartesiano, (3.20a) até (3.20i). O impasse de uma projeção com esta propriedade está em obter a idempotência.

A insuficiência está na limitação da álgebra, o que é resolvido na mudança na definição do produto elementar. Denomina-se a nova definição projeção diedral³⁴ para base de operandos ortogonais.³⁵

$$\langle \hat{\rho}_i, \hat{\rho}_j \rangle = \begin{cases} \hat{\rho}_i \cdot \hat{\rho}_j, & (i = j); \\ \vec{q}^k \cdot \varepsilon_k^{ij} \cdot \delta_i^a \hat{\rho}_a \cdot \delta_j^b \hat{\rho}_b, & (i \neq j, \vec{q}^k \in \mathbb{D}). \end{cases} \quad (3.39)$$

A operação é definida em peças. Na primeira, a comutatividade produz escalar em simetria, enquanto na segunda a anticomutatividade produz assimetria e um vetor orientado.

A operação pode ser descrita como o produto misto, resultando tanto em escalares quanto em vetores.

Relaciona-se com a identidade Binet-Cauchy aplicada à base ortogonal em (3.18).

$$\langle \hat{u}_i, \hat{u}^j \rangle = |\varepsilon_k^i{}_j q^k \langle \hat{\mathbf{u}}_i, \hat{\mathbf{u}}^j \rangle| \quad (3.40)$$

Generalidades sobre Projeção e Rejeição na manipulação de índices, produtiva em expressões tensoriais.

³⁴Na ortogonal, a projeção linear é sintetizada no alinhamento pelo eixo com $\langle \hat{\rho}_i, \hat{\rho}_j \rangle \geq 0$. Na diedral, projeção é orientada e decomposta tridimensionalmente entre o eixo e as direções de intersecção em planos diedrais.

³⁵ Os números $\vec{q}^k$ são unidades imaginárias, que satisfazem a álgebra anticomutativa do diedral, um complemento de orientação. Ver: (4.2)

$$R_{ij}v^j = I_{ij}v^j - P_{ij}v^j \quad (3.41)$$

Para tensores da base:

$$(\varepsilon_i^{mk}\varepsilon_{kj}^\ell)\hat{u}_\ell\hat{u}_m = (\delta_{ij}\delta^{m\ell})\hat{u}_\ell\hat{u}_m - (\delta_i^\ell\delta^m_j)\hat{u}_\ell\hat{u}_m \quad (3.42)$$

A identidade $(\delta_{ij}\delta^{m\ell})\hat{u}_\ell\hat{u}_m = \delta_{ij}$, para um vetor unitário, é sobre combinações possíveis pela decomposição sobre uma base, $(\delta_i^\ell\delta^m_j)\hat{u}_\ell\hat{u}_m$ e os complementares são representáveis por combinações linearmente independentes da base) $(\varepsilon_i^{mk}\varepsilon_{kj}^\ell)\hat{u}_\ell\hat{u}_m$.

$$u \times (u \times v) = \llbracket u; u, v \rrbracket \quad (3.43)$$

Abstratamente, a covariância permite definir a rejeição para uma variedade de índices. Para rejeição:

$$R_j^i a^j = (\varepsilon^{imk} u_m \varepsilon_{k\ell j} u^\ell) a^j \quad (3.44a)$$

$$R_j^i a_i = (\varepsilon^{imk} u_m \varepsilon_{k\ell j} u^\ell) a_i \quad (3.44b)$$

$$R_{ij} a^j = (\varepsilon_i^{mk} u_m \varepsilon_{kj}^\ell u_\ell) a^j \quad (3.44c)$$

$$R^{ij} a_j = (\varepsilon^i_{mk} u^m \varepsilon_\ell^{kj} u^\ell) a_j \quad (3.44d)$$

3.2.4 Tensor Métrico Diedral

A métrica normalizada esférica é constituída de duas curvaturas principais que caracterizam rotação hiperbólica: a dilatação espacial é conjugada à contração de uma direção espacial.

Por covariância, a escolha do sistema de coordenadas não possui significado físico, e o mesmo processo deve ser apresentado em coordenadas cartesianas.

A decomposição da métrica em termos das operações de projeção e rejeição destaca a direção espacial que participa da rotação espacial, contanto que esteja condizente com as simetrias da métrica.

$$-g_{\mu\nu} = B\tilde{P}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\nu\nu} \quad (\mu \neq 0, \nu \neq 0) \quad (3.45)$$

A projeção diedral permite que se obtenha a simetria necessária para coordenadas cartesianas, em que se perde a validade também para esféricas.

$$-g_{\mu\nu} = B\langle \hat{\rho}_\mu, \hat{\rho}_\nu \rangle + (\delta_{\mu\nu} - \langle \hat{\rho}_i, \hat{\rho}_j \rangle) \quad (\mu \neq 0, \nu \neq 0) \quad (3.46)$$

Seguindo essa definição, a expansão das componentes espaciais resulta em:

$$\begin{aligned}
-g_{\mu\nu} = B & \begin{bmatrix} \hat{\rho}_x \cdot \hat{\rho}_x & -\tilde{k}|\hat{\rho}_y \times \hat{\rho}_x| & \tilde{j}|\hat{\rho}_z \times \hat{\rho}_x| \\ \tilde{k}|\hat{\rho}_x \times \hat{\rho}_y| & \hat{\rho}_y \cdot \hat{\rho}_y & -\tilde{i}|\hat{\rho}_z \times \hat{\rho}_y| \\ -\tilde{j}|\hat{\rho}_x \times \hat{\rho}_z| & \tilde{i}|\hat{\rho}_y \times \hat{\rho}_z| & \hat{\rho}_z \cdot \hat{\rho}_z \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 1 - \hat{\rho}_x \cdot \hat{\rho}_x & \tilde{k}|\hat{\rho}_y \times \hat{\rho}_x| & -\tilde{j}|\hat{\rho}_z \times \hat{\rho}_x| \\ -\tilde{k}|\hat{\rho}_x \times \hat{\rho}_y| & 1 - \hat{\rho}_y \cdot \hat{\rho}_y & \tilde{i}|\hat{\rho}_z \times \hat{\rho}_y| \\ \tilde{j}|\hat{\rho}_x \times \hat{\rho}_z| & -\tilde{i}|\hat{\rho}_y \times \hat{\rho}_z| & 1 - \hat{\rho}_z \cdot \hat{\rho}_z \end{bmatrix} \\
& (\mu \neq 0; \nu \neq 0)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Contorna a situação apresentada anteriormente. Em recapitulação do desenvolvimento da solução proposta na sec. 3.1, a abstração geral dada por $g_{\mu\nu} = \tilde{J}_\mu^m \tilde{J}_\nu^n \tilde{g}_{mn}$, mostrou-se incompleta diante da especificidade das propriedades propostas. A antissimetria e a anticomutatividade são inesperadas na definição original da transformação $\tilde{J}_\mu^m$ em (2.12) por contemplar apenas um operando.

Condizente com a necessidade de transformação, a redefinição da base fixa e da transformação entre sistemas de coordenadas resulta em:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{i}} \sin \theta \cos \varphi & \hat{\mathbf{i}} \cos \theta \cos \varphi & -\hat{\mathbf{i}} \sin \varphi \\ 0 & \hat{\mathbf{j}} \sin \theta \sin \varphi & \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \sin \varphi & \hat{\mathbf{j}} \cos \varphi \\ 0 & \hat{\mathbf{k}} \cos \theta & -\hat{\mathbf{k}} \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\rho} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

A transformação é denotada por tipografia distinta para indicar a presença de imaginários, sendo $\hat{\mathbf{x}}_\mu = \tilde{J}_\mu^m \hat{\mathbf{e}}_n$ a transformação da base e $g_{\mu\nu} = \tilde{J}_\nu^n \tilde{J}_\mu^m \tilde{g}_{nm}$ a da métrica.

Interessante destacar que o padrão de deformação espaço-tempo é similar ao proposto na invariância hiperbólica da velocidade de Minkowski,³⁶ exceto que a causa cinética torna-se métrica.

A transformação $\tilde{J}_\nu^n$ pode ser decomposta em uma série de rotações³⁷ o que torna $g_{\mu\nu} = \tilde{J}_\nu^n \tilde{J}_\mu^m \tilde{g}_{nm}$ similar à equação (3.34).

Minkowski discute apenas o espaço plano, e a principal condição, por se fundamentar em um invariante, está na velocidade. No interesse em como a velocidade relaciona-se à métrica, é oportuno destacar a seguinte proposição: a tendência de ser hiperbólico está na assinatura da métrica, e a motivação está no invariante de velocidade. A rotação hiperbólica para velocidade independe do espaço ser curvo, e torna a velocidade o denominador comum em ambas as situações cinética e métrica.

As similaridades entre as transformações são evidenciadas na formulação de generalidades do grupo. Na rotação hiperbólica entre o espaço e tempo, o tensor métrico regular possui duas curvaturas; nisso se assemelha ao núcleo da transformação de Lorentz, grupo reconhecido por Poincaré. [84]

³⁶A invariância da velocidade ocorre pela rotação hiperbólica entre dimensão temporal e uma direção espacial.

³⁷Ver equação (3.38).

Um grupo mais abrangente sobre matrizes não singulares do tipo:

$$\mathcal{H}_j^\ell G_i^j = \mathcal{H}_j^\ell \begin{bmatrix} 1_0^0 / \det(T_k^j A_i^k) & 0_0^j \\ 0_i^0 & -T_k^j A_i^k \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\det(T) = 1; \det(A) \neq 0$$

Ilustrado na rotação Lorentz, obtida fazendo $T_k^j = (P_k^j + R_k^j)$ e $A_i^k = I_i^k$, definidos nas variáveis $\gamma = \cosh$ e $\gamma\beta = \sinh$

Para $P_i^j = \langle \dot{u}_i, \dot{u}^j \rangle$, definido por projeção ortogonal, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \cosh & -\sinh & 0 \\ \sinh & \cosh & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \det(P + R) & 0 \\ 0 & -(P + R) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

A operação que envolve rotação hiperbólica, entendendo que Π a rotação espacial para entre tempo e a primeira-espacial como na equação (3.36).

$$\mathcal{H} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathcal{H}} \equiv \Pi^T(\pi/4) \cdot \hat{\mathcal{H}} \cdot \Pi(\pi/4) \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Rotação na forma bilinear dos imaginários ocorre na escolha para $\tilde{\mathcal{P}}$ diedral

3.3 Variável de Transformação

Na interpretação da rotação, segundo o modelo hiperboloide de Minkowski, o principal condicionante, por se fundamentar em um invariante, está na velocidade. A ambivalência em que operador bilinear da velocidade serve de métrica para o espaço gera um conflito na variável de interesse da transformação.

A variável de interesse das transformações ortonormais, condizente com a operação da métrica normalizada, é a velocidade.

A “compatibilidade” entre transformações por matrizes jacobianas³⁸ e transformações por matrizes ortonormais existe nas equações do movimento, pelo vínculo diferencial entre as variáveis. Entretanto, cabe advertir que a diferença entre estudo cinemático e geométrico acaba por não configurar simples preferências de escolha. Geometria promove definições com consequências holonômicas quando se passa para dinâmica.

A distinção tênue ocorre na passagem de cinemática para dinâmica e está na adoção do invariante de velocidade. A cinemática estuda as consequências do movimento, independentemente das forças que o colocam em movimento, e a restrição de velocidade não se caracteriza como holonômia. A dinâmica é

³⁸A compatibilidade está em ser possível escrever boa parte das equações independentemente da forma de transformação.

Convencionalmente, as matrizes jacobinas na geometria diferencial são definidas para as variáveis coordenadas.

explicitada na rotação hiperbólica decorrente do invariante de velocidade, que permanece hiperbólico somente por transformações igualmente hiperbólicas.

Acentua distinção a proposição de que a geometria se utiliza do sistema coordenado como método para especificar uma posição pontual, enquanto na cinemática proposta para o espaço-tempo, antes de localizar o ponto, é preciso especificar a existência física de como o mesmo é alcançado. Velocidade é uma variável independente de posição, e a inversão de concepção ocorre ao definir um sistema de coordenadas que se adequa à descrição do movimento, enquanto que, ao se abster das coordenadas generalizadas, pretende-se uma descrição do espaço ontológico com maiores possibilidades físicas.³⁹

Transformações ortonormais são mais apropriadas às transformações de velocidades e tornam apropriada para o trato da rotação hiperbólica. Em oposição, as transformações jacobianas que, por serem definidas segundo a geometria do espaço, necessitam que a holonomia seja introduzida antes. A métrica opera sobre a velocidade; o tensor métrico normalizado é antes o espaço das rotações hiperbólicas do que o espaço geométrico de curvatura hiperbólica.

Apesar de a normalidade da métrica ser conceitualmente discrepante nas transformações das variáveis coordenadas, as transformações normalizadas não são de todo incompatíveis com o uso coordenado.

A definição pela velocidade não muda o interesse em acompanhar como as variações são projetadas no espaço. Outra peculiaridade precisa ser esclarecida.

A mudança de variável na operação diferencial, $\partial_\sigma = \tilde{J}_\sigma^s \partial_s$, opera pela transformação originalmente desenvolvida em (2.12), enquanto $\tilde{\mathbf{x}}_\mu = \tilde{J}_\mu^m \hat{\mathbf{e}}_n$ pela definição reformulada em (3.48). A razão para a duplicidade está na relação com a operação bilinear, que se remete à base do espaço tensorial da velocidade, enquanto a taxa de variação se faz pelo espaço tensorial das componentes coordenadas de posição.

A transformação da derivada do tensor métrico torna-se:

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \tilde{J}_\sigma^s \partial_s \left(\tilde{J}_\mu^m \tilde{J}_\nu^n \tilde{g}_{mn} \right) \quad (3.52)$$

Na base covariante, os imaginários sinalizam a direção fixa, são propriedades da base e não se transformam. Por sua vez, as componentes contravariantes sinalizam a modulação e transformam-se ordinariamente.

Os fatores imaginários são pertinentes às transformações entre componentes espaciais, assim $\tilde{J}_0^0 \equiv \tilde{J}_0^0$, entretanto, é conveniente que a expressão tenha um formato geral:

$$\begin{aligned} \partial_\sigma g_{\mu\nu} &= \tilde{J}_\sigma^1 \partial_1 \left(\tilde{J}_\mu^0 \tilde{J}_\nu^0 \tilde{g}_{00} \right) + \tilde{J}_\sigma^1 \partial_1 \left(\tilde{J}_\mu^1 \tilde{J}_\nu^1 \tilde{g}_{11} \right) \\ &= \tilde{J}_\sigma^1 \tilde{J}_0^0 \tilde{J}_0^0 \partial_1 \tilde{g}_{00} + \tilde{J}_\sigma^1 \tilde{J}_\mu^1 \tilde{J}_\nu^1 \partial_1 \tilde{g}_{11} \end{aligned} \quad (3.53)$$

A antissimetria requer atenção aos índices. No caso da derivada da transformação da derivada da base, também ocorre assimetria pela duplicidade de

³⁹ Realização de um espaço físico que não seja autodeterminado; a continuidade existencial não se confunde com descontinuidades geométricas, o que incompatibilizaria descontinuidades quânticas ou limitação à sua expansão.

transformações.

$$\begin{aligned}\partial_\nu \hat{\mathbf{x}}_\mu &= \partial_\nu (\tilde{\mathcal{J}}_\mu^m \hat{\mathbf{e}}_m) = \tilde{\mathcal{J}}_\mu^m (\tilde{\mathcal{J}}_\nu^n \partial_n \hat{\mathbf{e}}_m) + (\partial_\nu \tilde{\mathcal{J}}_\mu^m) \hat{\mathbf{e}}_m \\ &= \tilde{\mathcal{J}}_\nu^n \tilde{\mathcal{J}}_\mu^m \Gamma_{mn}^s \hat{\mathbf{e}}_s + (\partial_\nu \tilde{\mathcal{J}}_\mu^s) \hat{\mathbf{e}}_s\end{aligned}\quad (3.54)$$

O mesmo ocorre nos símbolos de Christoffel. Torna-se interessante convenicionar qual índice remete à variável de derivação.

$$\Gamma_{\nu\mu}^\sigma \hat{\mathbf{x}}_\sigma = \tilde{\mathcal{J}}_\nu^n \tilde{\mathcal{J}}_\mu^m \mathcal{J}_s^\sigma \Gamma_{mn}^s \hat{\mathbf{x}}_\sigma + (\partial_\nu \tilde{\mathcal{J}}_\mu^s) \mathcal{J}_s^\sigma \hat{\mathbf{x}}_\sigma \quad (3.55)$$

Um último tópico abrangendo o jacobiano é sobre deslocamentos diferenciais. Um primeiro esclarecimento é que, no interesse de caminho geodésico, somente há interesse nos deslocamentos por princípios variacionais, ou seja, caminhos conservativos. Concerne à tese do desenvolvimento do texto a exposição de como o caminho mínimo é resultado de curvatura, e o desvio do caminho dissipativo é, por consequência, não-conservativo. Nesse enquadramento, não se contabiliza ganho ou perda de potencial: ou se segue a curvatura, ou torna-se dissipativo. Nesse contexto, o deslocamento diferencial não é proveitoso, o que também é condizente com o relacionamento feito da métrica com a curvatura do movimento.

Em uma trajetória geodésica, o deslocamento diferencial possui homogeneidade dimensional.

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} \cdot d\rho + \frac{\partial y}{r \partial \theta} \cdot r d\theta + \frac{\partial y}{r \sin \theta \partial \varphi} \cdot r \sin \theta d\varphi \quad (3.56a)$$

$$\rho d\theta = \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot dx + \rho \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot dy + \rho \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot dz \quad (3.56b)$$

Medido pelo movimento, formas diferenciais de ordem superior possuem especificidade conceitual e, embora a transformação siga o mesmo padrão, não são abordadas.⁴⁰

Por fim, o fator espacial γ_r , apresentado na equação (2.80), torna-se o determinante da parte espacial, $\gamma_r = -\det(g_{ij})$

$$\det(g_{\mu\nu}) = g_{00} \det(g_{ij}) = -1 \quad (3.57)$$

3.4 Christoffel

Símbolos de Christoffel,[19]em análise tensorial, representam os componentes da variação intrínseca da base. Na proposição de rotação hiperbólica, os símbolos são relacionados ao movimento induzido, vistos em (2.96a), tanto na produção de atração quanto na preservação do invariante de velocidade.

As propriedades dos símbolos, definição pela métrica, sua compatibilidade com a derivada direcional e caracterizações da holonomia serão vistas adiante,

⁴⁰Na perspectiva de que são espaços que possam ser cobertos pelo movimento de um corpo, área e volume são uma ocorrência idealizada mesmo em uma métrica estacionária. Nesse sentido, também, a métrica somente faz sentido em uma relação diádica para não recair no espaço absoluto ao confrontar com eventos de simultaneidade.

na seção sobre conexão e transporte paralelo. Seguindo a proposta de conversão cartesiana, a seção apresenta transformação entre os sistemas de coordenadas cartesiano-esférico da métrica normalizada e encerra ponderando sobre a definição intrínseca do símbolo e sua caracterização no movimento.

Conhecidas as expressões para os símbolos em coordenadas esféricas de (2.43a) até (2.43c), e a transformação (3.48), a conversão é por substituição na expressão:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= \mathcal{J}_s^{\sigma} \tilde{\mathcal{J}}_{\mu}^m \tilde{\mathcal{J}}_{\nu}^n \tilde{\Gamma}_{mn}^s + \mathcal{J}_{\ell}^{\sigma} \tilde{\mathcal{J}}_{\mu\nu}^{\ell} \\ &= \mathcal{J}_s^{\sigma} \tilde{\mathcal{J}}_{\mu}^m \tilde{\mathcal{J}}_{\nu}^n \tilde{\Gamma}_{mn}^s + \mathcal{J}_{\ell}^{\sigma} (\tilde{\mathcal{J}}_{\nu}^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^{\ell})\end{aligned}\quad (3.58)$$

A enumeração de todos os índices é laboriosa e nem todos os índices são produtivos de valores não-nulos. Uma forma mais conveniente é aproveitar a existência desses termos nulos para promover a eliminação por índices.

Em esféricas, os símbolos de Christoffel para métrica normalizada podem ser agrupados nos seguintes arranjos:

$$\tilde{\Gamma}_{mn}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Gamma}_{01}^0 & 0 & 0 \\ \tilde{\Gamma}_{10}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\Gamma}_{mn}^1 = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{00}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Gamma}_{11}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{mn}^2 &= \tilde{0}_{\mu\nu}^2 \\ \tilde{\Gamma}_{mn}^3 &= \tilde{0}_{\mu\nu}^3 \end{aligned}\quad (3.59)$$

Em reverso, é preciso saber quantos e quais são os cartesianos. Para isso, é preciso considerar a conversão inversa: a resolução de esféricas a partir de cartesianas.

$$\tilde{\Gamma}_{mn}^s = \tilde{\mathcal{J}}_{\sigma}^s \mathcal{J}_m^{\mu} \mathcal{J}_n^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \tilde{\mathcal{J}}_{\lambda}^s \mathcal{J}_{mn}^{\lambda} \quad (3.60)$$

A substituição dos esféricos vincula os índices de transformação. Assim, os índices produtivos são relacionados nas equações:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{01}^0 &= \tilde{\mathcal{J}}_{\sigma}^0 \mathcal{J}_0^{\mu} \mathcal{J}_1^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \tilde{\mathcal{J}}_{\lambda}^0 \mathcal{J}_{01}^{\lambda} & \tilde{\Gamma}_{10}^0 &= \tilde{\mathcal{J}}_{\sigma}^0 \mathcal{J}_1^{\mu} \mathcal{J}_0^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \tilde{\mathcal{J}}_{\lambda}^0 \mathcal{J}_{10}^{\lambda} \\ \tilde{\Gamma}_{00}^1 &= \tilde{\mathcal{J}}_{\sigma}^1 \mathcal{J}_0^{\mu} \mathcal{J}_0^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \tilde{\mathcal{J}}_{\lambda}^1 \mathcal{J}_{00}^{\lambda} & \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \tilde{\mathcal{J}}_{\sigma}^1 \mathcal{J}_1^{\mu} \mathcal{J}_1^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \tilde{\mathcal{J}}_{\lambda}^1 \mathcal{J}_{11}^{\lambda}\end{aligned}$$

Assim como ocorre com os símbolos, nem todos os índices de transformações são produtivos, e há ainda considerações sobre a derivação da transformação. Perceba que, conceitualmente, a transformação varia no tempo $\mathcal{J}_{m0}^{\lambda} = \partial_0 \mathcal{J}_m^{\lambda} = 0$ e não tem dependência da variável radial $\mathcal{J}_{m1}^{\lambda} = \partial_1 \mathcal{J}_m^{\lambda} = 0$.

A eliminação dos termos é proveitosa no cômputo geral; entretanto, o mais importante é destacar que, nessa conjuntura, os símbolos de Christoffel tornam-se covariantes sob transformação de coordenadas.⁴¹

Prosseguindo a eliminação, o índice da dimensão temporal é produtivo da eliminação de termos. A conversão de cartesiana para esféricas pode ser relacionada como:

⁴¹ Tensor ocasional.

$$\tilde{\Gamma}_{01}^0 = \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \mathcal{J}_0^0 J_1^\nu \Gamma_{0\nu}^0 \quad (3.61a)$$

$$\tilde{\Gamma}_{10}^0 = \tilde{\mathcal{J}}_\sigma^1 \mathcal{J}_1^\mu J_0^\sigma \Gamma_{\mu 0}^\sigma \quad (3.61b)$$

$$\tilde{\Gamma}_{00}^1 = \tilde{\mathcal{J}}_\sigma^1 \mathcal{J}_0^0 J_0^\sigma \Gamma_{00}^\sigma \quad (3.61c)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\mathcal{J}}_\sigma^1 \mathcal{J}_1^\mu J_1^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \quad (3.61d)$$

Pela “covariância” adquirida pelos símbolos, o mesmo deve ocorrer, em inverso, para Cartesianas.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \mathcal{J}_0^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_\mu^0 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{01}^0 + \mathcal{J}_\ell^\sigma (J_\nu^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^\ell) & \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \mathcal{J}_0^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^0 \tilde{\Gamma}_{10}^0 + \mathcal{J}_\ell^\sigma (J_\nu^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^\ell) \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_\mu^0 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{00}^1 + \mathcal{J}_\ell^\sigma (J_\nu^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^\ell) & \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 + \mathcal{J}_\ell^\sigma (J_\nu^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^\ell) \end{aligned}$$

Dessa vez, a derivada da transformação em $\mathcal{J}_\ell^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_{\mu\nu}^\ell$ é feita nas variáveis cartesianas, com a transformação nos termos de (2.30). É possível mudar a variável de derivação para esféricas $\mathcal{J}_\ell^\sigma (J_\nu^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^\ell)$

Prosseguindo com a substituição de índices:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\nu}^0 &= \mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{01}^0 + \mathcal{J}_0^0 (J_\nu^q \tilde{\mathcal{J}}_{0q}^0) & \Gamma_{\mu 0}^0 &= \mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\Gamma}_{10}^0 + \mathcal{J}_0^0 (J_0^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^0) \\ \Gamma_{00}^\sigma &= \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^1 \tilde{\Gamma}_{00}^1 + \mathcal{J}_\ell^\sigma (J_0^q \tilde{\mathcal{J}}_{0q}^\ell) & \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 + \mathcal{J}_\ell^\sigma (J_\nu^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^\ell) \end{aligned}$$

Tal qual acontece nas expressões para esféricas, ocorre eliminação pela derivada da transformação. Nesse caso, as componentes da dimensão de índice temporal da transformação são constantes.

$$\Gamma_{0\nu}^0 = \mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{01}^0 \quad (\nu \neq 0) \quad (3.62a)$$

$$\Gamma_{\mu 0}^0 = \mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\Gamma}_{10}^0 \quad (\mu \neq 0) \quad (3.62b)$$

$$\Gamma_{00}^\sigma = \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^1 \tilde{\Gamma}_{00}^1 \quad (\sigma \neq 0) \quad (3.62c)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 + \mathcal{J}_\ell^\sigma (J_\nu^q \tilde{\mathcal{J}}_{\mu q}^\ell) \quad (\sigma \neq 0, \mu \neq 0, \nu \neq 0) \quad (3.62d)$$

Na última equação, nem todos os termos que envolvem derivada da transformação são manifestamente nulos. Pela covariância adquirida, é esperada a nulidade de todos os termos, e o caso restante deve ser demonstrável.

Primeiro: a equivalência $\mathcal{J}_\ell^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_{\mu\nu}^\ell \equiv 0_{\mu\nu}^\sigma$ para a escolha dos índices relevantes na conversão. As transformações são ortogonais, transformação transposta é igual à inversa, $\tilde{\mathcal{J}}_\mu^\ell \mathcal{J}_\ell^\mu = 1_{\mu'}^\mu$, e a derivada é sempre nula, indiferente se são dependentes ou independentes da variável de derivação, assim $\partial_\nu (\tilde{\mathcal{J}}_\mu^\ell, J_\ell^\mu) = 0_{\mu'\nu}^\mu$. Aplicando a regra do produto para derivada, temos duas parcelas, $(\partial_\nu \tilde{\mathcal{J}}_\mu^\ell) \mathcal{J}_\ell^\mu$ e a contraparte $\tilde{\mathcal{J}}_\mu^\ell (\partial_\nu \mathcal{J}_\ell^\mu)$, que, se não forem trivialmente nulas, são “simétricas”, e, sendo os valores opostos, o interesse está na diagonal. As colunas da matriz ortogonal formam uma base ortonormal, e a diagonal das derivações em questão é formada pelo produto do vetor ortogonal com a sua derivada, que corresponde a uma rotação de $\pi/2$.

Diante da transformação de coordenadas, os símbolos de Christoffel são covariante: ⁴²

$$\Gamma_{0\nu}^0 = \mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{01}^0 \quad (\nu \neq 0) \quad (3.63a)$$

$$\Gamma_{\mu 0}^0 = \mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\Gamma}_{10}^0 \quad (\mu \neq 0) \quad (3.63b)$$

$$\Gamma_{00}^\sigma = \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\Gamma}_{00}^1 \quad (\sigma \neq 0) \quad (3.63c)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 \quad (\sigma \neq 0, \mu \neq 0, \nu \neq 0) \quad (3.63d)$$

Algumas simplificações: na primeira equação, é direto pela definição que $\mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 = 1$; na segunda, o mesmo pode ser feito após avaliar a equivalência entre as transformações $\tilde{\mathcal{J}}_0^0 \equiv \tilde{\mathcal{J}}_0^0$; a terceira é similar à segunda, mas por propriedade de inversão. As simplificações na quarta equação são possíveis após a enumeração.

$$\mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 = \tilde{\mathcal{J}}_\nu^1 \quad \mathcal{J}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 = \tilde{\mathcal{J}}_\mu^1 \quad \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_0^0 \tilde{\mathcal{J}}_0^0 = \mathcal{J}_1^\sigma \quad (3.64)$$

A organização dos símbolos, tal como feita em (3.59), é instrutiva; é possível fazer a correspondência entre os símbolos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\mathcal{J}}_1^1 \tilde{\Gamma}_{01}^0 & \tilde{\mathcal{J}}_2^1 \tilde{\Gamma}_{01}^0 & \tilde{\mathcal{J}}_3^1 \tilde{\Gamma}_{01}^0 \\ \tilde{\mathcal{J}}_1^1 \tilde{\Gamma}_{10}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathcal{J}}_2^1 \tilde{\Gamma}_{10}^0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathcal{J}}_3^1 \tilde{\Gamma}_{10}^0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.65a)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\Gamma}_{00}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_1^1 \tilde{\mathcal{J}}_1^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_1^1 \tilde{\mathcal{J}}_2^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_1^1 \tilde{\mathcal{J}}_3^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 \\ 0 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_2^1 \tilde{\mathcal{J}}_1^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_2^1 \tilde{\mathcal{J}}_2^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_2^1 \tilde{\mathcal{J}}_3^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 \\ 0 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_3^1 \tilde{\mathcal{J}}_1^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_3^1 \tilde{\mathcal{J}}_2^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 & \mathcal{J}_1^\sigma \tilde{\mathcal{J}}_3^1 \tilde{\mathcal{J}}_3^1 \tilde{\Gamma}_{11}^1 \end{bmatrix} \quad (3.65b)$$

($\sigma \neq 0$)

Uma classificação para os arranjos matriciais:

1. Linha $\Gamma_{0\nu}^0$ e coluna $\Gamma_{\mu 0}^0$ do tempo-espaço são contraparte temporal da variação pela rotação hiperbólica, sendo $\Gamma_{0\nu}^0$ a contração temporal em variação da posição, a variação espacial com a passagem do tempo $\Gamma_{\mu 0}^0$;
2. Elementos temporais de cada direção, símbolos na forma Γ_{00}^σ , são contraparte espacial da rotação hiperbólica;
3. Elementos espaciais $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ com ($\sigma \neq 0, \mu \neq 0, \nu \neq 0$) são circulação do movimento entre as diversas componentes espaciais, por efeito da acomodação da rotação hiperbólica.

Repare que, ao contrário do tensor métrico esférico, os símbolos cartesianos não seguem a mesma simetria da métrica, sequer são simétricos. A relevância dessa propriedade (ou ausência) é vista adiante; por ora, a mudança conceitual

⁴² Ver nota 41.

evidenciada na transformação cartesiana: rotação hiperbólica, em vez de curvatura; ou, em outra nomenclatura, curvatura do movimento em vez de curvatura do espaço.

Em comum às duas concepções, os símbolos expressam a variação intrínseca. Partindo-se dessa comunalidade, a normalidade da base introduz, por consequência das especificidades das relações sistêmicas, condicionantes, pela definição da operação bilinear e variável de interesse da transformação. A forma cartesiana revela o que estava encoberto pela forma como a base móvel suprime a população de termos.

No estudo geométrico, o símbolo proposto por Bruno Christoffel [19] é entendido como variação intrínseca da base em consequência de sua reorientação no espaço. No estudo do movimento, a base é definida pela velocidade e variação cinemática ocorre em razão do invariante hiperbólico.

O entendimento é condizente com a ideia: segue que o símbolo não possui uma expressão, apenas a definição de variação intrínseca por um símbolo que expressa uma forma indireta de variável de ligação no sistema. Além de a covariância, ou falta dela, não possuir propriedade ou ser contingente nas que porventura sugem, os símbolos são por formulação de condicionantes que aparecem ao analisar a conformidade da covariância em demonstrações. Sem necessidade de estabelecer uma definição específica, o símbolo deverá condizer com aquilo que se predica a respeito. Em consequência, o símbolo é uma expressão aberta, e a falta de especificidade justifica as investigações sobre continuidade.

A caracterização que ocorre na derivada direcional covariante, conexão, satisfaz a continuidade e é diferenciável por todas as formulações que a diferenciação possa promover e evita situações de rupturas do deslocamento diferencial.

Os tensores de curvatura e torção são “expressões de discriminantes analíticos” que fatoram as condições de congruência na relação de segunda ordem entre as variações das variáveis livres. O estudo holonômico desses tensores condiciona a ausência de descontinuidades à inexistência de torção, que em sua definição recai nos símbolos de Christoffel.

É oportuno recordar que, ao longo do desenvolvimento do texto, evitam-se restrições holonômicas. Primeiro, ao se abster de coordenadas generalizadas,⁴³ depois nas definições dos tensores da base e, mais recentemente, nas transformações. Pretende-se uma descrição o mais genuína possível do espaço ontológico, na perspectiva em que não se introduzam pré-concepções, o que, de outra forma, se reduziria à conformidade de concluir que o resultado seja aquilo que se presumiu.

A forma inadvertida que definições holonômicas condicionam deslocamentos diferenciais ocorre implicitamente ao regular o movimento e conflita com invariante hiperbólico. Em outra perspectiva, há descontinuidade na torção por haver necessidade de holonomia. Não se confunda geometria com mecânica.

O compromisso de curvatura sem torção provém da holonomia pela forma que a formulação encontra para satisfazer a continuidade e conseqüente caracterização do símbolo de Christoffel.

Na rotação hiperbólica, a caracterização da variação intrínseca do símbolo, condizente com base cinemática, fundamenta-se no invariante de velocidade e definições que decorrem. Não há de estranhar que sejam distintos, não obstante sejam intrínsecos.

⁴³ Ver nota 39

Para métrica normalizada, os símbolos podem ser mais elaborados de sua forma sintética para uma forma analítica. Reduz-se a arbitrariedade que os índices sugerem pela descaracterização direcional da diversidade de termos.

Espacialmente, cada direção assume um valor que totaliza em uma direção principal. Análogo a encontrar um autotensor, para alguma direção há de se encontrar a magnitude resultante. Direção principal coincide com a curvatura espacial, diretriz, o que permite modular a magnitude.

A permutação de índices como combinação de direções toma efeito como transformação da direção, rotação ou modulação da magnitude. Assim, é natural recompor em operações que enumerem os arranjos de todas as operações possíveis que a tríade promove nos índices espaciais.

$$\tilde{\Gamma}_{mn}^s = \delta_m^s \delta_{an} \tilde{F}^a = \delta_{mn} \delta_a^s \tilde{F}^a - \varepsilon^s_{m\ell} \varepsilon^\ell_{an} \tilde{F}^a \quad (3.66)$$

O termo $\delta_{an} \tilde{F}^a$ não foge ao que a derivada do tensor da base é capaz de operar, enquanto δ_m^s delimita o resultado da operação ao plano. O padrão não é desconhecido, e condizente com anteriores, expandido na identidade de Grassmann. Perceba que, por essa nova expressão, a intenção de combinação de todas as direções possíveis na decomposição em operações espaciais, o confinamento ao plano torna-se inevitável por produto vetorial na circularidade inerente à operação.

O símbolo torna-se um operador ternário confinado ao plano espacial definido pela diretriz e o espacial do tensor velocidade. A forma cartesiana admite imaginários pelo emprego de direções fixas. Não seria de se estranhar: a decomposição em produto vetorial, diga-se de passagem, possui origem quaterniônica.

Em síntese, o símbolo opera a indução do movimento pela velocidade: uma parcela atrativa e outra refração. Entretanto, há anisotropia.

4 Conexão, Curvatura e Torção

Curvatura e torção são, em geometria, expressões discriminantes correlatas da conexão no interesse da continuidade do espaço. Ainda que seja pertinente, no movimento mecânico outras qualidades são relevantes e, ao mesmo tempo, conflitantes. O entendimento de um categórico distinto é necessário para manter a coerência da formulação ao atender princípios variacionais e situações dissipativas.

Em coordenadas esféricas, o tensor é exclusivamente simétrico, notório pela forma matricial apresentar apenas elementos na diagonal. Entretanto, ao se converter covariantemente em coordenadas cartesianas, o mesmo tensor apresenta elementos antissimétricos.

Com a antissimetria da métrica, pela definição de curvatura, surge o “tensor de torção”.⁴⁴ O contrassenso está na noção de que torção vincule-se como propriedade do espaço-tempo, sendo que, pela covariância, pode haver, ou não, a torção desse mesmo espaço. A ausência de torção em um sistema de coordenadas conflita com a existência em outro.

O conseqüente surgimento de torção torna intrigante o conceito no espaço, mas não a torção do movimento. A métrica normalizada o segue a proposta

⁴⁴Nesse caso, os símbolos de Christoffel são peculiarmente covariantes. Ver nota 41.

do espaço-tempo de Minkowski de produzir um invariante hiperbólico da velocidade.

A ação primária da métrica é a invariância da velocidade; com isso, a curvatura é propriedade do movimento, e a inconsistência da existência de torção é explicada pela adoção de base móvel.

Em comum com o conceito holonômico, a abordagem é intrínseca e covariante sobre a dimensionalidade espaço-vetorial. Distintamente, a conceituação é por um categórico diferente.

4.1 Recorte Histórico: Conexão

Covariância é o princípio cardinal na álgebra tensorial. Porém, na forma analítica com o cálculo, a conexão toma de igual importância. A principal motivação, no tensor normalizado, está nos grupos de transformações que satisfazem o invariante da continuidade hiperbólica do tensor velocidade. O recorte histórico é sobre a busca de continuidade geométrica por coordenadas, e como se relacionará com a normalidade na peculiaridade implícita da escolha do espaço onde a noção de continuidade se aplica.

Conexão, a forma como o operador diferencial satisfaz a covariância, também envolve considerações e particularidades sobre a escolha da parametrização de transformações.

A “covariância” é o termo introduzido por Sylvester[99] em 1851, enquanto “invariância” foi por Cayley[3] em 1845, influenciado por Boole, originalmente para formas algébricas. [25] [26] Esses conceitos são contemporâneos de um correlato, o *princípio da permanência de formas equivalentes* (Peacock 1845), adotado por Ernst Mach.

É interessante destacar que parte dos estudos tinha atenção às propriedades algébricas puras e irredutíveis de particular interesse em soluções diferenciais. A essas formas invariantes, é conveniente atribuir o papel de “discriminantes”.

Ainda contemporâneo ao mesmo lustro, mas da álgebra para geometria, o tensor de Riemann faz aparição em 1854. Modernamente, o tensor é relacionado aos conceitos anteriores, o que se poderia dizer, se não por influência direta, o desenvolvimento expressa a maturidade da época.

O cálculo geométrico covariante surge com a análise tensorial covariante de Ricci e Civita[87], pela incorporação do símbolo de Christoffel [19] na definição de derivada direcional em uma generalização do estudo de superfícies riemannianas[88], forma não-euclidiana da geometria diferencial de Gauß no estudo de curvas sobre superfície.

Nesse ponto, é interessante apontar que a forma intrínseca é relevante, enquanto holonomia é indesejável ao tensor normalizado. Embora a aplicação do cálculo de Ricci não seja estritamente holonômica, a concepção geométrica o é. A primeira forma fundamental de Gauß é uma medida intrínseca feita sobre a curva que revela propriedades da superfície. No propósito do estudo de superfícies, o movimento físico é desconsiderado pela parametrização por comprimento de arco e a decomposição da curvatura. Ao formular a geometria em termos do tensor curvatura, Riemann permite uma geometria não-euclidiana para um número superior de dimensões. Mas ainda é dispensado um tratamento holonômico.

A abordagem geométrica guarda resquícios do espaço absoluto newtoniano ao considerar que, ainda que covariante, seja plenamente mapeável sem maiores

considerações ao referencial temporal simultaneidade. Em grande parte, isso se deve à consideração ao movimento que possa possuir; o espaço é antes um ente dinâmico do que geométrico.

A primeira referência à condição do movimento aparece no trabalho de Brouwer[100] em 1906 ao considerar o transporte paralelo, que posteriormente seria formalizado por Civita. A mais significativa, para o texto presente, vem com o espaço-tempo de Minkowski [75].

A proposição de uma métrica com assinatura hiperbólica pela conjugação entre o espaço e o tempo. Embora descreva propriamente a relação entre as duas variáveis, a formulação trata da invariância da velocidade por operação bilinear. O trabalho de Minkowski fornece uma interpretação geométrica e uma métrica covariante que seria adequada ao cálculo tensorial. O valor constante impede o desenvolvimento de uma dinâmica relativística completa, mas, na comparação entre velocidades diferentes, permite identificar a rotação hiperbólica dessa variável, que também se apresenta na estrutura do grupo de transformações de Lorentz, identificado anteriormente por Poincaré[84].

A forma dinâmica viria posteriormente, apresentada por Grossmann a Einstein na fundamentação da relatividade geral. Intrínseco e covariante, é mais centrado no mapeamento do espaço do que na invariância da velocidade. Para ser consistente com a mecânica lagrangiana, Hilbert propõe ação de campo[49] covariante: a dinâmica do sistema é determinada por princípios variacionais aplicados ao escalar de curvatura de Ricci. A demonstração das equações de campo pelo princípio de Hamilton estabelece o aspecto holonômico por teoria de campos.

Ainda interessado no papel das leis de conservação na física relativística, Hilbert encomendou à Noether[92] a investigação demonstrável pelo formalismo mecânico, o que também resultaria nas propriedades invariantes de simetria e invariantes de conservação. Noether[76] apresenta os fundamentos matemáticos das formulações mecânicas, abrindo caminho para diversos desenvolvimentos.

Em mais um avanço no cálculo tensorial, Civita formaliza o conceito de transporte paralelo[64] e apresenta o conceito de conexão (aqui tratado como continuidade holonômica), que estabelece uma propriedade de compatibilidade da definição de derivada intrínseca com a métrica.

De uma forma geral, conexões são diversas formas pelas quais os símbolos de Cristoffel podem ser definidos, no caso em que é feito pela métrica, marcando a compatibilidade com a derivada direcional. O entendimento marca a exploração de outras conexões. A derivada direcional é promovida pela conexão, abstraindo a métrica. Em conjunto com a ação de Hilbert e o problema variacional de Noether, a nova perspectiva sobre o caráter intrínseco do espaço abre caminhos para investigação de outras formulações mecânicas.

Klein, que já havia simplificado a ação de Hilbert [54], aprofunda a elaboração com o teorema de Noether [55] [56]. Weyl promove a generalização da conexão de Levi-Civita [107] e a generalização do transporte paralelo [108] [109]. Os trabalhos de Weyl tornam-se influentes na construção de alternativas, destacadamente Gauge. Palatini propõe uma ação [82] em substituição à de Hilbert, que tornar-se-ia importante no trabalho de Cartan e, indiretamente, no de Einstein[34].

Segue que as abordagens mecânicas começam a se afastar do tratamento estritamente holonômico, abordando conceitos diversos, como espaço afim, espaço não-métrico e base não-holonômica.

A generalização de Cartan combina aspectos mecânicos com as propriedades intrínsecas do espaço para compatibilidade entre derivada e conexões não simétricas [11]. Outras contribuições[12][13] foram cruciais no entendimento da interpretação geométrica de torção[47] e na forma como a derivada covariante pode ser definida abstratamente sem a presença de uma métrica. A série relativística de Cartan termina em 1925 [14], mas é interessante destacar contribuições sobre base referencial móvel [15] [16] [111].

Apesar dos avanços na generalização, a abrangência fica restrita à gravitação. O insucesso de combinar torção com campo eletromagnético clássico [33] e mudança abrupta promovida pela quântica [48] persiste até a atualidade. Propriedades intrínsecas da matéria, como *spin* e ondulação, parecem desconexas das propriedades intrínsecas do espaço, e as tentativas são no intuito de conciliar com a física de partículas.

4.2 Base Não-Holonômica e Mudança Categórica

A base para o tensor métrico normalizado é apresentada por uma definição não-holonômica.

$$\hat{\mathbf{e}}_i \neq \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.1)$$

A definição normalizada vem de uma base fixa por um referencial de inércia intrínseco, com propriedade de decomposição do espaço em dimensões lineares independentes, que pode ser representado por uma definição algébrica:

$$-\hat{\mathbf{x}}_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}}_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A base fixa privilegia a homogeneidade dimensional nas equações do movimento, ou seja, não se misturam velocidades angulares com velocidades lineares. Além disso, evita-se a composição de velocidade por mobilidade da base, assunto da sec. 2.3.

A demonstração da rotação hiperbólica por essa base, sec. 3.2, é condizente com as transformações de variáveis, sec. 3.3, concluindo que base ortonormal remete-se ao tensor velocidade. Em consequência, as variações de primeira ordem, sec. 3.4, fornecem a interpretação dos símbolos de Christoffel associada à indução da variação da velocidade.

A variação intrínseca da base não se confunde com curvatura, como ocorre na base por holonomia; logo, continuidade não é, na base normalizada, um problema que se relacione com a simetria do símbolo de Christoffel. Entretanto, deslocamento diferencial é prático e intuitivo, além de corresponder a outras teorias. Embora, como será demonstrado adiante, o símbolo de Christoffel não seja condicionante de continuidade na base normalizada, a análise por deslocamentos diferenciais assim o requer, e a compatibilidade com o caso motiva estudo de torção.

Parte de entender que holonomia são forças induzidas [24] que, entre as abordagens, podem ser suprimidas no equacionamento por se tornarem implícitas

em restrições do sistema de coordenadas. No emprego da base móvel, a holonomia está intrínseca na variação da base, em vez de se apresentar na simetria das coordenadas generalizadas, ocorrência atribuída à peculiaridade tensorial da separação dos elementos variantes.

A abordagem geral consistiria em transfigurar forças induzidas nas forças holonômicas implícitas ao símbolo de Christoffel,⁴⁵ porém essa manipulação depende da situação de simetria que o sistema de coordenadas promove em conjunção com o movimento, o que é evidenciado em como a torção é encoberta em esféricas, mas presente em cartesianas.

A base esférica é o caso canônico incomum, pela escolha do sistema de coordenadas, de como a decomposição que decorre oculta a assimetria da indução por confinar a curvatura, devido à mobilidade da base, a uma única direção. Em casos gerais, nem sempre é possível que o efeito esteja restrito aos simétricos,⁴⁶ e a técnica geral envolveria a artificialidade de desenvolver tensor de contra-torção, o que, no caso esférico, é nulo. Entretanto, a generalidade da formulação de tal tensor recai em peculiaridades de simetria, quando elas existirem.

A forma apropriada é atribuir o categórico certo: continuidade da variável cinemática. A consequência é que nem todos os problemas se reduzem a uma forma holonômica. A proposição é estranha para a perspectiva geométrica da gravidade, mas é algo que deveria ser esperado em problemas que envolvem descontinuidades de natureza quântica. Posto de outra forma, seria resquício do espaço absoluto newtoniano pressupor que o mapeamento holonômico é a solução final, quando é anisotrópico de acordo com a velocidade e possui questões intrincadas de simultaneidade.

O problema de referenciar-se intrinsecamente persiste. As subseções adiante apontam limitações e problemas que se pretende evitar com substituições por espaços abstratos, transformações canônicas e formas generalizadas.

Segue, para um plano definido extrinsecamente, dois enquadramentos sobre o mapeamento por base intrínseca e questões inerentes à sua representação.

4.2.1 Primeiro Enquadramento

Enquadramento por base holonômica: um entendimento direto vem da ilustração de como opera no espaço. Considere o sistema polar:

$$x = r \cos \varphi \quad (4.3a)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (4.3b)$$

A base para as variáveis polares r, φ é feita sobre um sistema curvilíneo móvel e definida por uma restrição holonômica $\hat{e}_k = \partial_k S$ para uma curva sobre a superfície S , e que, pelo tratamento intrínseco, pode tornar-se implícita $\hat{e}_i = \partial_i$.

Na definição holonômica, os vetores da base coordenada são definidos em relação à transformação para cartesianas por:

⁴⁵Holonomia não é autodeterminada (como seria o caso do invariante de velocidade fornecer um balanço), portanto precisa de uma definição externa, encontrada na teoria de campo.

⁴⁶Torção é a parcela antissimétrica da forma induzida transcrita em holonomia. A nulidade trivial dos antissimétricos da métrica é pela orientação promovida pelo sistema de coordenadas, portanto não suprime a indução dos simétricos, constituídos em holonomia no tensor curvatura.

$$\partial_r = \cos \varphi \partial_x + \sin \varphi \partial_y \quad (4.4a)$$

$$\partial_\varphi = -r \sin \varphi \partial_x + r \cos \varphi \partial_y \quad (4.4b)$$

A base do sistema polar é **ortogonal**, mas não **ortonormal**.⁴⁷ Apesar disso, é fácil achar a posição coordenada em relação à divisão reticular que o sistema polar promove. Assim, a referência variável na angular é facilmente identificada, apesar de ângulos não descreverem distâncias lineares.

Base para as variáveis polares r, φ é feita sobre um sistema curvilíneo móvel, e a caracterização desse sistema é pela forma como as derivadas parciais comutam.

$$\partial_r \partial_\varphi = \partial_r (-r \sin \varphi \partial_x + r \cos \varphi \partial_y) \quad (4.5a)$$

$$\partial_\varphi \partial_r = \partial_\varphi (\cos \varphi \partial_x + \sin \varphi \partial_y) \quad (4.5b)$$

Assim, pela caracterização $[\partial_r, \partial_\varphi] = 0$, a base é dita com **discriminante holonômico**.

Para os objetivos deste texto, utiliza-se a expressão **definição holonômica** para designar a base na qual a determinação é implícita por uma superfície $\hat{e}_k = \partial_k$, independentemente do discriminante, a fim de diferenciar essa abordagem da representação fornecida pela equação (4.2) e pela maneira como a **restrição holonômica** será abordada. Assim, uma base por definição holonômica pode ou não satisfazer a condição de discriminante holonômico, enquanto restrição holonômica será relacionada à forma como essas definições afetam o movimento.

Agora, considerando-se a versão **ortonormal** da base do exemplo anterior.

$$\partial_r = \cos \varphi \partial_x + \sin \varphi \partial_y \quad (4.6a)$$

$$r^{-1} \partial_\varphi = -\sin \varphi \partial_x + \cos \varphi \partial_y \quad (4.6b)$$

As novas definições aparentam representar uma nova base móvel para as variáveis em coordenadas $r, r\varphi$ feitas para o mesmo sistema curvilíneo móvel do sistema polar anterior. Entretanto, o diferencial da segunda variável não é condizente com a transformação proposta.⁴⁸

A transformação entre os dois sistemas de variáveis não é direta pela forma jacobiana entre as variáveis coordenadas. A caracterização desse sistema pela comutação das derivadas parciais possui resultado diferente, possui **discriminante não-holonômico**, ainda que restrito pela mesma superfície. O resultado da comutação torna-se $[\partial_r, r^{-1} \partial_\varphi] \neq 0$. Nesse caso:

$$[\partial_r, r^{-1} \partial_\varphi] = -\frac{1}{r} \partial_\varphi \quad (4.7)$$

Na ilustração apresentada, os dois sistemas de coordenadas mapeiam um mesmo espaço plano. O discriminante holonômico pode ser entendido como uma

⁴⁷A notação é, por vezes, incoerente ao apresentar um vetor φ de uma base não-normalizada como $\hat{\varphi}$, confundindo “unidade de direção” com “unitário”. Entretanto o conceito magnitude unitário é pela métrica não é direto, vide sec. 2.3.3, e uma definição de normalidade é o que se pretende demonstrar.

⁴⁸Base deixa de ser contraparte covariante das variáveis coordenadas. A transformação torna-se adequada para a base das variáveis de velocidade polar $\dot{r}, r\dot{\varphi}$ em relação a $\dot{x}, \dot{y}$

medida de distorção. Ângulos não se transformam linearmente (2.18). Deslocamento linear não corresponde ao deslocamento angular; são dimensionalmente distintos. De outra maneira, os deslocamentos transformam-se em proporções distintas, causando mudança na escala e descontinuidades em segunda ordem. Ou ainda, a variável angular não está em “verdadeira grandeza”, e depende da transformação para coerência das operações.

Em geral, a ortornormalidade da transformação $\partial_s = e_s^m \partial_m$ resulta em uma expressão de comutação na forma:

$$[e_r^n \partial_n, e_s^m \partial_m] = C_{rs}^k \partial_k \quad (4.8)$$

O que se pretende é destacar o caso em que o discriminante ocorre puramente em razão da transformação.⁴⁹ Esquivando-se da circularidade que as definições possam incorrer, supondo que possa-se conceber uma base cartesiana que possui uma definição intrínseca condizente com o que o discriminante holonômico, a ocorrência do mesmo no sistema em base móvel é artifício da transformação entre coordenadas.

Sintetizar base para uma parametrização coordenada exige transformação não-normalizada para satisfazer a necessidade do discriminante holonômico. Essa transformação entre sistemas de coordenadas, embora preserve o invariante de velocidade, não preserva homogeneidade e isometria.

As peculiaridades da perspectiva coordenada não chegam a ser um inconveniente, pois sua especificação particular é reversível. O que irá tornar a transformação indesejável é o propósito que se estabelece para o equacionamento no espaço curvo, no caso, resolução tensor curvatura.

Primeiro, é preciso destacar que a transformação adultera a isometria. Segundo, demonstrar que, ao desnormalizar a métrica, desnatura-se o tensor curvatura.

Na métrica normalizada, a dilatação temporal e a contração em uma das direções espaciais estão balanceadas, assim como as taxas de variação, em primeira e segunda ordem, promovidas nessas componentes da métrica. Transitivamente, o tensor curvatura resulta na expressão de equilíbrio do invariante hiperbólico pela reciprocidade das componentes, constituindo-se intrinsecamente a autodeterminação pelo movimento.

Por outro lado, na transformação não-ortonormal, a métrica, além de deixar de ser normalizada, assume uma escala variável. Como resultado, todas as direções estão sujeitas a variação, e separar a causa paramétrica da causa intrínseca deixa de ser uma questão trivial.

No tensor curvatura de uma métrica não-normalizada, será preciso estipular, por conhecimento prévio ou especificação, como as componentes do tensor curvatura irão se balancear, constituindo-se, assim, uma restrição holonômica.

No desbalanceamento da métrica está o mecanismo pelo qual a definição holonômica da base realiza necessidade de restrição holonômica. Por outro lado, a falta de conversão para outros sistemas de coordenadas é explicada pelo fato de que as mesmas simetrias esféricas não se realizam em outros sistemas. Como a escolha de superfície holonômica é arbitrária, desde que tenha a simetria desejada, é preciso de um conjunto de equações que fixem a curvatura ao espaço.

⁴⁹Família de superfícies que atendem à simetria da transformação pelo discriminante no espaço curvo.

Uma vez estabelecida, a superfície que serve de restrição holonômica depende de simetria, mecanismo pelo qual a holonomia inviabiliza a conversão entre sistemas.

4.2.2 Variável Cinemática

Base não-coordenada denota aquela que não corresponde ao sistema de coordenadas generalizadas. A denominação é informativa, mas pouco sugestiva de qual variável substitui a coordenada paramétrica. A variável substituída deverá satisfazer duas condições que não poderão mais ser observadas pela variável coordenada: continuidade no espaço e variação intrínseca da base. A seção faz a expectativa do que deve-se observar na nova variável.

A mudança de variável que se processa na mudança de base não é uma substituição ordinária. Trata-se de uma transformação categórica, o que traz modificações conceituais nos resultados e interpretação dos equacionamentos. Além da manipulação simbólica, deve-se acrescentar que a variação da base passa a ter causa não-coordenada, o que transitivamente torna-se causa da variação da métrica e, por segunda ordem, da curvatura do movimento.

Uma forma de apontar que a base não-coordenada presume a manipulação pela variável velocidade consiste em observar que holonomia é a condição de conformidade para o tratamento intrínseco da curvatura por deslocamento geométrico no espaço. A ortonormalidade da base na transformação entre sistemas de coordenadas é incompatível com a abordagem holonômica. A transformação não é condizente com as variáveis paramétricas de coordenadas mas a transformação da base é adequada à variável velocidade, como apresentado no jacobiano.

A proposição da admissão, que a base remete-se à velocidade, torna pendente a consistência que a mudança de variável promove. A análise segmenta-se nas duas formas de abordagem conduzidas ao longo do texto, que tratam variação intrínseca e coordenada: o significado da comutação nos deslocamentos diferenciais nas variáveis coordenadas é apresentado na subsequente; o significado da variação intrínseca em coordenadas esféricas no restante da seção.

Na métrica normalizada, em esféricas, obtêm-se símbolos de Christoffel simétricos pela nulidade de parte dos termos, enquanto que, em cartesianas, o mesmo não acontece. A despeito do valor das variações intrínsecas, o valor nulo da comutação em esféricas normalizadas não é esperado.

Por outro lado, a mudança de direção pode ser relacionada à rotação cinemática da base, sendo que, em esférica, a base móvel dispensa rotação entre as componentes espaciais, enquanto que, em cartesiana, uma fixa representa a rotação em sua totalidade. Assim, na base ortonormal, as variações diferenciais que a base está relacionada primariamente à rotação infinitesimal.

Velocidade é uma variável independente da posição, ainda que ocorra vinculação diferencial entre posição e velocidade. Em contrapartida, a variação da base é expressa em relação aos deslocamentos diferenciais, ainda que a causa seja intrínseca ao invariante hiperbólico de velocidade. Como coordenada e velocidade são postas sobre mesma base, o significado espacial é obtido pela forma como a variação é induzida pela velocidade. Em outras palavras, a variação depende da velocidade com que o deslocamento ocorre, o que se resolverá no deslocamento mecânico.

A mudança de variável demarca a substituição de um sistema de deslocamento geométrico para um sistema deslocamentos mecânicos, e a comutação

entre caminhos é diferente nos dois casos. A distância diferencial entre dois pontos depende do caminho e da velocidade, evocando princípios variacionais e o conceito da ação estacionária. A comutação entre dois caminhos apresenta um efeito anisotrópico induzido pela velocidade,⁵⁰ o que não ocorre na geometria diferencial por ignorar os efeitos da velocidade ao descrever um espaço absoluto.

A determinação intrínseca da mudança de direção no espaço curvo ocorre, analiticamente, pela condição de rotação que a métrica impõe invariante hiperbólico da velocidade.⁵¹

Variações intrínsecas de direção $\partial_j \hat{\mathbf{e}}_i = \Gamma_{ij}^k \hat{\mathbf{e}}_k$ são manifestações mecânicas do estado inercial da velocidade pela condição implícita ao invariante hiperbólico que a métrica impõe a essa mesma velocidade.

A correlação entre a curvatura do movimento e a curvatura geométrica do espaço se estabelece em condições específicas.

Torção, no movimento, é uma condição anisotrópica induzida pela direção da velocidade e, por mobilidade da base, é possível uma condição de simetria, em que todos os $\tilde{\Gamma}_{mn}^\ell = \tilde{\Gamma}_{nm}^\ell$ para $m \neq n$. Nessa conjuntura, sem torção, há correspondência entre a curvatura mecânica e uma curvatura geométrica holonômica; entretanto, o deslocamento geométrico é um mapeamento pelo deslocamento mecânico.

Ou seja, partindo-se de um referencial fixo, é possível descrever uma superfície diferencial $\partial_r S$, mas essa superfície não é **restrição holonômica** ao movimento, ou seja, ela não define o valor de $\tilde{\Gamma}_{mn}^\ell$.

A velocidade é uma variável independente da posição, e a curvatura do espaço não se impõe como restrição holonômica do movimento. Se assim o fosse, a covariância não seria possível.⁵²

4.2.3 Segundo Enquadramento

O tratamento simbólico entre base coordenada e não-coordenada está a uma transformação de distância, ou melhor, na escala entre distâncias espaciais em distâncias coordenadas. O tratamento intrínseco deve ser possível, ao menos em coordenadas esféricas, pois os símbolos de Christoffel são favoráveis à representação.

No enquadramento por base normalizada, pretende-se o reverso da holonomia: em vez de definir base pela curvatura do espaço, chegar a uma curvatura do espaço por especificação da base. A falta de comutação em base normalizadas afeta a capacidade de aferir a continuidade do espaço por meio de coordenadas, o que é resolvido por substituição da representação mediante transformação, ao que se denominará transformações canônicas para formas generalizadas.

A existência da curvatura do movimento, mudança intrínseca de direção por manifestação da invariância hiperbólica de velocidade, devido aos efeitos cinéticos, nem sempre irá coincidir com curvatura do espaço. A correspondência entre as duas contrapartes na determinação intrínseca da curvatura envolve achar uma base móvel holonômica em que o sistema de coordenadas propicie na variação intrínseca a condição de simetria $\tilde{\Gamma}_{mn}^\ell = \tilde{\Gamma}_{nm}^\ell$ para $m \neq n$ e, com isso, torção é igualmente nula $T_{mn}^\ell = \tilde{\Gamma}_{mn}^\ell$.

⁵⁰O equacionamento desses efeitos na equação geodésica origina vis-redux.

⁵¹Estado inercial é intrínseco ao movimento geodésico.

⁵²Os símbolos de Christoffel representam a indução de direção pela métrica, enquanto torção torna-se o coeficiente de anisotropia da escolha da base.

Define-se o acoplamento diferencial pela base das direções de velocidade.

$$\tilde{\partial}_r \equiv \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_y \quad (4.9a)$$

$$r^{-1} \tilde{\partial}_\varphi \equiv -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_x + \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_y \quad (4.9b)$$

As equações vinculam a variação implícita ortonormal (lado esquerdo) à base direcional das velocidades (lado direito). Ou seja, partindo-se de um referencial fixo $\hat{\mathbf{x}}_n$, termo independente, é possível especificar uma base $e_n^s \tilde{\partial}_s = \hat{\mathbf{e}}_n$ para curva implícita a despeito de seu discriminante holonômico, portanto, abstendo-se de que a curva esteja definida sobre superfície holonômica nas coordenadas.

$$\tilde{\partial}_m(e_n^s \tilde{\partial}_s) = \tilde{\partial}_m \hat{\mathbf{e}}_n = \tilde{\Gamma}_{nm}^\ell = \tilde{\theta}_{nm}^\ell \quad (4.10)$$

Com isso, pode-se interferir na ordem de transformação: transforma-se o símbolo, não o operador. Assim, $e_s^n e_r^m \partial_m \hat{\mathbf{e}}_n = \tilde{\theta}_{sr}^\ell$, e o mesmo ocorre com o valor comutado. Condiz com a ordem pela qual as definições são estabelecidas: coordenada adota o valor intrínseco.

Considerando a transposição da transformação, e_s^n “torna-se linear” em relação à derivada do valor intrínseco, mas não na derivada do valor coordenado. Tal qual ocorre vinculação entre base de posição e velocidade em (4.9a) e (4.9b), e_s^n é função da velocidade, enquanto e_n^s é função da posição.

$$[e_m^r \partial_r, e_n^s \partial_s] \neq [\partial_m, \hat{\mathbf{e}}_n] \quad (4.11a)$$

$$[\partial_r, \partial_s] \equiv [e_r^m \partial_m, e_s^n \hat{\mathbf{e}}_n] \quad (4.11b)$$

Para expressar a torção,⁵³ mais uma vez a ordem das operações importa. Notar que deve-se primeiro transformar as vinculações dos símbolos individualmente, então tomar a variação e, somente depois, comutar.

A irregularidade no procedimento, em relação às operações convencionalmente prescritas para covariância, é seguida de irregularidades na correlação entre algumas das propriedades entre as duas sentenças. Entretanto, cada sentença, isoladamente, pertence à composição de um sistema que é invariante, dado o grupo de transformação.

Ocorre *transformação canônica*, no entendimento de que a mudança de base preserva propriedade interna relacionada ao invariante de velocidade, mas não a covariância entre os sistemas descritos nas respectivas sentenças.⁵⁴ Condizente com mudança de variável, mudança de base não-coordenada para base holonômica é uma mudança categórica. A mudança de base da variável velocidade para base com relação à variável coordenadas.

O ponto crítico é que a mudança de desigualdade para igualdade expressa vinculações diferentes, uma vez que, nas variáveis de uma equação, a mudança de categoria é interpretada como situação diferente. Ambas relacionadas à indução

⁵³Dado $T^k_{ij} := \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} - (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i)$, para $T^k_{ij} = 0^k_{ij}$, a holonômia é trivial quando $\Gamma^k_{ij} = 0$.

⁵⁴Proposição de transformação entre sistemas lagrangianos similar às transformações canônicas em mecânica hamiltoniana.

de variação intrínseca $\tilde{\Gamma}_{mn}^\ell$, a situação de torção da curvatura é relevante em coordenadas, enquanto que, para velocidade, não afeta o invariante hiperbólico.

Outra mudança categórica: em coordenadas, a indução da variação da velocidade tem causa holonômica, enquanto que nas variáveis cinemáticas, a indução da variação da velocidade tem causa no invariante hiperbólico.

Para ortonormal, não há congruência entre a comutação base não-coordenada e a comutação intrínseca em (4.11a). Ainda que haja o valor intrínseco esperado, as variações não são homólogas, portanto não-holonômicas. Não é possível descrever superfície riemanniana por não se poder representar continuamente pelas coordenadas as ocorrências intrínsecas, sendo, assim, *variedade topológica não-holonômica*.

Transposição de fatores em (4.11b) é uma mudança por transformação canônica, e a invariância da forma não produz um morfismo diferencial invertível (covariância entre as formas), assim como holonomia esférica não se transforma em cartesianas. O entendimento é que é possível achar uma base móvel, condição de simetria, em que todas as componentes $\tilde{\Gamma}_{mn}^\ell = \tilde{0}_{mn}^\ell$ para $m \neq n$. Com isso, a base cinética móvel mapeia um equivalente discriminante holonômico pela regularidade na posição que a simetria sob sistema de coordenadas proporciona. A mudança de categoria, que somente deve ocorrer quando em coordenadas holonômicas. Ao cartografar a topografia do espaço-tempo, a equação da forma analítica (3.66) ensina que ocorre variação em magnitude e variação em direção, (essa última coincide com a base móvel). O mapeamento no espaço pelo alinhamento com a diretriz resulta na mudança categórica da forma analítica; a decomposição mapeia a variação em magnitude (temporal), enquanto a variação em direção (espacial) é suprimida pela base móvel.

A base pela transformação canônica define uma *métrica generalizada*:

$$\hat{\mathbf{e}}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}_n = e_m^r \partial_r \cdot e_n^s \partial_s \quad (4.12)$$

É notório que a expressão assemelha-se Às **tétrades** [110]; entretanto, o propósito do texto é prosseguir com o estudo de outra forma de conexão que não recaia em holonomia de qualquer tipo, quer canônica, quer generalizada.

A conexão será para velocidade pela relação entre derivada direcional (canônica ou paramétrica) na produção de um símbolo intrínseco para continuidade e covariância diante da escolha de grupo de transformação.

4.3 Conexão e Compatibilidade

Avaliar a conexão promovida pela derivada direcional e sua compatibilidade com tensor métrico normalizado, formado por base não-holonômica.

Conexão, ora referenciada pela derivada direcional, ora pelo símbolo de variação intrínseca proposto por Christoffel. Além da covariância, o interesse está em como promove a continuidade.

Na mudança categórica, o símbolo de Christoffel é o fator de indução da variação da velocidade que decorre intrinsecamente da invariância da velocidade da luz. Em outras palavras, fator com que a rotação hiperbólica é produzida. A intensidade da variação intrínseca depende da velocidade desenvolvida e do alinhamento de sua direção com a curvatura espacial da métrica, diretriz. Assim, é esperada uma diferença anisotrópica; o que torna torção é um símbolo sem relevância no trato da continuidade.

O parágrafo anterior informa que dispensa torção na formulação da continuidade, mas não prova nem isenta a demonstração de continuidade. Também torna-se evidente que falta uma definição de continuidade adequada à base normalizada.

Continuidade refere-se à manutenção da rotação hiperbólica em relação à diretriz métrica. Assim como no caso holonômico não deve haver descontinuidade no espaço na alternância de caminhos, na métrica regular não deve haver descontinuidade na rotação hiperbólica, quer seja na rotação da base, quer seja na rotação das componentes contravariantes.

Na trajetória geodésica, o transporte paralelo ocorre pela variação nula da direção expressa na derivada direcional, em acordo com a rotação hiperbólica, que é a situação que preserva o invariante de velocidade. Omissos estão o que acontece fora da trajetória geodésica, propriamente referenciada pelo desvio que se faz a partir de uma geodésica.

Novamente, dessa vez para o desvio geodésico, a mudança categórica altera conceitualmente o equacionamento de representação. Enquanto, na holonomia, o desvio geodésico refere-se ao equacionamento de campo de Jacobi, na variante cinética pelo tensor normalizado, é feito pela equação geodésica rebalanceada.

As duas concepções de como o desvio ocorre são distintas, mas a comparação é instrutiva: o campo de Jacobi descreve o distanciamento entre duas geodésicas cuja separação medida é tomada sobre curvas de variação que também são geodésicas.[7] A separação é holonômica e relacionada com o tensor curvatura.

Na situação de movimento de um corpo pontual, torna-se interessante o desvio pela ocorrência do transvio em um descaminho que se extravia de qualquer geodésica. De outra forma, por Jacobi, tem-se a comutação entre geodésica, uma ocorrência geometricamente possível, mas sem causa mecânica, sendo, portanto, deslocamentos diferenciais, apesar de holonômicos, arbitrário.

Fazendo o entendimento geodésico atendido no princípio variacional, um caminho entre dois pontos, em que os deslocamentos dependem da posição e da velocidade, possui um único equacionamento que “minimiza” a ação. O que se procura no desvio é o equacionamento preterido na ação mínima. Os deslocamentos pretensamente virtuais tornam-se reais e o sistema assume nova dinâmica, desfazendo o prognóstico dos extremos que caracteriza o desvio. Ainda, pelo princípio variacional, a ação deixa de ser mínima, e o excesso configura uma expressão não-conservativa, que somente pode ser balanceada admitindo-se que seja causa do processo de emissão.

A manutenção do invariante de velocidade depende da existência contínua de uma direção geodésica para cada posição, sem que necessariamente seja a do itinerário percorrido. Consiste em refazer continuamente a direção geodésica relativa ao “arrasto do vetor tangente” na nova situação de transporte.

Adiante, equaciona-se o arrasto: situação na qual a taxa de variação do tangente não corresponde à variação intrínseca do tensor, enquanto que, na variação que este sofre, existe expressão contínua para o invariante de velocidade.

4.3.1 Compatibilidade

A compatibilidade métrica, ou de sua conexão, com derivada covariante é fundamental para a demonstração do transporte paralelo.

Métrica não varia pela derivada covariante; com isso, a conexão métrica preserva o tensor no transporte paralelo. Compatibilidade significa que o ân-

gulo entre dois tensores permanecerá o mesmo no deslocamento por transporte paralelo, o que é importante no invariante de ortogonalidade na seção seguinte.

Na variação intrínseca da base anholonômica, simetria não se confunde com a comutatividade da operação diferencial.⁵⁵

$$\Gamma_{ij}^k \hat{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial}{\partial x^j} \hat{\mathbf{e}}_i \neq \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \quad (4.13)$$

Com isso, elimina-se a necessidade de comutatividade corresponder à simetria pelos índices. A definição leva a:

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ik}^\ell g_{\ell j} + \Gamma_{jk}^\ell g_{i\ell} \quad (4.14)$$

Assim, sendo diligente no tratamento dos índices,⁵⁶ os coeficientes de conexão podem ser deduzidos intrinsecamente pela métrica (pela permutação cíclica dos índices). Para um elemento não-simétrico:

$$2\Gamma_{ij}^k g_{k\ell} = \partial_j g_{i\ell} + \partial_i g_{\ell j} - \partial_\ell g_{ji} \quad (4.15a)$$

$$= \partial_j g_{i\ell} + \partial_i g_{\ell j} + \partial_\ell g_{ij} \quad (4.15b)$$

Perceba que a manipulação de índices é feita pela antissimetria métrica, não qual não é mencionado o símbolo de Christoffel. A manipulação é seletiva, somente possível nos elementos antissimétricos, sendo que a métrica em esférica pode ser considerada uma antissimetria degenerada (indiferença apresentada em (3.2*)).

A manipulação deve ser suficiente para compatibilidade entre os *coeficientes de conexão*⁵⁷ e a métrica (ver eq. 3.19 em S. Carroll [8]). Pelas definições apresentadas até aqui, deve ser possível obter:

$$\nabla_\ell g_{ij} = 0 \quad (4.16)$$

Embora o resultado esteja em uma perspectiva riemanniana [6], [40], [57], há algumas nuances que precisam ser apontadas, na maior parte, pela consequência da transformação entre esféricas e cartesianas produzir coeficientes assimétricos.

Um primeiro ponto é que estamos tratando da variação intrínseca de base não-holonômica; (4.13), portanto, a existência (ou não) de uma definição dos símbolos pela métrica, quer por (4.15a) ou por (4.15b), não influencia a (4.16) por não-simetria da derivada segunda (teorema de Schwarz-Clairaut). O que aponta para como a derivada covariante opera. Por regra geral:

⁵⁵Simetria não se confunde com a (estrita) comutatividade da operação diferencial vista no teorema de Schwarz-Clairaut.

⁵⁶A notação empregada faz o índice da derivada sempre aparecer ao final, assim $\partial_k \hat{\mathbf{e}}_i = \Gamma_{ik}^\ell \hat{\mathbf{e}}_\ell$. S. Carroll [8] aponta, logo após apresentar (3.64), que não há um consenso, para então, logo após (3.67), no quarto item, apontar que denotará os índices de derivada ao final (o que é replicado em seu livro [9], p. 122), mas não faz nenhuma observação explícita para Christoffel em (3.27) nesse sentido. A forma estrita da definição do símbolo tem influência em 3.66 e, adiante, em torção.

⁵⁷Os coeficientes são equacionáveis pela métrica.

$$\begin{aligned}\nabla_k A_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} = & \partial_k A_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} \\ & + \Gamma_{km}^{i_1} A_{j_1 \dots j_n}^{m i_2 \dots i_n} + \dots + \Gamma_{km}^{i_1} A_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_{n-1} m} \\ & - \Gamma_{jk}^m A_{m j_2 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} - \dots - \Gamma_{jk}^m A_{j_1 \dots j_{n-1} m}^{i_1 \dots i_n}\end{aligned}\quad (4.17)$$

Derivada covariante, estrita distinção entre elementos covariantes e contravariantes $\mathbf{V} = V^\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu$. Percebe-se que a componente contravariante ganha um símbolo de Christoffel, enquanto o covariante perde um.

A definição apresentada por Grinfeld [43] para derivada covariante da base⁵⁸ é mais apropriada para a base da métrica normalizada.

$$\nabla_j \hat{\mathbf{e}}_i = \partial_j \hat{\mathbf{e}}_i - \Gamma_{ij}^k \hat{\mathbf{e}}_k = 0 \quad (4.18)$$

O que faz chegar em:

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ik}^\ell g_{\ell j} - \Gamma_{jk}^\ell g_{i \ell} = 0 \quad (4.19)$$

Fora isso, não é o caso de independência entre a métrica e os coeficientes, pois, apesar da assimetria, pode-se fazer (4.15b) dado a assimetria. A questão é torção, que existe em cartesianas, mas não em esféricas.

Sumarizando, na mudança categórica, a ênfase não está nos deslocamentos diferenciais, e a existência, ou não, de torção não afeta a continuidade por “falha do fechamento do paralelogramo”. Em contraponto, uma diferença anisotrópica é esperada.

4.3.2 Conexão Mecânica

Em base holonômica, a continuidade do deslocamento diferencial está relacionada à ausência de torção. Pela distinção categórica, a mesma condição não tem efeito para base anholonômica, que não apresenta obstáculos à continuidade nas situações propostas até então. Diferente do holonômico, a questão crítica torna-se contemplar todas as situações de deslocamento mecânico: conservativo e não-conservativo.

Para base normalizada, os símbolos de Christoffel representam a variação da base induzida pela velocidade, e torção torna-se uma medida anisotrópica.

Formular uma condição de continuidade do desvio geodésico que parta do princípio de deslocamentos mecânicos válidos requer alguma atenção. A comutação de caminhos não é movimento mecanicamente natural; a mudança arbitrária de curso representa uma causa sem efeito. Diferente do caso holonômico, pois a situação de desvio não se constitui uma alternativa geodésica.

Os deslocamentos mecânicos, por princípios variacionais⁵⁹, são estendidos para fazer distinção entre conservativo ou dissipativo.

1. O caso do deslocamento que realiza a ação estacionária deve corresponder a um caso inercial para definição do transporte paralelo (discriminante base).

⁵⁸Vide equação da referência (8.42) para base fixa em Grinfeld [43]. A base móvel segue a definição covariante-paramétrica dada aqui.

⁵⁹Deslocamentos propostos na análise por princípios variacionais dependem não somente da posição, como também da velocidade, em magnitude e direção

2. O caso do deslocamento que se desvia da ação estacionária, mas ainda assim deve cumprir o invariante hiperbólico: desvio do transporte paralelo. (caso em que a velocidade rejeita o excesso para se manter no invariante)

Como em base normalizada, busca-se a continuidade da rotação hiperbólica: existe expressão não-geodésica pela derivada direcional (conexão) em que ocorre a rotação hiperbólica.

No primeiro caso, inercial sem alteração da direção; no segundo, há balanço por agente externo: Infere-se que (1) deve haver um caso inercial que define o transporte paralelo; (2) desvio não altera a rotação hiperbólica.

Aproveitando-se de que a compatibilidade métrica preserva o ângulo entre vetores, o deslocamento mecânico da velocidade não altera a direção intrínseca: a velocidade é sempre ortogonal ao seu diferencial.

$$V^\mu \cdot \Delta V_\nu \rightarrow 0 \quad (4.20)$$

Levado ao limite, o diferencial torna-se rotação infinitesimal, que será, segundo sua forma hiperbólica, perpendicular ao vetor original. A regra da cadeia permite regredir ao diferencial do invariante de velocidade.

$$\Delta(V^\mu \cdot V_\nu) \rightarrow 0 \quad (4.21)$$

Aproveitando-se da equivalência na descrição da geodésica por princípios variacionais, a derivada covariante somente resulta na ação mínima quando o vetor velocidade se autotransporta paralelamente, condição em que é conservativa. Para o caso de “arrasto” do tensor, condição alternativa em que não se estabelece o transporte paralelo, o princípio da ação estacionária demonstra existência de uma ação mínima para cada trajeto.

O interesse está em formular o excesso feito ao mínimo estacionário pela sua relação com a projeção das direções tensoriais. Tomando dois pontos de um trajeto que se tornem infinitesimalmente próximos, haverá uma “direção de variação mínima” para posição e velocidade que conduz ao transporte paralelo, representado pela projeção que a velocidade faz com sua variação $\dot{V}^\mu V_\mu = 0$.

Porém, considerando, em virtude de circunstâncias excepcionais, que a taxa de variação a ser aplicada seja pela resultante $\dot{U}^\mu = \dot{V}^\mu + \dot{U}^\mu$, a qual abrange influências sobre o movimento que são alheias à variação estipulada, essa resultante gerará $\dot{U}^\mu V_\mu \neq 0$. A variação desconhecida torna o movimento alheio a qualquer geodésica, mas esta condição ainda pode ser retomada quando retirado o fator estranho.

Pretende-se evidenciar que a continuidade da forma hiperbólica de rotação existe mesmo na condição adversa à geodésica. Ou seja, a preservação do invariante de velocidade ⁶⁰ não é afetada por influências estranhas à métrica, apesar de transviar-se de qualquer caminho geodésico.

Na situação $\dot{U}^\mu V_\mu \neq 0$, obtém-se a medida da projeção que o ângulo entre os tensores produz. Apesar da falta de ortogonalidade, o tensor velocidade não deverá variar em magnitude e direção para além do invariante. Em termos

⁶⁰A preservação do invariante é suficiente para que a rotação hiperbólica não seja degenerada, admitindo-se que o invariante expressa uma relação hiperbólica que somente possa ser mantida por transformações igualmente hiperbólicas.

simples, o tensor estará “derrapando” e rejeitando a energia projetada, caso em que o invariante induz emissão. Ainda, se a velocidade não responde à solicitação da resultante, então está balanceada por uma contraforça. Anteriormente, na sec. 2.7.6, foi visto que a condição invariante produz “força” induzida pela velocidade, responsável pela variação de direção. Na exposição presente, a autoforça seria uma novidade, mas a forma induzida pela velocidade não seria um fenômeno inédito no texto presente. É crítico destacar que, enquanto a resolução de forças existe pelo equacionamento de equilíbrio, o (des)balanceamento de energia é analiticamente mais profundo, portanto, o primeiro a ser abordado.

O comentário inicial é que, condizente com a abordagem de abster-se das coordenadas generalizadas,⁶¹ a exposição à ação de forças de causa estranhas à métrica não pode ser evitada. Embora atípico, muito do que será tratado pode ser confrontado com enquadramentos conhecidos [24].⁶²

Em sua forma convencional, a mecânica lagrangiana, resumida em duas contribuições na comparação com a newtoniana, simplifica forças que não realizam trabalho (circulares e holonômicas) e exclui ações não-conservativas. Segue-se que a mecânica lagrangiana é expandida para incorporar as forças que a ação mínima se empenhou em eliminar, ou seja, elementos que independem da relação entre posição e velocidade do sistema. O desvio se expressa em Euler-Lagrange pela adição de uma força E_μ “externa” ao processo lagrangiano, presente na variante expandida.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = E_\mu \quad (4.22)$$

Não é esperado que a força E_μ seja neutra à variação espacial intrínseca, o que a coloca em contraparte da variação coordenada, resultando no transvio geodésico. Raciocinando pelo balanço energético, se a variação de energia cinética em $(\partial_\mu \mathcal{L})'$ equivaler ao trabalho realizado pelo deslocamento por E_μ , deixa-se de fora o trabalho realizado por $\partial_\mu \mathcal{L}$; em contraposição, se a energia cinética equivaler ao trabalho por $\partial_\mu \mathcal{L}$, então deixa-se de fora E_μ .⁶³ Ainda sobre a análise energética, um ponto de atenção está em $\partial_\mu \mathcal{L}$: é perene, uma vez que o espaço não deixa de existir, enquanto E_μ é determinado pelas condições circunstanciais.⁶⁴

A atuação de E_μ em manter o invariante de velocidade decorre, no caso

⁶¹Com respeito às coordenadas por distâncias espaciais, a seção 3.3 explana como coordenadas generalizadas e sua respectiva representação paramétrica inadvertidamente introduzem restrições holonômicas, confrontadas no texto que insere a nota 43. Já o texto que insere a nota 39 refere-se como *espaço ontológico*, enquanto a nota aponta que não se deve inviabilizar a possibilidade de outras concepções.

⁶²Cline repetidamente menciona *forças excluídas* do processo de dedução do lagrangiano, que são, então, incluídas em diversas formas de sistema expandido: tratamento por coordenadas generalizadas (quando possível a redução dos graus de liberdade), abordagem por multiplicadores de Lagrange e, por fim, abordagem explícita por forças generalizadas.

⁶³Em campo fraco, tem-se como exemplo a energia orbital específica. Uma manobra orbital injeta ou extrai energia do sistema. A despeito de toda manobra em si consumir energia química interna, o interesse é evidenciar o resultado manifesto mecanicamente: em um caso pode-se dizer que a energia da manobra foi absorvida pela órbita (o rejeito de gases ejetados vai para órbita menor); em outro pode-se dizer que emitiu energia (o rejeito de gases ejetados vai para órbita maior).

⁶⁴O sistema dinâmico pode constituir-se em um transitório ou tornar-se autossustentado.

emissivo,⁶⁵ da remoção do excesso de energia que o transvio gera, restaurando a condição geodésica. O ponto crítico é que a formulação seja conservativa pela reversibilidade do processo, o que é admissível caso haja polaridade E_μ e no trabalho pelo deslocamento que realiza. Assim, embora a equação não expresse o balanço convencional, é conservativa no sentido de que o movimento decai em energia pela mesma quantidade que seria necessária para sua ascensão, e o processo se apresenta viável sistematicamente nas equações. Nesse ponto não é lagrangiano, pois, embora uma parcela relacione-se à variação espacial, nem todos os casos possuirão contrapartida não é totalmente lagrangiana. Uma denominação mais apropriada é mecânica algébrica para um sistema conservativo por emissão/absorção.

Com as devidas ressalvas à dinâmica entre os fenômenos, a formulação algébrica encontra alguma semelhança no trabalho de Rayleigh[98][41], no propósito de estender a mecânica lagrangiana e manipulação não convencional de sua energia.

A função de dissipação de Rayleigh $\mathcal{R}(\mathbf{v}) = v^i v^j b_{ij}$ expressa uma forma de incluir forças dissipativas linearmente dependentes da velocidade. Os coeficientes b_{ij} (quando propriedade de um meio de distribuição homogênea) expressam constantes de proporção da força de reação à velocidade. A função opera de maneira bilinear, sendo positiva-definida pela sua relação com trabalho e, com isso, torna o processo irreversível e a resultante recai na direção do movimento.

Similarmente, para o transvio geodésico, é concebível que a função de emissão teria a forma: uma que função de emissão teria a forma:

$$\mathcal{E}_k^k = v_k(v^i v^j \mathcal{N}_{ij}^k) = v_k E^k \quad (4.23)$$

O símbolo $\mathcal{N}_{ij}^k = \dot{v}^k v_i v_j / v^4 \equiv \dot{v}^k g_{ij} / v^2$ idealiza o coeficiente para realização da emissão.⁶⁶ Possui os mesmos índices do símbolo de Christoffel, equivalendo a um processo de indução suplementar ao que ocorre em Γ_{ij}^k na função de preservar o invariante de velocidade. Tal qual ocorre no similar, a atuação em três operandos indica que nem sempre recai na direção do movimento, com o índice contravariante introduzindo novos graus de liberdade. Na definição $\mathcal{E}_k^k$, a contração dos símbolos é relacionada ao produto escalar $\dot{V}^\mu V_\mu$, similar ao obtido nas equações 2.86a e 2.86b quando o arranjo dos índices opera por 3.66. Fora da ortogonalidade, produz resultados com sinal associado à polaridade no fluxo de energia, condizente com indicação de emissão/absorção.

Ainda com relação às equações 2.86a e 2.86b, as variações intrínsecas e coordenadas são conjugadas, o que permite descrever o (des)balanço em um entendimento simplificado por mecanismo de emissão/absorção: a produção primária por uma das variações é consumida pela outra, sendo que, pelas condições de invariância, o desbalanço produz emissão.

Força de dissipação, por análise dimensional, deve ser tal que:

$$u^k E_k \propto \mathcal{E}_k^k \quad (4.24)$$

⁶⁵Absorção depende de a força cessar no ponto em que se encontra, iniciando um novo caminho geodésico; em caso contrário, o prognóstico é de reemissão.

⁶⁶A argumentação deixa de fora os fatores de Lorentz γ , e.g. $N_{ij}^k = (\gamma^2 a) / (\gamma^2 v^2)$, que eventualmente poderiam recair sobre a definição do símbolo.

A variação intrínseca opera pela variável de posição e a variação coordenada pela variável velocidade. Na replicação de Rayleigh, a dependência da velocidade ou da posição por $\mathcal{N}_{ij}^k$ reproduzirá a diferença observada em (4.22). Sejam $f^k(x)$ as funções de variação intrínseca e $a^k(t)$ as respectivas funções de variação coordenada. Pode-se escrever $\mathcal{N}_{ij}^k = \tilde{N}_{ij}^k - \hat{N}_{ij}^k$ pela composição das variações.

67

$$\hat{N}_{ij}^k = \frac{f^k u_i u_j}{u^4} \equiv \frac{f^k g_{ij}}{u^2} \implies \frac{\partial x^\ell}{\partial u^k} \frac{\partial \mathcal{E}_k^k}{\partial x^\ell} = \frac{u^s}{\dot{u}^k} (u_k u^i u^k \partial_\ell \hat{N}_{ij}^k) = \hat{E}_k \quad (4.25a)$$

$$\tilde{N}_{ij}^k = \frac{a^k u_i u_j}{u^4} \equiv \frac{a^k g_{ij}}{u^2} \implies \frac{\partial}{\partial u^k} \mathcal{E}_k^k = (u^i u^j \tilde{N}_{kij}) = \tilde{E}_k \quad (4.25b)$$

É esperado que, na ocorrência da rotação hiperbólica $R_{ij\ell}^k$, a curvatura intrínseca não viole o invariante, independentemente de qualquer velocidade. Pela variância e cooperação com Γ_{ij}^k na preservação do invariante, a variação do símbolo $\hat{N}_{ij}^k$ relacionado a algum arranjo sobre o tensor curvatura $R_{ij\ell}^k$ por uma constante adimensional,⁶⁸ assim:

$$\partial_\ell \hat{N}_{ij}^k \propto R_{ij\ell}^k \quad (4.26)$$

Seja $\tilde{R}_{ij\ell}^k$ a curvatura do movimento por variáveis coordenadas, obtida do equacionamento da variação de $\tilde{N}_{ij}^k$. No caso balanceado, a curvatura $\tilde{R}_{ij\ell}^k$ por coordenadas deve equivaler à curvatura intrínseca $R_{ij\ell}^k$. A ocorrência de transvio altera a medida coordenada da curvatura, mas, assim como posição e velocidade são independentes, a medida intrínseca da curvatura é independente.⁶⁹ Com isso, a diferença observada em (4.22) reproduz-se no não-balanceamento energético em $\mathcal{N}_{ij}^k$.

$$\partial_\ell \mathcal{N}_{ij}^k \propto \tilde{R}_{ij\ell}^k - R_{ij\ell}^k \quad (4.27)$$

A expectativa de preservação do invariante de velocidade e da forma hiperbólica da rotação: o excesso é rejeitado e há reação. A aceleração não produz a alteração esperada pela resultante da soma da curvatura com o a influência externa. Aceleração e velocidade permaneceram ortonormais, mas com alteração na direção geodésica, ou seja, a intensidade mantém a magnitude do invariante, mas muda de direção ao esperado pela curvatura intrínseca. Na perspectiva dinâmica, aparece uma reação à variação da magnitude do invariante. Na perspectiva energética, uma parcela é absorvida pela reconfiguração da composição

⁶⁷A equivalência apontada ocorre pela similaridade na operação, o que acontece após a contração.

⁶⁸Considerando o emprego de $\mathcal{E}_\mu^\mu$, em que possui dimensões de potência específica $[\mathcal{E}_\mu^\mu] = \text{L}^2 \text{T}^{-3}$, o símbolo $\mathcal{N}_{ij}^k$ possui dimensões $[\mathcal{N}_{ij}^k] = \text{L}^{-1}$. O símbolo $\partial_\ell \mathcal{N}_{ij}^k$ e $R_{ij\ell}^k$ dimensões L^{-2} .

⁶⁹Curvatura intrínseca, variação de segunda ordem da base, dá a indicação para taxa de variação em conformidade geodésica para uma posição. Velocidade coordenada não entra na composição da intrínseca. Caso contrário, redefiniria a geodésica e o transporte paralelo.

“potencial-cinematica” do transvio, enquanto o excedente é rejeitado por dois fatores: pela mudança de direção, a força externa não consegue realizar trabalho; e pela reação, também não o faz.

Similar à equivalência entre a derivada direcional e a equação de Euler-Lagrange, o transvio pela forma expandida em (4.22) deve possuir uma derivada semelhante, que difere a situação geodésica pelo desbalanço do resultado não-nulo.

$$\nabla_{u_k} U^j = (\hat{\mathbf{e}}_j U^k \partial_k + U^k \Gamma_{jk}^i \hat{\mathbf{e}}_i) U^j = E^j \hat{\mathbf{e}}_j = U^j U^k \mathcal{N}_{jk}^i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.28)$$

Após substituição por (4.25a) e (4.25b), e rearranjando, chega-se a:

$$\nabla_{u_k} U^j = (\hat{\mathbf{e}}_j U^k \partial_k + U^k \Gamma_{jk}^i \hat{\mathbf{e}}_i + U^k \hat{N}_{jk}^i \hat{\mathbf{e}}_i) U^j = \tilde{E}^j \hat{\mathbf{e}}_j \quad (4.29)$$

Em uma leitura inicial, a ação da influência de origem externa ⁷⁰, expressa no termo $U^J U^k \hat{N}_{jk}^i = \tilde{E}^j$ deverá produzir o extravio da condição geodésica pelo descaminho que produz $U^J U^k \Gamma_{jk}^i$, o que se manifesta na reação $\tilde{E}^j$.

O formalismo do balanço energético é simplificado pelas expressões obtidas da geodésica transcrita[72]. Decomposta na variação intrínseca e variação coordenada, o caso geodésico escreve-se:

$$\dot{V}^\mu = \mathcal{A}^\mu + \mathcal{F}^\mu = 0 \quad (4.30)$$

O produto $\dot{V}^\mu V_\mu$ é trivialmente nulo, mas as parcelas definem uma linha de ação. Por ortogonalidade, deve-se ter valores nulos e, condizente com a compatibilidade métrica obtida na seção 4.3.1, os ângulos são preservados no transporte paralelo.

O deslocamento mecânico por rotação hiperbólica é invariante e dá a direção intrínseca pela relação de ortogonalidade:

$$V^\mu \mathcal{F}_\mu = 0 \quad (4.31a)$$

Na condição de transporte, a variação coordenada $\mathcal{A}^\mu$ segue a direção do deslocamento mecânico, preservando a direção intrínseca dada por $\mathcal{F}^\mu$. A variação coordenada segue a mesma ortogonalidade.

$$V^\mu \mathcal{A}_\mu = 0 \quad (4.31b)$$

Uma velocidade U^μ não-geodésica, cuja variação coordenada seja $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$, deverá respeitar o invariante de velocidade em $U^\mu \tilde{\mathcal{A}}_\mu = 0$, ou seja, não se observa em coordenadas a violação da velocidade da luz. Uma primeira caracterização do transvio é feita em relação à componente intrínseca com $U^\mu \mathcal{F}_\mu \neq 0$. Por essa

⁷⁰Também por autoforça no caso de espontâneo ou desequilíbrio sistêmico. A tendência ao equilíbrio no processo de emissão (pois excesso é rejeitado) é a propensão natural na vinculação entre variação espacial e variação temporal. Entretanto, o pressuposto não evita que a configuração sistêmica do problema, outras condicionantes do equilíbrio, torne a emissão autossustentada (decaimento).

última definição, deve ser possível decompor a velocidade $U^\mu = V^\mu + \mathcal{U}^\mu$ de forma a encontrar uma velocidade V^μ ortogonal tal que $\mathcal{F}_\mu V^\mu = 0$.⁷¹

A derivada direcional de U^μ será, seguindo a substituição dos termos da geodésica transcrita em (4.29) e outras sobre $\mathcal{N}_{ij}^k = \tilde{N}_{ij}^k - \hat{N}_{ij}^k$, escrita como:

$$\nabla_u U_\mu = \tilde{\mathcal{A}}_\mu + \mathcal{F}_\mu + \hat{E}_\mu = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu U_\mu}{U_\sigma U^\sigma} \quad (4.32)$$

A derivada do produto $(U^\mu U_\mu)'$ resulta em uma segunda caracterização do transvio, observando resultado $\tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu$ não-ortogonal.

$$U^\mu \tilde{\mathcal{A}}_\mu + U^\mu (\mathcal{F}_\mu + \hat{E}_\mu) = \tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu \quad (4.33)$$

Na convergência para o caso geodésico, se $U^\mu \hat{E}_\mu \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu$, então $\tilde{\mathcal{A}}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu$ e $U_\mu \rightarrow V_\mu$.⁷² Como pela condição invariante $U^\mu \tilde{\mathcal{A}}_\mu = 0$, o balanço é restrito às parcelas não-coordenadas.

$$U^\mu (\mathcal{F}_\mu + \hat{E}_\mu) = \tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu \quad (4.34)$$

O trabalho realizado por $\hat{E}_\mu$ equivale ao trabalho sofrido por $\mathcal{F}_\mu$ (em correspondência com a produção cinética) mais a emissão $\tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu$ do excesso que não é absorvido. Parte da energia da força é absorvida em uma nova configuração do sistema, até ser rejeitada.

$$U^\mu \hat{E}_\mu = \tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu - U^\mu \mathcal{F}_\mu \quad (4.35)$$

Nesse novo balanço, reiterar que $U^\mu \hat{E}_\mu = \tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu$ somente existe geodesicamente. Fora dessa condição, progridem em taxa de variação distinta pelo exposto em $\partial_\ell \mathcal{N}_{jk}^i$ na equação (4.27).

Sumarizando o processo geral em uma sentença: a variação coordenada $\tilde{\mathcal{A}}_\mu$ acomoda, pelo limite do invariante em U^μ , as influências $\hat{E}_\mu$ e $\mathcal{F}_\mu$, fazendo o excesso ser emitido na forma de $\tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu$.

A situação é direcional e possui particularidades. Para o caso de E^μ ser simultaneamente ortogonal a $\mathcal{F}^\mu$ e a velocidade U^μ , essa torna-se coincidente com V^μ .⁷³ Esse caso conservativo configura uma forma anômala de geodésica, com aplicação quântica[69]. Outro caso é o de decaimento espontâneo, em que há desequilíbrio que desencadeia autoforça[70]. A diversidade de casos, embora produtiva, desfavorece consolidar um fator comum.

A seção seguinte busca, de uma maneira prática, que a demonstração não dependa de perspectivas conservativas ou dissipativas, ou ainda que se faça distinção se seguem por trajetória geodésica ou desvio dela.

Pela variação direcional do símbolo $\hat{N}_{jk}^i$, a responsabilidade da rotação hiperbólica transita para o tensor curvatura $R_{ij\ell}^k$, e torna oportuno o estudo pelo deslocamento da base pelo seu transporte hiperbólico.

⁷¹A exigência é que seja o valor de menor diferença, ou seja, a geodésica mais próxima, o que não necessariamente precisa ser único.

⁷² Outras possibilidades: se $U^\mu E_\mu \rightarrow 0$ (tornar-se ortogonal), conseqüentemente $\mathcal{E}_\mu^\mu \rightarrow 0$ pela definição em comum. A forma de extinção da força depende da definição do problema. Ver adiante o texto que introduz 73.

⁷³ Ver o texto que antecede as equações (2.98a) e (2.98b) e confrontar com nota 72.

4.4 Curvatura Intrínseca (do Movimento)

Curvatura intrínseca refere-se à variação de segunda ordem da base. Pela mudança categórica promovida na especificação da base, o tensor caracteriza a curvatura em relação à variável cinemática. Com isso, a conexão encontra uma condição de continuidade pertinente ao processo: manutenção da forma hiperbólica de rotação.

O tensor métrico normalizado é constituído de duas curvaturas principais, uma espacial e outra temporal, que, pela afinidade com a variável cinemática, estabelecem a assinatura hiperbólica do tensor velocidade.

O tensor possui módulo constante e a sua transformação pelo movimento no espaço-tempo implica em sua rotação. Seguindo que o tensor preservará a relação hiperbólica entre as componentes espacial e temporal somente ao se transformar por rotação hiperbólica, tem-se que o invariante transita a condição de forma para a o parâmetro espacial. Nesses termos, a velocidade limite condiciona a forma do espaço: escolhido o parâmetro espacial pela diretriz, a condicionante estará na capacidade desse parâmetro produzir a rotação hiperbólica necessária ao invariante. Uma representação no espaço, se existe, expressa quantas e quais as parametrizações possíveis.

Em uma problematização alternativa, considera-se a existência para investigar a concordância da base cinemática pela sua parametrização espacial. A definição normalizada da métrica em todo o espaço é suficiente para a condição estática, entretanto não dispensa demonstrar não haver impeditivo dinâmico no transporte pela conexão. Torna-se necessário que as taxas de variação, na direção em que elas estejam definidas, sejam condizentes com o que é requerido da continuidade paramétrica da transformação: ao passar para posição subsequente, o valor obtido é independente do caminho.⁷⁴ Uma forma simples é por função de conformidade que atenda ao teorema do gradiente.

O desenvolvimento explora as próprias propriedades hiperbólicas de autossimilaridade exibidas pela métrica. A forma hiperbólica da rotação é caracterizada apropriadamente pela razão entre os participantes. A taxa de variação dos elementos base em relação ao espaço, mesma razão que os elementos em si. As taxas relacionadas contraem-se em uma função escalar característica, até então, implícita.

O resultado funcional da variação segunda delimita um discriminante que equivale ao escalar tensor curvatura. A regularidade das relações internas e sua estabilidade estrutural invariante apontam estrutura primordial, que se reduz a uma identidade sobre si mesma, não ocorre por vinculação ou acoplamento quaisquer.

As consequências na interpretação da estrutura do espaço-tempo são analisadas pela velocidade de propagação (ou a projeção da variação espacial no tempo), que satisfaça a simultaneidade e produza uma curvatura média.

O entendimento no categórico cinemático vem da ação de Hilbert, entre outros equacionamentos.

4.4.1 Curvaturas Principais e Taxas Relacionadas

As curvaturas principais, no tensor métrico normalizado, são apresentadas apropriadamente na escolha da forma esférica.

⁷⁴A dispensa de trajetória geodésica atende à condição mais geral de abranger emissão.

Na variação coordenada, a despeito da mobilidade da base, a variação intrínseca não se confunde com a variação paramétrica, pois, pela normalidade da métrica, restringem-se os símbolos de Christoffel àqueles de variação intrínseca.

A métrica não possui variação intrínseca no tempo e a variação espacial restringe-se à diretriz. Em consequência, o tensor apresenta propriedades e relações entre as curvaturas principais e suas variações paramétricas que, pela assinatura, são similares à equação (paramétrica ou não) da hipérbole.

$$y = \frac{1}{x} \quad \implies \quad \frac{y}{x} = - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (4.36)$$

A contração temporal é conjugada à dilatação espacial. Pelo determinante, duas curvaturas principais são recíprocas.

$$\delta^{00}\delta^{11}g_{00}g_{11} = -1 \quad (4.37)$$

A expressão condiz com a “assinatura” métrica $(+, +, +, +)$, em que o sinal é interno ao símbolo.⁷⁵ Apesar disso, a forma hiperbólica de variação se apresenta mesmo com o sinal implícito, o que é observado fazendo a derivada do determinante pela variação espacial:

$$\partial_1(\delta^{00}\delta^{11}g_{00}g_{11}) = 0 \quad (4.38)$$

A condição de normalidade determinante estrutura a relação implícita entre as componentes métrica. O resultado da derivada anterior pode ser escrito como:

$$\frac{\delta^{00}\partial_1g_{00}}{\delta^{11}\partial_1g_{11}} = -\frac{\delta^{00}g_{00}}{\delta^{11}g_{11}} \quad (4.39)$$

A despeito de a derivada do determinante poder ser tomada por qualquer direção, apenas pela diretriz o valor não trivial pode ser elaborado na razão entre as curvaturas. Subentendida a direção de variação, evidencia-se forma hiperbólica comparando-se a expressão dada em (4.36) com o resultado anterior na substituição por:

$$\frac{\delta^{00}\partial_1g_{00}}{\delta^{11}\partial_1g_{11}} = \delta^{00}\delta_{11}\frac{\partial g_{00}}{\partial g_{11}} \quad (4.40)$$

A propriedade expressa por essa última equação é ordinária da operação diferencial, e sua importância se deve à existência de (4.39), por se expressar pela razão entre as curvaturas espacial e temporal. Para relacionar as variações de segunda ordem por essa mesma razão hiperbólica, é preciso haver propriedade funcional entre as partes, e reiteradamente para terceira ordem. A listagem de taxas relacionadas de ordens superiores continua indefinidamente, embora convencionalmente somente a segunda ordem seja relevante nos processos mecânicos. Por outro lado, chega-se a uma síntese quando se encontra expressão que se contrai em um escalar, o que destaca que as razões apresentadas até

⁷⁵Ver também (2.41) e (2.42a) a (2.42d)

então são covariantes, e pelos índices, contraem-se. A substituição derivada da métrica pelos símbolos de Christoffel.

A razão entre a curvatura espacial e temporal é trazida indiretamente pelas taxas de variação na consideração da razão entre (2.43a) e (2.43b)

$$2g_{00}\Gamma_{01}^0 = \partial_1 g_{00} \quad (4.41a)$$

$$-2g_{11}\Gamma_{00}^1 = \partial_1 g_{00} \quad (4.41b)$$

A razão entre os dois termos do lado esquerdo é unitária pelas respectivas igualdades do lado direito. Com isso, pode-se obter a proporcionalidade dos símbolos com a razão hiperbólica. É interessante ressaltar que o símbolo Γ_{00}^1 não está presente no determinante da métrica, enquanto uma resolução por (2.43a) e (2.43b) redundaria em expressões conhecidas.

A derivada não altera a proporcionalidade entre as equações, ao mesmo tempo que eleva a ordem. Ainda, permite fatorar a razão pretendida.

$$2g_{00}\partial_1\Gamma_{01}^0 + 4g_{00}\Gamma_{01}^0\Gamma_{01}^0 = \partial_{11}g_{00} \quad (4.42a)$$

$$-2g_{11}\partial_1\Gamma_{00}^1 - 4g_{11}\Gamma_{11}^1\Gamma_{00}^1 = \partial_{11}g_{00} \quad (4.42b)$$

Os termos do lado esquerdo de (4.42a) e (4.42b) são expressões do tensor de Ricci para o tensor normalizado.

$$\frac{R_{00}}{R_{11}} = \frac{g_{00}}{g_{11}} \quad (4.43)$$

A equação acima expressa a igualdade que as parcelas contraídas das dimensões espacial e temporal do escalar de Ricci, o mesmo balanço entre as curvaturas conjugadas pela variação do determinante.

$$g^{00}R_{00} - g^{11}R_{11} = 0 \quad (4.44)$$

O escalar de curvatura, propriamente dito, sai pela soma. Para a métrica normalizada, a relevância de que o tensor de Ricci seja hiperbólico está em acompanhar a variação da base para operação de comutação, e o balanço é condizente com o que haverá na base, em consequência da métrica.

Não é inesperado que a expressão mais adequada para a contração da razão em um escalar seja similar ao escalar de Ricci. O inconveniente está em relacionar o tensor curvatura em uma construção que não recorra aos fundamentos holonômicos. Além disso, a dedução por curvatura seccional não funciona: não há alternância entre caminhos por não haver apenas uma dimensão espacial.⁷⁶

Até então, considerou-se apenas a variação do tensor métrico no espaço. Para chegar a uma função característica, será preciso considerar a variação intrínseca da base tensorial que, ao contrário da métrica, também possui variação intrínseca pela variação da escala temporal.

⁷⁶Curvatura seccional envolve o desvio geodésico por campo de Jacobi, findando em uma superfície que atua como restrição holonômica. Também é oportuno mencionar que, para curvatura seccional, “desvio” é entendido como a distância de separação (afastamento, distanciamento) por construção geométrica, enquanto que, para o tensor normalizado, “desvio” vem no sentido de transvio (descaminho, extravio) por construção mecânica.

4.4.2 Curvatura (Função Escalar)

As relações hiperbólicas do gradiente métrico são fechadas sobre si. Abstraído do movimento por um corpo, a métrica induz o próprio movimento. O mesmo autodeterminismo deve se apresentar na base e indicar o caminho de propagação pelo autotransporte.

Condizente com a métrica, a base normalizada deve seguir a mesma variação hiperbólica. Consequentemente, é esperado um resultado que expresse a equivalência entre as duas taxas, apesar da dessemelhança que existe: os tensores da base estão sujeitos a variação intrínseca com a variação temporal, o que não ocorre na métrica.

A métrica não varia intrinsecamente com o passar do tempo, nem com a escala de tempo (que ela define), mas ela dá a definição de tempo para os outros tensores. A variação da base torna-se o motivo de haver um termo extra na derivada covariante, ao mesmo tempo que o termo extra $\partial_0 \mathcal{L}$ em (2.71) que leva à definição (2.73).

Condizente com a métrica ser a forma bilinear da base, a base deve satisfazer a decomposição:

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} \equiv (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\mu) \hat{\mathbf{e}}_\nu + \hat{\mathbf{e}}_\mu (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\nu) \quad (4.45)$$

Para a variação de índice temporal:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} \equiv (\partial_0 \hat{\mathbf{e}}_\mu) \hat{\mathbf{e}}_\nu + \hat{\mathbf{e}}_\mu (\partial_0 \hat{\mathbf{e}}_\nu) = 0_{\mu\nu 0} \quad (4.46)$$

A substituição pelos símbolos de Christoffel segue para as definições da métrica normalizada, (2.59b)

$$\sum_\nu \partial_0 \hat{\mathbf{e}}_\nu = \partial_0 \hat{\mathbf{e}}_0 + \partial_0 \hat{\mathbf{e}}_1 = \Gamma_{00}^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \Gamma_{10}^0 \hat{\mathbf{e}}_0 \quad (4.47)$$

Os valores individuais dos $\hat{\mathbf{e}}_\mu (\partial_0 \hat{\mathbf{e}}_\nu)$, ou da soma que se faça entre eles, são conferidos nos resultados em (2.43a) e (2.43b).

$$g_{11} \Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2} \partial_1 g_{00} \quad (4.48a)$$

$$g_{00} \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \partial_1 g_{00} \quad (4.48b)$$

Simplificadamente, uma contração espacial é balanceada por uma dilatação temporal. A métrica é constante pelo balanço que proporciona. Nuance: não se trata de variação com a passagem do tempo, mas sim da propensão pela variação com a mudança de escala temporal, uma vez que a variável de derivação $x^0 = ct$.
77

No gradiente temporal, o resultado de cada termo individual é ortogonal à direção original, resultando $\hat{\mathbf{e}}_0 (\partial_0 \hat{\mathbf{e}}_0) = 0$ e $\hat{\mathbf{e}}_1 (\partial_0 \hat{\mathbf{e}}_1) = 0$. Uma vez que as variações na dimensão temporal sejam nulas, não é possível tomar a razão entre

⁷⁷ A escala de tempo pela sua relação com a distância que pode ser percorrida pela luz. A forma como o tempo é medido para a base muda conforme a definição de tempo pela métrica modifica-se em razão da forma como a métrica afeta a propagação da luz.

elas, tal qual em (4.39). Por outro lado, a própria nulidade representa um balanço entre contração espacial e dilatação temporal.

Embora não sejam elementos do gradiente métrico, a soma dos produtos por índices alternados $\hat{\mathbf{e}}_1(\partial_0\hat{\mathbf{e}}_0) + \hat{\mathbf{e}}_0(\partial_0\hat{\mathbf{e}}_1) = 0$, complementa o balanço na variação temporal.

A medida abrangente para acompanhar a diversidade na combinação de índices é o traço da derivada do tensor métrico. A correspondência pela base vem na forma matricial, o que também permite observar alternância de direção.

$$\partial_0 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^1 \\ \Gamma_{10}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

A variação espacial métrica pela decomposição pela base são equivalentes. Sem maiores destaques, as variações espaciais pela base apresentam-se como:

$$\sum_{\nu} \partial_1 \hat{\mathbf{e}}_{\nu} = \partial_1 \hat{\mathbf{e}}_0 + \partial_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \Gamma_{01}^0 \hat{\mathbf{e}}_0 + \Gamma_{11}^1 \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (4.50)$$

$$\partial_1 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{01}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Como as variáveis e as variações são independentes, pela linearidade na composição das formas matriciais, as duas matrizes são combinadas. Uma medida de magnitude é obtida expondo a matriz envolvida como um operador bilinear e sumalizando as variações de primeira ordem.

$$\sum_{\mu\nu\sigma} \hat{\mathbf{e}}_{\mu}(\partial_{\sigma}\hat{\mathbf{e}}_{\nu}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{01}^0 & \Gamma_{00}^1 \\ \Gamma_{10}^0 & \Gamma_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

O resultado equivale à soma dos semi-traços para as direções do gradiente espaço-temporal da métrica. O resultado possui contribuição apenas pela variação espacial.

$$\sum_{\sigma} \text{tr}(\partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) = \delta^{00} \partial_1 g_{00} + \delta^{11} \partial_1 g_{11} = \delta^{00} 2g_{00} \Gamma_{01}^0 + \delta^{11} 2g_{11} \Gamma_{11}^1 \quad (4.53)$$

Embora o resultado satisfaça a expectativa, o que se torna interessante é a ausência de variação temporal da métrica pela equivalência de sua decomposição em fatores da base que não são nulos. A propriedade sugere que haja balanço entre as componentes e, conseqüentemente, um discriminante (expressão depende apenas das propriedades) que seja invariante.

Variações de segunda ordem criam mais oportunidades de correlações entre os termos. As variações pela base tomam como referência a métrica; assim, para cada termo em:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\rho} \partial_{\sigma} \partial_{\rho} g_{\mu\nu} &= (\partial_0 + \partial_1)(\partial_0 + \partial_1) g_{\mu\nu} \\ &= (\partial_0 \partial_0 + \partial_0 \partial_1 + \partial_1 \partial_0 + \partial_1 \partial_1) g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Na combinação em duplas, cada nova variação afeta a precedente; entretanto, a métrica não depende do tempo, nem sua derivada, produzindo simplificações. As permutações pela associatividade entre os “produtos” dos operadores são enumeráveis: a variação temporal do gradiente, $\partial_0(\partial_0 + \partial_1)g_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu\sigma 0}$; a variação espacial do gradiente $\partial_1(\partial_0 + \partial_1)g_{\mu\nu} = \partial_1\partial_1g_{\mu\nu}$. Comutando as anteriores pelo produto, tem-se o gradiente da variação espacial, $(\partial_0 + \partial_1)\partial_0g_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu 0\sigma}$, e o gradiente da variação espacial, $(\partial_0 + \partial_1)\partial_1g_{\mu\nu} = \partial_1\partial_1g_{\mu\nu}$; a soma das variações reiteradas, $(\partial_0\partial_0 + \partial_1\partial_1)g_{\mu\nu} = \partial_1\partial_1g_{\mu\nu}$, e variações alternadas, $(\partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0)g_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu\bullet\bullet}$. O caso extra é a comutação entre operadores. ⁷⁸

$$(\partial_0\partial_1 - \partial_1\partial_0)g_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu\star\star} \quad (4.55)$$

A base possui uma situação análoga, porém com variação intrínseca no tempo.

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\rho} \partial_\mu \partial_\nu \hat{\mathbf{e}}_\sigma &= (\partial_0 + \partial_1)(\partial_0 + \partial_1)\hat{\mathbf{e}}_\mu \\ &= (\partial_0\partial_0 + \partial_0\partial_1 + \partial_1\partial_0 + \partial_1\partial_1)\hat{\mathbf{e}}_\mu \end{aligned} \quad (4.56)$$

Similar a (4.45), deve haver a equivalência entre as variações de segunda ordem da base pela operação bilinear correspondente na métrica.

$$\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} \equiv (\partial_\sigma \partial_\rho \hat{\mathbf{e}}_\mu) \hat{\mathbf{e}}_\nu + (\partial_\rho \hat{\mathbf{e}}_\mu)(\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\nu) + (\partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\mu)(\partial_\rho \hat{\mathbf{e}}_\nu) + \hat{\mathbf{e}}_\mu(\partial_\sigma \partial_\rho \hat{\mathbf{e}}_\nu) \quad (4.57)$$

A operação da métrica é igual, independentemente da ordem de derivação. No lado direito da equação anterior, os termos intermediários cancelam-se na comutação, entretanto os termos das extremidades não.

$$\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} \quad (4.58)$$

Somente após enunciar a comutação, pode-se definir os índices irresolutos em (4.55), mas estritamente para o tratamento da métrica, deixando de fora a contraparte na equivalência em (4.57). Para satisfazer essa equivalência, deve-se remover uma quantidade $R_{\mu\sigma\rho}^\alpha$ referente à comutação da base. ⁷⁹

$$(\partial_\sigma \partial_\rho - \partial_\rho \partial_\sigma)g_{\mu\nu} = \left((\partial_\sigma \partial_\rho - \partial_\rho \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_\mu \right) \hat{\mathbf{e}}_\nu - \left(R_{\mu\sigma\rho}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha \right) \hat{\mathbf{e}}_\nu = 0_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.59)$$

Ainda, se $\partial_\sigma \partial_\rho \hat{\mathbf{e}}_\mu = \Theta_{\mu\sigma\rho}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha$ e a forma alternada $\partial_\rho \partial_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\mu = \Theta_{\mu\rho\sigma}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha$, então, no caso não-trivial de $\Theta_{\mu\sigma\rho}^\alpha \neq 0_{\mu\sigma\rho}^\alpha$, o balanço na soma implica no desbalanço da diferença.

⁷⁸ No caso da métrica regular, o resultado trivial por $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ esconderia identidade de simetria entre o primeiro e segundo índices; assim, a indefinição da operação é resolvida de forma sistêmica pela derivada covariante temporal.

Em geral, teríamos: $(\partial_\rho \partial_\sigma - \partial_\sigma \partial_\rho)g_{\mu\nu} = -R_{\mu\rho\sigma}^\alpha g_{\alpha\nu} - R_{\nu\rho\sigma}^\alpha g_{\alpha\mu}$. Distinta da derivada covariante, a variação intrínseca é removida e resulta em $(\nabla_\rho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho)g_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu\rho\sigma}$.

⁷⁹ Aqui, há a particularidade da variação na variável temporal ser nula, que, por duas curvaturas, sustenta o resultado. A intenção é que, pela identidade mencionada na nota 78, restaure-se a “distributividade” da operação na métrica.

$$(\partial_\sigma \partial_\rho + \partial_\rho \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_\mu = 0_{\mu\sigma\rho} \quad (4.60a)$$

$$(\partial_\sigma \partial_\rho - \partial_\rho \partial_\sigma) \hat{\mathbf{e}}_\mu \neq 0_{\mu\sigma\rho} \quad (4.60b)$$

Alguma simplificação pode ser feita, ponderando pelo número de dimensões que têm efeito na representação dos índices. Primeiro, os dois últimos índices de $R_{\mu\sigma\rho}^\alpha$ se referem à derivação, que pela comutação impõe $\sigma \neq \rho$. Segundo, nos dois primeiros índices, μ representa o tensor da base sob derivação, e σ , a mudança de direção que a derivação promove. Assim, para expressar a mudança de direção, temos que $\sigma \neq \mu$. Com isso, há duas curvaturas principais que irão se converter em duas variáveis de índice, o que leva à repetição de índices entre o primeiro e o último par de índices: se o primeiro par é $\alpha\beta$, em qualquer ordem, o segundo também será $\alpha\beta$, não necessariamente na mesma ordem, com alguma convenção sobre sinal adotada, e.g., $R_{\beta\beta\alpha}^\alpha = -R_{\beta\alpha\beta}^\alpha$. Terceiro, a métrica diagonal possui somente índices simétricos, então $-R_{\beta\alpha\beta}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha$ somente será produtivo se multiplicado por $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$. Por fim, se $g_{\alpha\alpha} = -g^{\beta\beta}$, então $-R_{\beta\alpha\beta}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha = R_{\beta\alpha\beta}^\alpha g^{\beta\beta}$, e a expressão se contrai em um escalar.

$$([\partial_\rho, \partial_\sigma] \hat{\mathbf{e}}_\mu) \hat{\mathbf{e}}_\nu \rightarrow ([\partial_\mu, \partial_\nu] \hat{\mathbf{e}}_\mu) \hat{\mathbf{e}}_\nu = (R_{\mu\mu\nu}^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu) \hat{\mathbf{e}}_\nu = R_{\mu\mu} g_{\nu\nu} \quad (4.61)$$

O arranjo na forma matricial facilita a visualização na expansão dos índices.

$$\partial_0 \partial_0 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^1 \\ \Gamma_{10}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^1 \\ \Gamma_{10}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Para o índice temporal, é esperado que, pela correspondência com a métrica, chegue-se a um valor nulo, o que é demonstrado substituindo-se a expressão em (4.57) e tomando que $g_{11}\Gamma_{00}^1 + g_{00}\Gamma_{01}^0 = 0$

A componente radial corresponde a $\partial_1 \partial_1 g_{11}$

$$\partial_1 \partial_1 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \Gamma_{01}^0 & 0 \\ 0 & \partial_1 \Gamma_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{01}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{01}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0 & 0 \\ 0 & \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Os índices alternados são anti-diagonais (produzem valor nulo, o que é esperado quando derivam pelo tempo).

$$\partial_0 \partial_1 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{01}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^1 \\ \Gamma_{10}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\ \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

A forma alterna:

$$\partial_1 \partial_0 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 \Gamma_{00}^1 \\ \partial_1 \Gamma_{10}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^1 \\ \Gamma_{10}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{01}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{11}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 \\ \partial_1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Seguindo o que se propõe em (4.59), a diferença dada por (4.65) menos (4.66) deve ser anulada por uma operação complementar. Tomando a matriz que resulta dessa diferença, o produto que ela gera é anulado, peculiarmente, por uma permutação da antidiagonal pela diagonal. Tomando que $\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 = 0$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -\partial_1 \Gamma_{10}^0 - 2\Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 & 0 \\ 0 & -\partial_1 \Gamma_{00}^1 + 2\Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{11} & 0 \\ 0 & R_{00} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Fora da comutação, a introdução dessa matriz não afeta o equacionamento da variação da base. Isoladamente, a operação bilinear entre os elementos da base por essa matriz, observa-se o balanço expresso em (4.44) pela reciprocidade entre $g_{00} = -g^{11}$, o que também permite expressar contração $g^{00}R_{00} = R$, enquanto $g^{11}R_{11} = -R$.

Considerando (4.43) para além da equivalência na contração, e fazendo coincidir com a variação balanceada, os tensores R_{00} e R_{11} possuem a mesma razão hiperbólica do tensor métrico, equivalendo na condição estrutural do espaço-tempo pelas identidades que formam. Tomando a soma dos valores contraídos $\mathcal{R} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11}$, define-se uma função escalar característica ⁸⁰ que fatora o termo comum da comutação.

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_0 \\ \hat{e}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -g_{11}\mathcal{R} & 0 \\ 0 & g_{00}\mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_0 \\ \hat{e}_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.69)$$

Outra operação que se torna trivial, a identidade na própria definição com relação à métrica, pelo mesmo parâmetro e pela mesma relação hiperbólica.

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_0 \\ \hat{e}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g_{11}\mathcal{R} & 0 \\ 0 & g_{00}\mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_0 \\ \hat{e}_1 \end{bmatrix} = -\mathcal{R} \quad (4.70)$$

Nos termos do tensor métrico, as expressões obtidas por (4.42a) e (4.42b) resultam na equipartição da curvatura entre espaço e tempo.

$$R_{00} = \frac{1}{2}g^{11}\partial_{11}g_{00} \quad (4.71a)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}g^{00}\partial_{11}g_{00} \quad (4.71b)$$

$$\mathcal{R} = -\delta^{00}\delta^{11}\partial_{11}g_{00} \quad (4.71c)$$

Apresentadas as propriedades similares, a diferenciação introduz o conceito de curvatura. Enquanto a métrica normalizada representa rotação hiperbólica, a forma bilinear adjunta possui elementos de curvatura.

Pela métrica normalizada, o conceito de curvatura é feito com relação à curvatura do movimento e, em analogia entre a curvatura intrínseca e curvatura

⁸⁰Parece causar estranheza denominar escalar de Ricci, considerando que ele é uma definição geral para o espaço, enquanto que o escalar apresentado é resultado de especificidade da rotação hiperbólica da base cinemática por uma métrica normalizada. O uso intercambiado da terminologia na decorrer do texto é feito em benefício do leitor, uma vez que as expressões são as mesmas, exceto a conceituação e a generalidade.

da cinemática convencional, a direção de curvatura do movimento é a mesma da aceleração normal.

O entendimento é feito ao considerar uma correspondência que a variação de primeira ordem teria com a velocidade da variação da base, o que tornaria a variação de segunda ordem aceleração da variação da base. Essa aceleração pode ocorrer de forma “tangencial”, projetada na direção original do vetor em derivação, aumentando a magnitude; ou a aceleração faz variar para uma direção “normal”, direção distinta que altera a direção. A mudança de direção da aceleração normal, nas operações realizadas acima, é realizada na ocorrência de representação por matriz antidiagonal; assim, em (4.65) e (4.66), as operações resultam em uma direção distinta do operando original. Essas mesmas matrizes antidiagonais coincidem com as operações que não comutam. Em termos de operação diferencial, se a variação primeira altera a direção com relação ao operando, então a direção original é retomada pela reincidência da mesma operação (duas curvaturas); se a variação primeira preserva a direção, então sempre resultará na direção do operando. De outra forma, a alternância de operadores sempre resultará na alteração da direção com relação ao operando. Curvatura intrínseca do movimento é a medida da variação de direção. A rotação hiperbólica é a intensidade de transferência, enquanto a rotação de segunda ordem é a variação dessa intensidade.

Ainda com relação à cinemática convencional, curvatura tem grandeza dimensão dada pelo inverso do raio, $[1/R] = L^{-1}$, enquanto que a função escalar resultante da métrica normalizada possui grandeza $[R] = L^{-2}$, o que é explicado pela forma quadrática das expressões. Não obstante, a referência a uma superfície deve correlacionar-se com a posição indicada no parâmetro funcional na caracterização da continuidade.

Pela simetria esférica do problema, mais de uma posição resulta no mesmo parâmetro radial e deve compartilhar um mesmo valor, formando uma superfície de equivalência. Alternativamente, para cada valor radial, pode-se traçar uma superfície, e os valores distintos entre diversas superfícies devem formar um gradiente. Continuidade hiperbólica implica na continuidade espacial.

Se, por um lado, no balanço (4.69) pode-se fazer alusão à curvatura média[39][53], e com isso superfície mínima[73][7], por um entendimento de que ordinariamente o valor zero da derivada segunda é um ponto crítico, por outro lado, a abordagem “geométrica” não traria informação nova, dado que a minimização redundaria na simetria esférica, que está na formulação do problema, e não atende o interesse no comportamento dinâmico. Ainda, a soma (4.70) é mais promissora que o balanço, dado que na primeira equação a função é fatorada. A superfície fechada encerra um volume, e a generalização do teorema de Gauß-Stokes parece uma abordagem adequada para determinar a continuidade do espaço, mas há questões sobre o significado do espaço e a simultaneidade temporal que limitam essa abordagem.⁸¹ A questão recai na representação da massa pontual representar por distribuição volumétrica e o seu ressignificado categórico para o tensor densidade-energia.

Recobrando o processo de emissão Rayleigh que trouxe aqui, é interessante apontar que a equação de Poisson possui a mesma grandeza dimensional da curvatura.

⁸¹Reiterando o exposto na sec. 4.2, seria resquícios de espaço absoluto newtoniano pressupor que mapeamento holonômico é a solução final, quando o espaço se apresenta anisotrópico de acordo com a velocidade e questões intrincadas de simultaneidade.

$$\left[\frac{\nabla^2 \phi}{c} \right] = \mathbf{L}^{-2} \quad (4.72)$$

Se assim o for, deve-se chegar a uma expressão similar a $\nabla F \cong \mathcal{R}$, que, além da unidade dimensional, também se equivalha pela estrutura.

A elaboração da expressão está relacionada à variação intrínseca, o que remete, na terminologia clássica, a força de arranque. A força estática no ponto no limiar do arranque, considerando (2.96b), teria, apesar da velocidade nula, o fator gamma não nulo $\gamma_v = 1/\sqrt{g_{00}}$, devido à métrica do espaço. Pela expressão (2.74), obtemos $\partial_1 g^{11} = g^{11} f^1$ no arranque.

Seguindo (2.77), tem-se o valor para a variação segunda:

$$\delta^{00} \delta^{11} \partial_{11} g_{00} = -2\delta_{11} g^{11} g^{11} \frac{\partial_1 g_{11}}{x^1} = -2g^{11} \frac{\partial_1 g_{00}}{x^1} \delta^{00} \quad (4.73)$$

A relação estacionária por Poisson abre caminho para construção matemática similar às equações de Maxwell (ao menos como seria observada em campo fraco), se considerar que a elaboração final depende da forma como o tempo é tratado extrinsecamente na derivada covariante, visto em 2.7.2.

A expressão pela curvatura resultará na “velocidade de propagação da métrica”, conseqüentemente, a “velocidade de autotransporte” da própria curvatura. Uma descrição melhor é a velocidade de atualização pela variação. A distinção objetiva evitar teorização de fluxo, situação em que traria confusões etéreas (ou de calibre).

A situação física que se apresentará será a atualização da métrica diante da oscilação da posição do corpo que a origina. Essa oscilação compõe o movimento geodésico pela natureza ondulatória da matéria. Com isso, a variação da contração espacial é acompanhada da variação da dilatação temporal: métrica se propaga como onda intrínseca, não como fluxo.

Acontece que, por consequência do equacionamento geodésico balancear as forças, a ondulação ordinária da intrínseca à matéria não é emissiva. Por essa qualidade, a fenomenologia é desafiadora, e a demonstração do que se pressupõe é indireta.

Por outro lado, fora da condição geodésica, a proposta parte dessa oscilação será emitida, retornando ao processo de emissão de Rayleigh (4.27).

A equação rebalanceada para emissão pela equação (4.35), a emissão $\tilde{\mathcal{E}}$ correlacionada à força externa $\hat{E}_\mu$, que se corresponde pela velocidade em excesso da geodésica $U^\mu \hat{E}_\mu$.

$$U^\mu \mathcal{F}_\mu = \tilde{\mathcal{E}}_\mu^\mu - U^\mu \hat{E}_\mu = 0 \quad (4.74)$$

A expressão, uma forma diferencial, dá o resultado em uma unidade correlata de potência específica. A relação com a curvatura é trazida pela forma estática por Poisson.

$$dP = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{F} \rangle = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F} dA \quad (4.75)$$

A curvatura, assim como a métrica, não varia no tempo; as relações temporais são extrínsecas à métrica. Pela derivada covariante temporal $\dot{\nabla}$, inclui-se a variação ∂_t intrínseca caso a variável não dependa explicitamente do tempo.

$$\mathbf{V}\dot{\nabla}\mathbf{F} = \mathbf{V}(c^{-1}\partial_t\mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{V}\nabla \cdot \mathbf{F} \quad (4.76)$$

O que é possível se os termos cancelarem-se entre si. Então, em similaridade à equação de Maxwell, tem-se:

$$\partial_t\mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (4.77)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \times (-\partial_t^{-1}\mathbf{F}) \\ &= -c^{-1}\partial_t(\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= c^{-2}\partial_t(\partial_t\mathbf{F}) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Ao mesmo tempo que:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F} \quad (4.79a)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \nabla(2\pi G\rho/c^2) = \kappa\nabla\rho \quad (4.79b)$$

A equação homogênea sugere que a onda é devida à variação de posição do corpo como fonte da métrica.

$$c^{-2}\partial_{tt}\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F} = \kappa\nabla\rho \quad (4.80)$$

A equação homogênea no vácuo mostra que a velocidade de propagação do espaço de uma emissão desvinculada do corpo é constante.

$$c^{-2}\partial_{tt}\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F} = 0 \quad (4.81)$$

O resultado, curvatura se propaga em velocidade constante, será ratificado na ação da curvatura.

4.4.3 Formas diferenciais e Análise funcional: Variáveis Espaciais e sua Continuidade.

Nas seções precedentes, é demonstrada a continuidade da rotação hiperbólica do tensor velocidade diante de um parâmetro espacial. Entretanto, ficam abertas as propriedades desse domínio, em especial, continuidade do espaço das variáveis espaciais.

Mudança categórica evita base holonômica (4.1). Uma implicação direta é que formas diferenciais perdem o *status* de base contravariante. As consequências não se restringem à base dual, trazendo implicações como a continuidade do espaço que é mapeada. Ainda que a anisotropia da trajetória seja tratável, outra

condição que irá se apresentar surge com a própria dinâmica do espaço. Métrica e curvatura que não aceitam parâmetro temporal, e a variável é extrínseca à métrica por algum evento externo.

Um interesse especial nessas questões reside na resolução de integrais iteradas pela consistência entre a continuidade da expressão pelos limites de integração e o significado físico do processo.

Holonomia resolve o problema de mapeamento do espaço e os seus campos. Ainda que se possa criticar, isoladamente, que a forma não é adequada à simultaneidade de situações dinâmicas, o mapeamento do caso estacionário é solução particular que leva ao caso geral. Para um corpo central fixo, é possível mapear o espaço pela métrica sem se preocupar com a variação da métrica no tempo pelo movimento do corpo fonte, mas no problema de dois corpos é preciso, além de um referencial espacial externo fixo, por conta da simultaneidade, eventos que sejam referenciais temporais. No primeiro caso, a resolução do espaço; no segundo, a resolução do tempo. A métrica normalizada coloca se em uma etapa anterior à construção do espaço-tempo.

A mudança categórica da métrica normaliza 4.2, não se restringe a conciliar com a holonomia. A perda da necessidade de vinculação holonômica confere liberdade de escolha da topologia.

Assim como a covariância faculta que a escolha do sistema de coordenadas seja arbitrária, uma vez que o invariante hiperbólico seja satisfeito, a escolha de uma estrutura topológica também o será.

A continuidade suave do espaço não é diretamente pelas variáveis espaciais, mas indiretamente, implícita pela continuidade cinemática. Pelas questões de continuidade, assim como na topologia, substitui-se a integral riemanniana por uma outra definição, e.g., integral de Lebesgue.

O significado físico está no tratamento distinto de espaços. A definição intrínseca do espaço é pela métrica, mas a definição do tempo é extrínseca à métrica. A concepção concede que o espaço é geometrizável em situações de regularidade temporal, quer por escala, quer por estabilidade. Por outro lado, no espaço inconstante, uma dinâmica intensa de sua deformação contínua inviabiliza o mapeamento espacial, restando mapear a sua deformação no tempo.

Duas classes de representação: no domínio do espaço, os geometrizáveis; no domínio do tempo, os viáveis pelo espectro. O caráter predominante é modulado, mais uma vez, pela complementaridade entre tempo e espaço. Assim, depende se o mapeamento do espaço pode ser considerado perene (um tempo indefinidamente longo, ao tempo do ciclo) ou, no caso contrário, mapeamento no domínio do tempo (que se tornará domínio da frequência).

O ponto crítico da escolha de uma topologia está na expansão da definição de massa pontual. O símbolo delta de Dirac não tem significado fora da integral, e não há uma única forma de atribuir um significado à função escalar.

$$\int_V M \delta^3(r) dV \quad (4.82)$$

A análise funcional é recomendada tanto na escolha pelas propriedades ondulatórias da matéria quanto na escolha pela distribuição espacial de massa em relação ao centroide de massa ou momento. Pela dualidade da abordagem, um centroide de uma distribuição de massa sempre incorrerá em uma oscilação por outro lado, a ondulação terá uma distribuição espacial.

O destaque está na repentina menção das propriedades ondulatórias da matéria, que até então não se fez presente nas análises. A omissão explica-se pelo fato de não ser discutida a inserção do corpo no espaço. De outra maneira, antecipando o resultado de uma resolução pontual, mesmo que não se presuma qualquer oscilação natural, dada a indiferença da rotação hiperbólica ao formato, a solução no espaço não somente conduz, como somente será possível por um movimento oscilatório, independente da natureza da atração. Assim como a complementaridade entre espaço e tempo, a relação entre frequência e comprimento da oscilação material intrínseca é contraparte das homólogas à métrica.

⁸²

Uma vez escolhida a composição topológica, a métrica normalizada, a forma do bilinear cinético precisa ser elaborada para metrificar o espaço vetorial com norma da variável de interesse.

Em uma breve apresentação, a elaboração temporal, por espaço de Hilbert, explora como as propriedades ondulatórias da matéria vinculam-se à oscilação da métrica no espaço, concomitante a ser fenômeno intrínseco no tempo. A demarcação do espaço pela manifestação ondulatória da métrica, em consequência da oscilação do corpo fonte, substitui a atribuição de coordenadas arbitrárias, dado que seja possível estabelecer relação de mapeamento pela regularidade de uma frequência ou períodos demarcados pela oscilação natural. Por serem complementares, a graduação do espaço por um menor comprimento de onda, somente é possível por uma maior frequência, enquanto que analiticamente reproduz a defasagem entre momento e velocidade por metade de um ciclo de oscilação.

Uma elaboração espacial pela análise funcional considera que a forma pontual é um centroide por uma distribuição de massa. A construção do espaço coordenado é conduzida pela forma convoluta do parâmetro radial, que absorve o bilinear cinético como tensor métrico do espaço. ⁸³

Iniciando pela composição de um espaço Banach dotado de produto escalar, em vez de métrica induzida pela norma, o objetivo é alcançado pela realização reversa, norma induzida pela métrica de distância.

A investigação concentra-se no produto escalar, que será a estrutura principal na definição do espaço topológico, sobretudo pelas relações angulares. O interesse especial é orientação e rotação.

A definição depende da especificação da função distância (métrica da distância lumínica) definida pela integral no tempo da forma bilinear cinemática (métrica diferencial). Percebe-se que a distância radial coordenada é involuta, observando que a norma do vetor é a mesma que a distância radial paramétrica.

A congruência com que a medida radial deve fazer com a contraparte espacial conduz à transposição da forma bilinear cinemática como tensor métrico do espaço coordenado. ⁸⁴. Em outras palavras, para que a velocidade seja mapeada como variação do espaço, $v^\mu = \dot{x}^\mu$, é necessário que o espaço apresente mesma métrica. Assim, a continuidade da trajetória está acoplada diferencialmente à

⁸²Aqui, oscilatório não leva necessariamente a um estado discreto ou quântico.

⁸³Advertência sobre a nomenclatura convencional e a terminologia adotada. Na análise funcional, métrica é função distância; norma é o comprimento do vetor; produto escalar (operador bilinear) tem propriedades entre vetores, ângulo e ortogonalidade.

⁸⁴Na concepção do espaço em geometria curva, o comprimento será a distância lumínica. Na concepção cinética, a curvatura é resultado de um calibre no desenho da escala espacial dado pela forma bilinear e aproveitado como métrica.

continuidade da rotação hiperbólica.

$$dr \equiv dx^0 = d(ct) = \frac{c d\tau}{\sqrt{g_{00}}} \quad (4.83)$$

Ao observar que $1/\sqrt{g_{00}} = i\sqrt{g_{11}}$, chega-se a uma identidade involuta da distância coordenada que equivale à transformação da distância em espaço próprio. $x^1 x^1 \eta_{11} = X^1 X^1 g_{11}$

$$\rho = \int dr = \int_{R_0}^R \frac{1}{\sqrt{g_{00}(r)}} dR \quad (4.84)$$

Em última instância, a medida do espaço é dada pelo tempo.⁸⁵ Por $dR = cd\tau$, evita-se o problema da “Trombeta de Torricelli”, que ocorreria na concepção geométrica de ignorar velocidade e tempo.⁸⁶

Na forma covariante, a dimensão $x^1 \hat{e}_1$ é medida positiva-definida e involuta pela métrica. A medida coordenada $\rho \equiv \sqrt{x^1 x^1 \eta_{11}}$ ou o seu retraço ao percorrer caminho radial.

Prosseguindo com as outras dimensões espaciais, ainda no sistema esférico, as componentes angulares podem ser obtidas pela complementaridade de métrica, chegando-se à formação da base para as dimensões espaciais. Porém, ainda que conduza a uma expressão correta, essa abordagem deixa de fora a interação entre as dimensões espaciais, como também a interação com o tempo. Uma forma é o estudo de órbitas fechadas.

O movimento de um corpo material está sujeito a anisotropia e outras inconsistências. Para uma definição de área obtida por um período orbital, a curva paramétrica que tenha uma velocidade geodésica nem sempre resulta em que o trajeto é um caminho fechado, ou com fecho suave. Tomando como exemplo a órbita de Mercúrio: ou considera-se que a órbita fecha, mas não em um período consistente com a rotação da base; ou considera-se o período de rotação da base, e a curva não fecha.

Ciente disso, o importante é reconhecer que a escolha de uma órbita circular neutraliza o efeito de anisotropia pela preservação das orientações relativas.

Um contraexemplo interessante é chegar ao perímetro em distância própria sem considerar o movimento. O comprimento de arco, ao ignorar $\sqrt{v^\mu v_\mu}$, também coloca em questão como os limites de integração se relacionam cinematicamente. Considerando-se γ e a velocidade constante no movimento circular orbital $\dot{x}^\theta = \rho \dot{\theta}$, poder-se-ia fazer:

$$\oint_C dx^\theta = \gamma v^\theta \int_T d\tau \quad (4.85^{**})$$

A equação (4.85^{**}) causa estranheza de diversas formas. Interessante é destacar o disparate que está na tentativa de perímetro por espaço próprio, em que somente ocorre efeito cinemático, algo como $L = L_0/\gamma$, dado que o tensor

⁸⁵Poder-se-ia parametrizar por modulação de frequência de uma emissão, declinação para o vermelho.

⁸⁶Na mudança de variável, é preciso do conhecimento do tempo, o que pode ser suprido por medidas indiretas de modulação de frequência ou energia.

métrico para direção de movimento angular é unitário. Ignora-se que a escolha é radial. Essa “primeira aproximação” motiva a discussão de algumas correções.

Analisando o lado esquerdo, sob uma perspectiva geométrica, o comprimento que corresponde ao perímetro coordenado é percorrido sobre uma componente métrica $g_{\theta\theta} = 1$, portanto sem alteração entre comprimento próprio e coordenado. Entretanto, sabendo que a posição radial coordenada sofre contração em espaço próprio, infere-se que o perímetro sofrerá redução pelo posicionamento correto. Nesse último caso, o importante é observar que ou obtém-se uma volta completa no espaço próprio, ou obtém-se uma volta completa no espaço coordenado.⁸⁷

A análise do lado direito, agora em perspectiva mecânica, a mudança de variável torna o problema mais agudo: requer que a trajetória seja percorrida por velocidade orbital, e que o tempo necessário para que se feche um ciclo completo seja conhecido. A perspectiva cinemática requer aplicação das leis de Kepler, mas persiste o problema da escolha de referenciais apresentado anteriormente.

A razão entre perímetro e raio, 2π , no espaço-tempo envolve a vinculação temporal. É sensato evitar proporções e congruências que fogem ao domínio da geometria, por afetarem expressões trigonométricas e exponenciação de imaginários. Em uma primeira ponderação, poderia-se decidir por representar dimensões do espaço próprio de modo que os valores possam se expressar em “verdadeira grandeza”. Por outro lado, além de dificultar todas as expressões coordenadas, também dificultaria a forma de encontrar as medições apropriadas, especialmente quando envolve o tempo.

O mapeamento envolve escolha de escalas de tempo e espaço; o destaque está no mapeamento extra de grandezas angulares. Transformações são lineares pela métrica e, como visto, grandezas angulares não se transformam linearmente. Também é interessante mencionar que, em geometria não-euclidiana, as relações de ângulos mudam na trigonometria de triângulo retângulo imerso no espaço hiperbólico. A peculiaridade do espaço mecânico de quatro dimensões que envolve tempo de rotação.

A métrica fornece ângulos intrínsecos necessários ao transporte paralelo, enquanto coordenadas empregam ângulos extrínsecos. Anomalia na definição de ângulo pela métrica, ainda que preserve o transporte paralelo, ocorre pela distorção entre o perímetro próprio e coordenado da trajetória em sua previsão temporal.

Consequência dessa anomalia, a determinação da área deixa de ser um processo geométrico e torna-se um processo mecânico pela forma como a grandeza irá representar a intensidade real que tomará efeito nas proporções e congruência.

Ao final da sec. 2.7.1, menciona-se a excepcionalidade da métrica fixa em simplificar a simultaneidade, decompondo-a em problemas simples. Ainda que não seja o valor exato, medidas de referência formam um padrão de comparação para referenciar as anomalias que possam existir.

As medidas de interesse particular são área e tempo de uma trajetória orbital fechada. A medida escalar de área em um plano do espaço para curva paramétrica, a expressão é dada por:

⁸⁷ Mantendo-se que direções angulares reduzem-se na mesma proporção que a radial, será observado efeito de encolhimento do perímetro por essa escolha de mapeamento estático. Também, anisotropia está no movimento, não no espaço, e a distorção cinemática afeta o espaço próprio.

$$A = \frac{1}{2!} \oint_T \|\langle x^i \hat{\mathbf{e}}_i, \dot{x}^j \hat{\mathbf{e}}_j \rangle\| dt \quad (4.86)$$

Pela segunda lei de Kepler, o integrando se relaciona com o momento angular $h = r \times v$ para um intervalo de integração dado pelo período T .

Abaixo, a medida tensorial por coordenada destaca a presença de orientação tensorial pela presença de índices direcionais.

$$A^{ij} = \frac{1}{2!} \oint (x^i dx^j - x^j dx^i) \quad (4.87)$$

Implícito ao que é discutido pelas variáveis contravariantes de coordenadas está a rotação da base.⁸⁸

Outra forma de determinar o período orbital é o evento de reincidência de uma posição com a mesma direção; em outras palavras, a recorrência define a rotação da base móvel.

Embora a base seja móvel por uma perspectiva coordenada, processa-se intrinsecamente o transporte paralelo; consequentemente, o referencial próprio percebe a base fixa. A mesma percepção de imobilidade ocorre com a base fixa coordenada para a perspectiva do referencial coordenado, o que, em reverso, para o espaço próprio, será móvel.

Nesse caso, a rotação é restrita entre as componentes espaciais. Essa rotação trigonométrica ocorre independentemente da rotação hiperbólica entre espaço e tempo e, embora não afete o tempo, processa-se em uma taxa temporal. Ainda assim, o efeito secundário induz à direção do movimento, como visto em 2.7.5 e 2.7.6, e por essas relações sistêmicas pode ser observado em Kepler.

Enquanto pela base holonômica o mapeamento do espaço é conexo se não houver torção ao circular pelo espaço, no espaço não-holonômico a perspectiva deixa de ser puramente geométrica, os deslocamentos não se fazem sem velocidade, e a previsão de anisometria desfaz a preocupação com torção. Entretanto, a continuidade do mapeamento do espaço não-holonômico somente é possível conhecendo-se as relações sistêmicas que resolvem a coerência entre as escalas espaciais e temporais nas relações transcendentais para rotação.

Ademais, o espaço orientado [7] resolve algumas questões topológicas sobre a quiralidade da base, nem sempre presente em definições holonômicas por questão da álgebra de sua base estar vinculada a comutatividade de operações diferenciais.

Deslocamento no espaço não se faz sem velocidade, o que leva ao período orbital. A seção seguinte explora as relações temporais por abordagem kepleriana. A seguir, os formalismos para integrais iteradas da base, rudimentos da álgebra da rotação da base em perspectiva geométrica de espaço absoluto pela ausência de considerações sobre simultaneidade.

Formalismos. Discute-se o aparato matemático para integrais iteradas. Abstrai-se problemas de simultaneidade, o que é ilustrado no cálculo de integral de volume.

Uma região tridimensional do espaço representa uma escolha de simultaneidade, pois a integral de volume exige um sistema de coordenadas específico para

⁸⁸ Reforçando o apontado em 33, uma métrica exponencial seria mais adequada.

definir o instante da medição. O resultado é inerentemente não-covariante, uma vez que é vinculado ao referencial do observador. Tais problemas encontram amparo no uso de pseudotensor, como o pseudotensor de Landau-Lifshitz ou o pseudotensor de Einstein. Entretanto, na abordagem desenvolvida, o uso é preterido devido à mudança categórica e à motivação de expor o sistema coordenado.⁸⁹

Abstraindo-se dos limites de integração para um caminho fechado, as formas diferenciais relacionam a rotação da base com medidas de área coberta pelo movimento circunscrito a um intervalo de tempo.

Seguindo a o teorema de Green (Kelvin-Stokes) para o o perímetro (4.86), a medida de área é:

$$A = \iint \|\langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle\| \cdot dx^\mu dx^\nu \quad (4.88)$$

O produto obtido por projeção diedral, equação 3.27, opera sobre a base e produz um escalar de difeomorfismo, para duas dimensões, elemento de invariância de área.

$$A = \iint \|\langle dx^\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu, dx^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle\| \quad (4.89)$$

Em geometria, o ajuste métrico vem de J_σ^μ . Até aqui não se tem a operação definida; a definição virá da identidade de Lagrange construída da identidade de Binet-Cauchy para (3.39), ou módulo em (3.40).

$$(\hat{\mathbf{e}}_\mu \times \hat{\mathbf{e}}_\nu)^2 = \varepsilon_{0\kappa\mu\nu} \varepsilon_{0\kappa\mu\nu} \varepsilon^{0\kappa\sigma\rho} \varepsilon^{0\kappa\alpha\beta} \langle \langle \mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_\rho \rangle, \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle \rangle \frac{1}{2!} \quad (4.90)$$

O primeiro par de símbolos de Levi-Civita indica os índices livres, enquanto o segundo par atua na permutação. O índice zero fixo em $\varepsilon_{0\kappa\mu\nu}$ assinala a nulidade do produto por na direção temporal, $(\mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_\mu)^2 = 0_{00\mu\mu}$. De uma forma geral, deve-se obter:

$$\langle \langle \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \rangle - \langle \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle - \langle \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{c}} \rangle \rangle = \langle \langle \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle \rangle - \langle \langle \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{c}} \rangle \rangle - \langle \langle \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle \rangle + \langle \langle \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{c}} \rangle \rangle \quad (4.91)$$

A expressão é avaliada nas condições $\hat{\mathbf{a}} \neq \hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{c}} \neq \hat{\mathbf{d}}$, por conta do símbolo de Levi-Civita, e $\langle \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \rangle = -\langle \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle$, bem como $\langle \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle = -\langle \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{c}} \rangle$. A multiplicidade é rebatida pelo fatorial, e a identidade de Binet-Cauchy se estabelece se, e somente se:

$$\langle \langle \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle \rangle = \langle \langle \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{c}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle \rangle \quad (4.92a)$$

⁸⁹ Pseudotensores não são uma “falha” covariante; eles revelam uma condição intrínseca nas Equações de Campo pelo tensor energia. Uma partícula com energia não possui posição definida, então não faz sentido dizer que uma densidade de energia não possui posição definida, pois densidade é função da posição.

Essa condição tornar-se-á recorrente e explícita no desenvolvimento normalizado pelo uso do delta de Dirac.

ou equivalentemente

$$\langle \langle \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle \rangle = \langle \langle \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle, \langle \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}} \rangle \rangle \quad (4.92b)$$

A identidade de Lagrange é obtida fazendo-se $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{c}}$ e $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{d}}$. Ajustam-se os termos temporais para a definição de (3.39); com isso, deve-se ter:

$$\langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle, \langle \hat{\mathbf{e}}_\nu, \hat{\mathbf{e}}_\mu \rangle \rangle = \begin{cases} (\hat{\mathbf{e}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{e}}_\nu)^2 & \mu = \nu \\ (\hat{\mathbf{e}}_\mu \times \hat{\mathbf{e}}_\nu)^2 & \mu \neq \nu \wedge \mu \neq 0 \wedge \nu \neq 0 \\ \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\mu \rangle \cdot g_{00} & \mu \neq 0 \wedge \nu = 0 \\ g_{00} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\nu \cdot \hat{\mathbf{e}}_\nu) & \mu = 0 \wedge \nu \neq 0 \end{cases} \quad (4.93)$$

O quadrado produto é definido em partes por outros três produtos de acordo com os índices. Para índices simétricos, opera-se pelo produto escalar, enquanto, se os índices são distintos, contanto que não inclua o índice temporal, opera-se pelo produto vetorial. Nos dois últimos casos, os índices são distintos e necessariamente um dos índices é temporal; tem-se, na representação quadrática, o produto por escalar.

Relacionado com a independência, as dimensões espaciais possuem direção em que são ortogonais, ou seja, a escolha de uma direção elimina a possibilidade de outra, enquanto o tempo é sempre concomitante, portanto nunca é ortogonal às direções espaciais.

Em consequência, o quadrado do produto diedral resulta em um determinante da menor de ordem 2 em relação à matriz métrica para os dois elementos dos índices em questão.

$$(\hat{\mathbf{e}}_\mu \times \hat{\mathbf{e}}_\nu) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\mu \times \hat{\mathbf{e}}_\nu) = (\hat{\mathbf{e}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mu)(\hat{\mathbf{e}}_\nu \cdot \hat{\mathbf{e}}_\nu) - \langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle, \langle \hat{\mathbf{e}}_\nu, \hat{\mathbf{e}}_\mu \rangle \rangle \quad (4.94a)$$

$$(\hat{\mathbf{e}}_\mu \times \hat{\mathbf{e}}^\nu) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\mu \times \hat{\mathbf{e}}^\nu) = \delta_{\mu\mu} \delta^{\nu\nu} - \delta_\mu^\nu \delta_\mu^\nu \quad (4.94b)$$

Além da definição de módulo, o produto quádruplo.

$$(\hat{\mathbf{e}}_\mu \times \hat{\mathbf{e}}^\nu) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\rho \times \hat{\mathbf{e}}^\sigma) = \delta_{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} - \delta_\mu^\sigma \delta_\rho^\nu = \varepsilon_\mu^{\nu 0 \kappa} \varepsilon_{0 \kappa \rho}^\sigma \quad (4.94c)$$

A definição do produto diedral pode ser refeita pela composição por soma, cuja nulidade dos termos é mutuamente exclusiva, multiplicada por coeficiente denotado por uma “unidade anticomutativa”.⁹⁰

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle = \left(\sqrt{(\hat{\mathbf{e}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{e}}_\nu)^2 + (\hat{\mathbf{e}}_\mu \times \hat{\mathbf{e}}_\nu)^2} \right)_{\mu\nu} \tilde{\mathbf{q}}^{\varepsilon^{\mu\nu}} \quad (4.95)$$

Aplicando-se sucessivamente a condição para identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned} \left\langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\alpha, \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\rho \rangle \rangle, \langle \hat{\mathbf{e}}_\beta, \langle \hat{\mathbf{e}}_\nu, \hat{\mathbf{e}}_\sigma \rangle \rangle \right\rangle &= \left\langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\alpha, \hat{\mathbf{e}}_\beta \rangle, \langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\rho \rangle, \langle \hat{\mathbf{e}}_\nu, \hat{\mathbf{e}}_\sigma \rangle \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\alpha, \hat{\mathbf{e}}_\beta \rangle, \langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle, \langle \hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\sigma \rangle \rangle \right\rangle \end{aligned} \quad (4.96)$$

⁹⁰ Algumas propriedades são similares, mas não todas as da álgebra geométrica. O número $\tilde{\mathbf{q}}^{\varepsilon^{\mu\nu}}$ é simplificação notacional para $\tilde{\mathbf{q}}^k \cdot \varepsilon_k^{ij}$ em (3.39)

Se ocorrem $\hat{\mathbf{e}}_\alpha = \hat{\mathbf{e}}_\beta$, $\hat{\mathbf{e}}_\mu = \hat{\mathbf{e}}_\nu$ e $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\sigma$, tem-se o determinante da menor ordem 3, o que corresponde ao cofator.

$$g^{\kappa\lambda} = -\frac{1}{3!}\varepsilon^{\kappa\alpha\mu\rho}\varepsilon^{\lambda\beta\nu\sigma}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} \quad (4.97)$$

$$\eta^{\kappa\lambda} = -\frac{1}{3!}\hat{\varepsilon}^{\kappa\alpha\mu\rho}\hat{\varepsilon}^{\lambda\beta\nu\sigma}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} \quad (4.98)$$

$$g^{\kappa\lambda}g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{3!}g^{\alpha\beta}\varepsilon^{\kappa\alpha\mu\rho}\varepsilon^{\lambda\beta\nu\sigma}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2!}\varepsilon^{\kappa\alpha\mu\rho}\varepsilon^{\lambda\beta\nu\sigma}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} \quad (4.99)$$

$$\frac{1}{2!}\varepsilon_{\kappa\alpha\mu\rho}\varepsilon_{\lambda\beta\nu\sigma}g^{\kappa\lambda}g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2!}\varepsilon^{\kappa\alpha\mu\rho}\varepsilon^{\lambda\beta\nu\sigma}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} \quad (4.100)$$

O determinante do tensor métrico normalizado é sempre unitário, e o cofator torna-se o elemento inverso. A coincidência traz a convergência de alguns conceitos. O primeiro destaque vai para covariância, especificamente para o símbolo de permutação na formulação de tensor relativo, ou densidade tensorial.

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{\|\langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle\|}\hat{\varepsilon}_{\mu\nu} \quad \varepsilon_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{\|\langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle, \hat{\mathbf{e}}_\lambda \rangle\|}\hat{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda} \quad (4.101)$$

Definir o símbolo de Levi-Civita de ordem inferior de índices como tensores relativos ε e Tensores absolutos $\hat{\varepsilon}$. A normalidade da métrica converge os símbolos na definição do tensor de quatro índices

A ponderação pelo determinante da métrica, em vez do Jacobiano, reflete como a transformação é equacionável pela razão entre as métricas e o determinante do produto $g_{\mu\nu} = J_\mu^{\mu'}J_\nu^{\nu'}g_{\mu'\nu'}$ ser igual ao produto dos determinantes; nesse caso, são sempre unitários e, tendo em consideração que estão sendo tratadas mudanças entre sistemas de coordenadas, são transformações passivas. O determinante unitário torna os símbolos de quatro índices iguais $\hat{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda\kappa} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}$. A normalização é redundante para o tensor que já é normal. Os símbolos de três ou dois índices são mais elaborados pela duplicidade. Outra propriedade que poderia ser apontada remete ao dualismo de Hodge.

$$\frac{1}{3!}\varepsilon^{\kappa\alpha\mu\rho}\varepsilon_{\kappa}^{\beta\nu\sigma}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} \quad (4.102)$$

A operação pelo produto diedral nem sempre resulta em um escalar. Também é útil definir os índices.

$$\|\langle \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle\|^2 = \frac{1}{2!}\varepsilon^{01\mu\rho}\varepsilon_{01}^{\nu\sigma}g_{\alpha\beta}g_{\rho\sigma} = \frac{1}{2!}\delta_{00}\delta_{11}\varepsilon^{01\mu\rho}\varepsilon_{01}^{\nu\sigma}g_{\alpha\beta}g_{\rho\sigma} \quad (4.103)$$

Outro destaque vai para covariância. O quadrado do produto triplo $\langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle, \hat{\mathbf{e}}_\sigma \rangle^2$ ou o produto dos “conjugados”

$$\langle \langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle, \hat{\mathbf{e}}_\sigma \rangle \langle \langle \hat{\mathbf{e}}^\mu, \hat{\mathbf{e}}^\nu \rangle, \hat{\mathbf{e}}^\sigma \rangle = \varepsilon_{\mu\nu\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \quad (4.104)$$

Como resultado, definições dão suporte matemático às integrais iteradas.

$$V = \frac{1}{3!} \oint_S \|\langle dx^\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu, dx^\nu \hat{\mathbf{e}}_\nu, dx^\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma \rangle\| \quad (4.105a)$$

$$V = \iiint_V \|\langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu, \hat{\mathbf{e}}_\sigma \rangle\| \cdot dx^\mu dx^\nu dx^\sigma \quad (4.105b)$$

O significado físico das integrais iteradas depende da demarcação, quando possível, de uma região de simultaneidade, o que é denotado pelos limites de integração.

4.4.4 Kepler e Kepler

A seção anterior inicia a investigação das condições de continuidade do espaço-tempo que satisfaçam o invariante de velocidade. Uma região de integração, um aberto, é sujeita às condições dinâmicas do próprio espaço, e o mapeamento coordenado condiz com as equações de movimento, orientação e rotação da base envolve equacionamento circular nas questões de simultaneidade e resolução desse mesmo espaço.

Considerando que busca-se mapear o espaço pela condição do cálculo de área percorrida em um caminho fechado, o intervalo de integração condizente com equações de movimento do espaço é obtido do mapeamento espacial que se procura resolver. Também há complexidades adicionais: quantidades mudam dependendo do referencial coordenado escolhido, por questões de simultaneidade, de forma não covariante,⁹¹ e o fato de a própria condição de movimento produzir um caminho fechado.

Na falta de invariante, uma medida pelo referencial próprio como padrão de unidade é comum a todos os observadores. Impasse é resolvido na vinculação entre as variáveis do espaço-tempo, que, na condição estacionária, podem ser estabelecidas como unidade padrão.

Estabelecida uma órbita que siga a primeira lei, equacionamento de Kepler para as outras duas fornece relações entre o período orbital e as grandezas de raio, perímetro, ângulo, e área. A escolha de um fundamento e a simplificação para órbita circular idealizada são diretamente equacionáveis por (2.86b). Após substituição e manipulação:

$$\left(\gamma_v \gamma_r^2 \frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho = \frac{GM}{r^2} \quad (4.106)$$

Assumido $\rho = r$, o parâmetro radial é involuto à distância radial por (4.84), e, dividindo por c^2 , chega-se à:

$$\left(\gamma_v \gamma_r^2 \frac{2\pi\rho}{cT} \right)^2 = \frac{GM}{c^2 r} \quad (4.107)$$

Com isso, obtém a velocidade circular em unidade natural $\beta_\theta = v_\theta/c$ ao mesmo tempo que se relaciona com a métrica por:

⁹¹ Ver comentários sobre pseudotensores em 89.

$$\frac{GM}{c^2 r} = g_{11} - 1 \quad (4.108)$$

Excetuando-se o fator c^2 recém adicionado, a equação é uma reformulação da relação de Kepler para o período orbital. É simples observar que a sua aplicação para o período orbital, embora não seja diretamente equivalente, converge assintoticamente para o análogo clássico conforme o raio cresce. A discrepância produzida pelo produto $\gamma_v \gamma_r^2$ tende, no movimento circular considerado, ao valor unitário conforme o raio cresce e a métrica torna-se unitária, assim como o fator de Lorentz com decaimento da velocidade.

É esperado que, conforme o raio descreça, ocorra dilatação métrica do tempo; entretanto, a equação não proporciona às variáveis coordenadas uma transformação relativística convencional.⁹² Tomando que $\gamma_r^2 \equiv g_{11}$, a transformação do período orbital coordenado por esse fator não resulta no tempo próprio. Por outro lado, o fator não poderia ser aplicável ao perímetro $\ell = 2\pi\rho$, exceto por aceitação da anomalia angular e fenômeno da redução do perímetro exposta na seção precedente. Ainda assim, para uma formulação kepleriana, a velocidade circular é dada pela expressão:

$$\alpha = \gamma_v \gamma_r^2 \beta_\theta \quad (4.109)$$

Por se tratar da velocidade circular, não se projeta na direção radial, não cabendo o valor de $\sqrt{g_{11}}$, muito menos o quadrado γ_r^2 .

Essa relação, por si só, cria um padrão de regularidade. O fato de não ser metrificável corrobora a ideia de que a variável tempo é extrínseca à métrica por algum evento externo. A indicação é que se deve procurar um fenômeno periódico intrínseco ao corpo, mas não relacionado com a métrica.

Uma medida com referência externa à métrica é a área, especificamente a velocidade areolar. A relação de Kepler para velocidade areolar envolve o momento angular. Para o movimento circular, a forma trivial de momento angular $H = 2\pi m r^2 / T$, ao aplicar o quadrado $(T/2\pi)^2 = m^2 r^4 / H^2$ e substituindo na expressão da terceira de Kepler $(T/2\pi)^2 = r^3 / GM$, então $H^2 = m^2 GM r$. Denominando o raio crítico à expressão $R_c = GM/c^2$, chega-se à:

$$\frac{H}{mc} = \sqrt{R_c r} \quad (4.110)$$

O momento angular clássico para uma velocidade orbital circular em unidade natural $v = c\beta_\theta$ no espaço plano.

Seguindo a indicação anterior para velocidade $v = c\alpha$, é interessante observar que, para o raio coordenado igual a raio crítico, $r = R_c$, a velocidade circular transformada torna-se $\alpha = 1$. A noção é que, assim como $\beta = 1$, essa é uma velocidade crítica. Outro fato notável é que a coincidência com o raio crítico expressa uma média geométrica.

Assim, se $0 < \alpha < 1$, então pode-se formular a progressão geométrica:

⁹²Aqui é considerada transformação das variáveis coordenadas pela métrica $c^2 t^2 = \gamma_v^2 (c^2 t^2 g_{00} + x^i x^j g_{ij})$

$$\alpha^2 r < \alpha r < r \quad (4.111)$$

Como a restrição da velocidade implica que $R_c < r$, então deve ser possível encontrar um par α_1 e r_1 tal que $R_c = \alpha_1^2 r_1$. Assim, para $v = c\alpha$, tem-se que o momento angular é $H_1 = mc\alpha_1 r_1$; a progressão torna-se:

$$R_c < \frac{H_1}{mc} < r_1 \quad (4.112)$$

Sabendo que $H_1/mc = \sqrt{R_c r_1}$:

$$R_c < \sqrt{R_c r_1} < r_1 \quad (4.113)$$

Embora o enquadramento forneça equacionamento da rotação, ainda não é suficiente para encontrar uma expressão que resolva a orbitação por uma escala de tempo consistente com o período de rotação da base. Entretanto, o enquadramento dá entendimento do que precisa ser resolvido.

Para atender à necessidade de covariância, o período de rotação estaria relacionado a um invariante, idealmente massa de repouso, a velocidade limite ou ambos. A sua escala temporal deveria ter relação com a escala espaço na formação da velocidade; porém, a anomalia angular originada na relação entre o raio e o perímetro não é resolvida nem pelo espaço coordenado, nem pelo espaço próprio, mas por uma velocidade, seguindo a temática cinemática. A situação em que há mais incógnitas que equações é agravada pela restrição ao movimento circular para evitar anisotropia. Um último fato que pode ser acrescentado: momento angular conserva-se sobre α , não sobre β .⁹³

Condizente com a proposta de que o tempo é externo à métrica, a independência da forma intrínseca tanto explica o que foi (ou não) obtido quanto o que seria conveniente para resolução. Ponderando que a órbita em si é uma forma de oscilação, frequência gravitacional é a frequência natural que o corpo adquire pela gravitação.

O corpo deve oscilar por uma frequência natural, sendo a fundamental no repouso. O menor período vem da oscilação máxima, que na órbita circular é pela velocidade do limite $\alpha = 1$. Assim, expressões análogas à frequência e comprimento Compton consideram o perímetro $\lambda_0^G = 2\pi R_c$ como o comprimento de onda dessa oscilação gravitacional:

$$\lambda_0^G = \frac{H_1}{mc} \quad f_0^G = \frac{mc^2}{H_1} \quad (4.114)$$

A partir desse fundamento, a distribuição dos momentos angulares segue o mesmo padrão pelo momento angular, de maneira que os comprimentos de onda

⁹³ Nos parágrafos que antecedem as equações (2.98a) e (2.98b), discute-se brevemente a conservação da direção do momento angular. A consideração mais recente é sobre o módulo em coordenadas. O importante é observar ambos, módulo e direção, que convergem para a forma conservativa conforme o raio cresce.

coincidam com a extensão do perímetro orbital, tem-se $\lambda^G = 2\pi r$ e obtêm-se expressões análogas ao comprimento e frequências de de Broglie: ⁹⁴

$$\lambda_1^G = \frac{H_1}{m c \alpha_1} = \frac{\lambda_0^G}{\alpha_1} \quad f_1^G = \frac{m_0 c^2 \alpha_1}{H_1} = f_0^G \alpha_1 \quad (4.115)$$

Não é possível prever um fenômeno de auto-oscilação para órbita por um corpo fixo; entretanto, abandonando a idealização e deixando esse corpo fixo mover, pode-se chegar a uma ressonância orbital de dois corpos se as condições de equilíbrio forem favoráveis.

A ponderação feita, o dilema se a frequência é intrínseca ou extrínseca é encaminhado de uma forma inesperada: é autoinduzida pela reciprocidade, necessidade de dois corpos.

Ainda assim, não há uma resolução analítica, mas indica onde procurar: experimentação ou analogia, ou ambos.

A exigência de que a massa de um corpo possua frequência natural de repouso única torna controverso que f_0^G , diferente da frequência Compton para $f_c = mc^2/h$, seja um valor para orbitação geodésica. Consequentemente, os corpos gravitacionais estão propensos a decaimento orbital. Se assim o for, haverá emissão de ondas gravitacionais na mesma razão do decaimento, em consequência do desvio geodésico pela dissonância entre as frequências associadas a uma mesma massa. Outra conclusão que se pode tirar é que a emissão será contínua, uma vez que a emissão discreta exige, mesmo que intermitente, órbitas estacionárias. O importante é que, assim como ocorre com a constante de Planck e a velocidade de Sommerfeld ⁹⁵ na ondulatória quântica, os valores de H_1 e α_1 , ou pelos que decorrem deles, têm concepção experimental; porém, esses valores podem ser obtidos na correlação cruzada entre os processos de emissão e mecânica ondulatória.

A relação entre o momento angular H_1 e a constante de Planck $\hbar$ é obtida na relação pela massa de Planck m_h .

$$\frac{m_h^2 G}{c} = \hbar \quad (4.116)$$

Considerando que a relação expressa validade para uma média geométrica $m_h = \sqrt{Mm}$, então pode-se generalizar:

$$\frac{Mm}{m_h^2} = \frac{GMm}{c\hbar} \quad (4.117)$$

⁹⁴ Frequências estendidas ao espaço métrico. Na condição de onda estacionária pelo movimento em órbita circular, o comprimento é associado ao momento do corpo por meio do momento angular fundamental.

Evidencia a natureza ondulatória em uma situação específica. De outra forma, pela generalidade, a expressão para uma velocidade nula tornaria a frequência indefinida e, com isso, ondulatória inconsistente.

⁹⁵ Originalmente, a velocidade de Sommerfeld não se limitava apenas ao raio fundamental; ela era empregada para calcular qualquer velocidade que atendesse à mecânica e à geometria da órbita quântica do elétron, variando de forma contínua em cada ponto da trajetória. Aqui é empregada exclusivamente a órbita circular, sendo que o raio fundamental eletrodinâmico equivale à constante de estrutura fina, denotada por α_1 .

A questão experimental é apurar quanta divergência entre os comprimentos ondulatórios produz em decaimento. Uma proposta pela soma das massas, ou média harmônica dos comprimentos, de um sistema de dois corpos é apresentada em trabalhos anteriores [70]. Em síntese, o raciocínio é que, em ambos os casos, gravitação e ondulatória quântica, a energia cinética torna-se energia radiante: como energia cinética independe da natureza da força, a energia radiante também independerá.

O desenvolvimento homólogo para o eletromagnetismo principia com o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, porém presumindo uma métrica de atração entre próton e elétron.

$$g_{11} = 1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{m_e c^2 r} \quad (4.118a)$$

$$R_c = r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{m_e c^2} \quad (4.118b)$$

$$r_1 = \frac{r_0}{\alpha_S^2} \quad (4.118c)$$

Submetendo ao mesmo desenvolvimento aplicado à natureza gravitacional, encontram-se r_0 : raio clássico do elétron; r_1 : raio de Bohr; α_S : velocidade de Sommerfeld e a constante de Planck.

Enquanto a ondulatória é introduzida na gravitação, a metrificação é introduzida na eletrodinâmica. A mecânica é a mesma, mas a dinâmica atende às peculiaridades de cada natureza. Gravidade é geometrizável para todos os corpos, pois aceleração (ou curvatura) independe da massa. Por outro lado, a atração de natureza eletrodinâmica na proporção da frequência natural da massa gera níveis de estabilidade e transições discretas.

4.4.5 Ressonância Orbital e Movimento Oscilatório

Na subseção anterior, investigação sobre o período orbital faz a exigência de uma frequência para o corpo. Entretanto, embora a frequência Compton seja apropriada como frequência natural para equilíbrio na oscilação forçada pela de natureza eletrodinâmica, não o é para a gravitação.

A frequência Compton é tida como intrínseca ao corpo. Entretanto, o fenômeno é regulado pela intensidade promovida pela natureza da atração. A formulação sugere que, embora não possa ser considerada extrínseca, é autoinduzida pela reciprocidade, suscitando necessidade de dois corpos. Consequentemente, vem de uma relação sistêmica.

Prever um fenômeno de auto-oscilação para órbita de dois corpos pelas condições de equilíbrio implica em chegar-se a uma ressonância.

Até então, trabalham-se conceitos intrínsecos e em uma única posição pontual. O sistema de dois corpos traz questões sobre simultaneidade dos eventos. Também é interessante apontar que a ação ocorre em retardo, e a latência é conveniente como referência temporal.

Ainda na relatividade restrita, Poincaré foi um precursor do estudo orbital e simultaneidade, motivado pela aberração de Lorentz.

As resoluções para o espaço plano esquematizadas em um diagrama de força e momento.

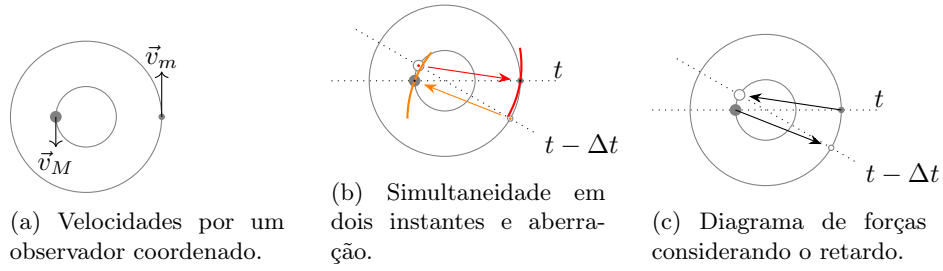


Figura 1: Dois corpos em órbita circular.

As ilustrações em 1 representam um sistema de dois corpos, constituído de um corpo maior e um corpo menor, ambos em trajetória circular. Considera-se que as distâncias são grandes o suficiente, de maneira que os corpos possam ser considerados pontuais. Também, que o espaço plano seja uma aproximação consistente com a magnitude das massas.

A primeira figura, 1a, estabelece uma referência de posições e velocidades obtidas por um observador coordenado em um instante.

A figura 1b retrata a ação retardada, retrocedendo a trajetória pregressa pelo tempo de latência em consideração à propagação em velocidade finita. Como o tempo de propagação entre os corpos é o mesmo ao retroceder pela mesma quantidade angular, o evento é restrito a dois instantes, indicado pelo pontilhado. É possível constatar, por desigualdade triangular, que as distâncias obtidas na propagação, embora sejam iguais entre si, são ligeiramente menores que a distância coordenada por um mesmo instante.

A figura 1c ilustra a aberração pela velocidade da posição aparente para o observador próprio em relação à posição obtida pelo observador coordenado. O destaque vai para o balanço entre forças. No diagrama, as forças seguem a mesma direção da linha de visada que cada observador próprio em um corpo possui em relação ao corpo oposto.

O fato de que a força obedece ao observador próprio torna desafiador um balanço analítico. Uma explicação para a discrepância dos ângulos pode ser sustentada pela aberração relativística promovida pela velocidade; entretanto, o cenário rotacional é disputado. [93]

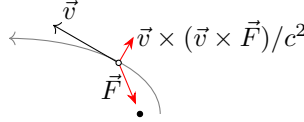
Considerando que, no diagrama de forças da 1c, as distâncias são ligeiramente menores, a atração pelo inverso do quadrado promove uma força ligeiramente maior, ou, de outra forma, a velocidade no instantâneo apresentado é inferior à velocidade orbital necessária para órbita circular.

Laplace[61] foi o primeiro a considerar o resultado da velocidade finita da gravitação, resultando no decaimento orbital. Para o caso em consideração, seria a tendência instantânea, mas cumulativamente, para um campo conservativo, a energia potencial torna-se cinética, o que permite fazer algumas considerações.

A direção da força retardada não é exatamente ortogonal a direção da velocidade presente, alguma aceleração tangencial é produzida. A intensidade inicial, como argumentado, é ínfima, mas faz observar que, para um possível “decaimento” a direção da velocidade tenderá a se alinhar com a força, ganhando mais aceleração tangencial, o que, após certo tempo, resultará em uma velocidade tangencial acima da orbital, o que poderia desfazer a tendência de queda de corpo se, proporcionalmente, a componente angular da velocidade tornar-se

menor que a componente tangencial da velocidade antes de vencer a distância entre os corpos. O importante é que, dependendo do condicionante, é possível cogitar que a trajetória oscile dentro da órbita originalmente prevista.

A decomposição da velocidade orbital em componentes radial e angular torna oportuna a aplicação do sistema de “forças” da geodésica pela métrica normalizada, apresentada na 2.7.6.



(a) Diagrama de forças do corpo após o *semi-latus rectum* do periastro.

Figura 2: Vis-Radix e Vis-Redux.

Para uma trajetória orbital, vis-radix sempre atua na direção de alinhamento entre os corpos e sua intensidade tem por referência a distância, enquanto vis-redux é sempre perpendicular à velocidade desenvolvida pelo corpo, mas a intensidade tem por referência o ângulo que a velocidade faz com vis-radix, assumindo valor nulo quando paralelo ou máximo quando ortogonal.

A introdução desses novos fatores também introduz complexidade dinâmica ao equacionamento. Análise é simplificada, observando-se resultante por sua decomposição radial e tangencial em consideração sobre o raio que seja compatível com velocidade, algo que pode ser entendido análogo à manobra orbital pela modulação da aceleração tangencial.

O mecanismo de reversão da direção de queda ou fuga. Partindo do pressuposto de que a orientação circular é estável, pois a vis-redux é nula, quanto maior for a direção de queda, mais branda torna-se a força, permitindo que a velocidade seja compatível com um raio maior. Em reverso, quanto maior for a direção de fuga, mais intensa a atração, tornando a velocidade compatível com um raio menor.

A tendência de restauração à órbita de equilíbrio confere uma estabilidade dinâmica. O sistema torna-se um oscilador harmônico.

O acoplamento entre os corpos cria ciclo de autorreforço [2] que amplifica as forças, acelerando até que se chegue a um extremo. A frequência natural de ressonância ocorre pela energia máxima que a configuração do sistema pode transferir ao corpo.

Um corpo material não pode acelerar até a velocidade da luz; a frequência máxima que comporta é pela velocidade relativa à métrica. O excesso acima desse limiar é rejeitado e explica a relação com a radiação ao final de 4.3.2.

Seguindo o raciocínio de que, na trajetória geodésica, o estado de movimento é inercial, e os cálculos são pela massa de repouso $E_0 = mc^2$, chega-se à frequência Compton[69], que corresponde a vibrar como se fosse um corpo imaterial.

A estabilidade em fase na configuração dipolo promove o cancelamento da ondulação, enquanto em um desbalanço de fase, o excedente escapa da oscilação na forma de onda.

Analiticamente, é desafiador achar trajetória que satisfaça as condições expostas. Uma solução que atenda à vis-radix, vis-redux e propagação deve re-

sultar na oscilação ressonante entre os corpos. Por outro lado, não faz sentido resolver geometricamente, quando a geometria é a incógnita em questão. O melhor a ser feito é propor uma geometria e ver se satisfaz mecanicamente. O objetivo é obter uma trajetória geodésica, evitando a emissão vista em 4.3.2, que deve satisfazer o equilíbrio de forças e o balanço de momento. O palpite estudado consiste em compor o movimento de orbitação com os parâmetros de oscilação. A trajetória idealiza a estabilidade orbital;⁹⁶ o *ansatz* é por uma epitrocoide na forma geral:

$$(R + r) \left[\cos \theta - \frac{k}{q+1} \cos((q+1)\theta) \right] \quad (4.119)$$

A substituição na forma geral das para os parâmetros orbitais e os parâmetros oscilatórios. A correspondência mecânica vem do período de oscilação implícito nos comprimentos adotados, obtidos da seção anterior. Faz-se período orbital múltiplo do período oscilatório:

$$\frac{\ell_n}{2\pi} \left[\cos \theta - \frac{\alpha_1 \ell_1}{\ell_n} \cos((n+1)\theta) \right] \quad (4.120)$$

Uma trajetória geodésica, obtida da forma paramétrica da epitrocoide, corresponde a segmentação do perímetro circular por múltiplos inteiros. A divisão fracionária do perímetro resultará no desalinhamento e consequente desbalançamento de forças.

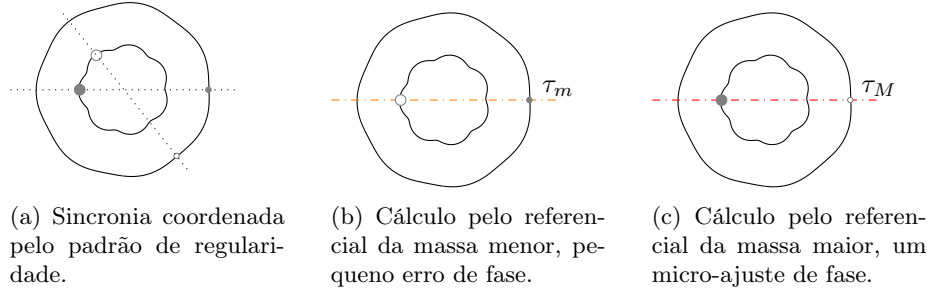


Figura 3: Dois corpos em órbita epitrocoide por auto-oscilação harmônica.

A situação da 1a passa a ser retratada por 3a; porém, para maior clareza, a ilustração contém um número reduzido de períodos e amplitude de oscilação excessiva ao que possa ser observado em uma situação real. Em traço realista, o ângulo entre os instantâneos seria da ordem v/c , o que tornaria os comprimentos de oscilação pequenos e resultaria em número grande de segmentos. A amplitude de deslocamento da oscilação em relação à órbita circular é ínfima; para qualquer escala planetária, seria representada como uma órbita circular.

⁹⁶ Gravitacionalmente, a tendência será de decaimento, mas o decaimento em si ocorre em condição de integridade dos corpos e em consideração apenas à atração gravitacional. Candidatos seriam corpos simétricos e altamente estáveis, como estrelas de nêutrons ou outras no fim do ciclo de atividade que promovam perda de massa-energia, quer como emissão de radiação ou partícula. Entretanto, a estabilidade vem com a perda do brilho próprio, limitando a experimentação ao estudo de pulsares.

A demarcação espacial e temporal é surpreendentemente proveitosa na resolução dos diversos equacionamentos: a oscilação torna-se um relógio e um metro natural. Intrinsecamente, da seção anterior, o embaraço causado pela falta de um período orbital e a anomalia dos ângulos é resolvido por medidas relativas da oscilação. Extrinsecamente, a simultaneidade de eventos que marcam as posições orbitais é graduada pela oscilação.

Conhecida a periodicidade dos eventos, um “artifício” empregado (formalizado adiante) toma em consideração a simplificação das distorções angulares, anomalia e aberração. A defasagem angular entre o observador coordenado e próprio, mesmo que em casos extremos não possa ser considerada, é conhecida, portanto tratável. A questão é escolher o mapeamento coordenado que retrate o espaço próprio, e que também resolva a escala de tempo e simplifique a simultaneidade. A figura 3b coloca o efeito retardado de propagação na situação de simultaneidade que seria percebida pelo observador coordenado, o mesmo 3c. Esse mapeamento facilita as transformações angulares, simultaneidade covariante a todos os referenciais ao custo de uma pequena imprecisão.

O equilíbrio dinâmico de forças da situação defasada é simplificado para o equilíbrio “estático” na situação em fase, com o benefício da covariância na simultaneidade. O que se obteve é a representação em que todos os observadores constataam simultaneidade do que classicamente seria a terceira lei de Newton, ou a preservação de causa e efeito.

Convencionalmente, postula-se a conservação de momento em que a latência na variação, força retardada, é promovida por emissão de partículas de atração: essa é a adaptação da segunda lei de Newton. Entretanto, a descrição apresentada concerne à curvatura do espaço, e a trajetória geodésica é homóloga da primeira lei de Newton. Ou seja, a descrição é de um cenário inercial de conservação de momento; assim, o processo de emissão, ao final da sec. 4.3.2, irá atuar com referência a esse estado.

O artifício revela algo inesperado. Simultaneidade proíbe que dois eventos separados espacialmente sejam absolutos. A recíproca que se coloca é que, se os eventos são simultâneos em todos os referenciais, como exigido pela causalidade. Logo, não se pode localizar a posição de maneira absoluta.

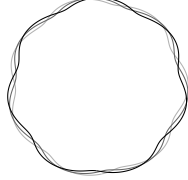
Causalidade e ação-reação, a distância transcende a representação pontual da mesma forma que o determinismo mecânico é transcendido pela simultaneidade da conexão causal. Uma forma sofisticada de evidenciar é pela involução em 4.84, onde $r = \rho$: ou a distância é resultado covariante, ou é um parâmetro funcional que não se transforma com a métrica.⁹⁷ A distinção torna-se significativa quando a mobilidade da métrica torna a avaliação da distância um evento de simultaneidade, como ilustrado em 1b. A noção simples, a paralaxe entre dois observadores posicionados lado a lado, modifica a percepção do ângulo de fase, algo similar ao que é obtido em experimentos de dupla fenda, pelo fato de que a oscilação é um evento temporal e depende do tempo que alcança cada observador.

Posto que o equacionamento continue válido, a abordagem consiste em adotar a onda de fase similar à descrita por de Broglie [27]. Admitir que qualquer uma das posições que difira pela fase seja equivalente.

⁹⁷ Vide (4.84).

$$\frac{\ell_n}{2\pi} \left[\cos \theta - \frac{\alpha_1 \ell_1}{\ell_n} \cos((n+1)\theta + \xi) \right] \quad (4.121)$$

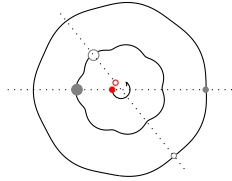
Enquanto todas as outras coordenadas são covariantes e determinadas pelo equacionamento, variável de fase é intratável e aleatória.



(a) Arbitrariedade e falta de covariância da fase incôgnita.

Figura 4: Onda de fase.

O movimento oscilatório produzirá outras peculiaridades. Assim como no movimento em órbita circular, a distância entre os corpos deve se manter constante. Oportuno mencionar uma medida para um centroide de massa pela velocidade coordenada. As velocidades variam de forma que o ponto descreve um círculo perfeito.



(a) Oscilação do centroide de massa.

Figura 5: Centroide de massa.

Outra forma simples de constatar consiste no observador acompanhar, rotacionando com os corpos, mantendo o eixo entre eles fixo no campo visual. Os corpos estariam oscilando de um lado para outro, com o centroide a uma distância fixa entre os dois. A consequência dessa constatação é que, se as partículas elementares oscilam, então todas as composições feitas delas também oscilarão. O destaque está na preservação da distância entre os corpos, em detrimento da preservação da direção.

A situação estacionária estabelece um padrão de regularidade cíclica. A simultaneidade da causalidade, agora, pode ser entendida pela forma como a antecipação do padrão retardado permite representação por sintonia de frequências. A segmentação por inteiros discretos impossibilita equacionar a trajetória da transição, somente a estabilidade.

Analiticamente, onda de fase é uma folga temporal da simultaneidade, que se traduz na folga espacial na amplitude máxima obtida em meio ciclo.

A estabilidade do sistema binário descrita depende do alinhamento de velocidades e balanço dos momentos. Esse último é analiticamente peculiar.

A demonstração chega a uma representação que abstrai a estabilidade dinâmica em favor de uma simplificação estacionária. Com isso, a distância relativa entre os corpos é constante. Entretanto, enquanto a métrica subentendida em 2.7.6 é para o corpo fixo, no sistema binário representado, a métrica está em movimento. Em síntese, a dinâmica não deixa de existir, e a demonstração é a transformação para dinâmica da métrica.

A dinâmica ondulatória da métrica é de interesse de sua propagação, como visto adiante. De imediato, consequência no alinhamento da velocidade.

É proveitoso definir uma trajetória conjugada dentro do limite de amplitude da folga de onda de fase. Essa trajetória permite posicionar a velocidade de maneira que o alinhamento direcional é preservado em todo o deslocamento. Além disso, é marcado por múltiplas efemérides de apoastro e periastro.

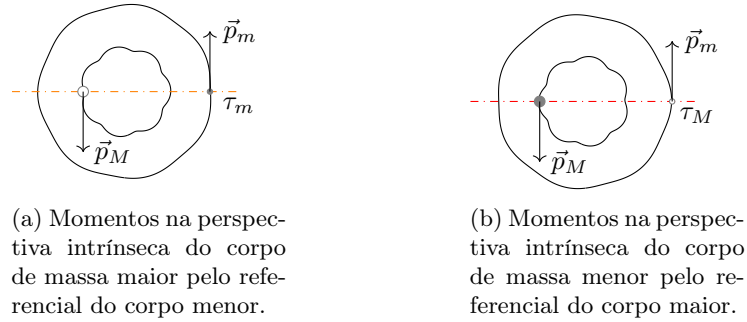


Figura 6: Trajetória conjugada para alinhamento dos momentos.

As trajetórias conjugadas apresentam padrões distintos. Posição preserva a distância, como ilustrado em 7a, enquanto a trajetória do momento preserva o paralelismo, como ilustrado em 7b.

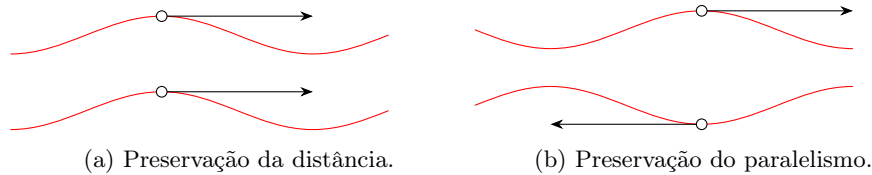


Figura 7: Padrões conjugados.

Velocidade é o fundamento primário do desenvolvimento da métrica normalizada. Pela sequência de exposição, a trajetória de posição foi apresentada antes da de velocidade, mas por artifício de argumentação de evitar-se pressupor o que se pretende demonstrar. A ordem reversa exige pressupor as oscilações do corpo e da métrica.⁹⁸ Na forma direta apresentada, a oscilação é a única solução possível: a natureza oscilatória da matéria é estrutural.

A ideia de estarem conjugadas desfaz qualquer ordem ou dominância, tornando-se importante apenas quantificar a disparidade entre as trajetórias, que, pelo

⁹⁸A trajetória conjugada do momento seria a forma própria real. A dinâmica do espaço e a simultaneidade coordenada explicariam a defasagem induzida; entretanto, o processo é melhor descrito pela ondulatória.

padrão regular, resulta em múltiplos de meio ciclo. Entretanto, escolhida uma ordem de apresentação, as trajetórias tornam-se subordinadas, como ilustrado em 6a e 6b.

Analiticamente, a defasagem entre momento e posição foge ao trato mecânico ordinário. Fisicamente, a defasagem irá implicar na indeterminação da simultaneidade de posição e velocidade.

Entendimento simples de como efeito materializa de maneira real vem da analogia com circuitos em corrente alternada. Nesses circuitos, um elemento capacitivo ou indutivo introduz defasagem entre tensão e corrente. Colocando velocidade como corrente e posição como tensão, é preciso achar um componente indutivo da defasagem.

A onda métrica que irá se formar, obviamente, não é transversal para o movimento proposto, mas também não é longitudinal, a exemplo da contração do perímetro mesmo com a variação radial, ou da contraparte temporal que afeta indistintamente todas as direções.⁹⁹ Embora seja conveniente representar na forma longitudinal, o efeito pode ser transversal conforme (3.66). A onda, não depende de definição de espaço; ao contrário, é ela que dá a definição de espaço. A distância dessa vez não se restringe à medida intrínseca física da propagação por um ponto fixo, mas também aos efeitos cinemáticos da mobilidade do ponto de emissão. O indeterminismo analítico de determinar a velocidade do espaço no espaço vem da forma involuta; a circularidade limita a aceitar a medida que se constata em evento de definição.

A velocidade da métrica não é infinita; seu efeito não é instantâneo. Embora se possa apontar que o pulso de velocidade terá um efeito de pulso de espaço, a resolução recai no problema de evento de simultaneidade que se pretende resolver.

Parte do movimento métrico é contemplada na aberração com relação à velocidade orbital; deixou-se de lado a velocidade com que a métrica percorre a amplitude de oscilação. A velocidade na métrica é composição da velocidade relativa ao corpo, intensifica ou atenua seu efeito; assim, as distâncias são espremidas ou esticadas em relação à contração ordinária sem velocidade.

Assim como o indutor introduz a defasagem, ocorre por um mecanismo de atraso de corrente em proporção à variação; a defasagem da trajetória conjugada vem da distorção em proporção à velocidade.

Um outro elemento orbital que surge, a trajetória conjugada, dá origem a um *spin* intrínseco ao decompor a velocidade circular e de giro. Ainda que tenha importância, não é significativo para a análise em questão.

A geodésica somente se dará por raios inteiros quando a atração proporcionar uma oscilação na frequência natural da matéria. Fora dessas condições, e na ausência de outros efeitos, a consequência é que ocorrerá o decaimento orbital, algo que foi antecipado na seção anterior. Não se obtém uma expressão para período orbital gravitacional, pois ele varia com o decaimento, ou seja, $\dot{T} \neq 0$.

A atenção recai sobre a frequência natural da matéria: o que determinaria exatamente o seu valor. Massa seria um elemento gravitacional pela correspondência com massa inercial; entretanto, a frequência natural da massa é obtida de fenômenos eletrodinâmicos.

Por outro lado, o tempo é um elemento sistêmico; a sincronia entre o relógio intrínseco e as relações extrínsecas do período orbital é por evento de simultanei-

⁹⁹ A natureza da onda é intrínseca, mas o formato depende do movimento da fonte.

dade. Diante da variabilidade da escala de tempo pelas deformações cinemáticas e gravitacionais, os corpos conseguem se colocar no mesmo andamento. O mecanismo do tempo é ligado ao mecanismo de massa pela frequência natural. O mecanismo massa-tempo é vinculação em frequência.¹⁰⁰

Recapitulando, o mapeamento do espaço pela introdução de variável coordenada e arbitrariedade topológica na sec. 4.4.3, seguido da correlação sistêmica entre escalas de espaço e de tempo 4.4.4. Condizente com a análise funcional, a elaboração fornece os elementos para as representações: centroide de massa e ondulatória.

A cinemática entre dois corpos ocorre em espaço topológico em reciprocidade por ressonância. Entretanto, nesse sistema fechado, a constituição de coordenadas não é suficiente para a resolução da inserção do sistema binário em um espaço-tempo; as quantidades incógnitas dependem da definição de um acoplamento/conexão pelo observador. Diante dessa impossibilidade de formular como um sistema isolado, em razão da externalidade temporal, a ponderação é que não se define uma estrutura absoluta, mas uma interface para um sistema. Fator de acoplamento pela sincronicidade temporal exige codeterminação dinâmica com a externalidade. A recorrência do mecanismo de reciprocidade e ressonância torna o sistema universal, pela exigência de inclusão de todos. Espaço-tempo não é uma ocorrência isolada, nem absoluta, nem múltipla.

O sistema não é resolvido isoladamente, a sincronicidade dos eventos em causalidade com a externalidade. Causalidade temporal é fator ambiental. Em suma, as propriedades da matéria no sistema descrito não podem ser diferentes de outro coexistente que possa ser encontrado em outra coordenada.

Embora ainda não se possa reduzir a um mecanismo simplificado a diversidade de observadores, as relações são suficientes para produzir expressões analíticas que possuam verificação experimental pela amostra do observador que descreve o sistema.

Concedendo que a estabilidade depende da discretização do raio orbital, algumas caracterizações podem ser feitas por consequências imediatas. Primeiro, quais são as distâncias orbitais. Segundo, qual a discrepância entre a fundamental gravitacional e a frequência natural. Terceiro, qual a razão de decaimento. Uma última questão: o que realmente é a onda métrica e sua relação com a onda gravitacional.

A discretização ocorre consoante a segmentação do perímetro orbital. Na composição final, a distância radial aumenta tanto pelo número de segmentos quanto pelo comprimento de cada segmento. Consequentemente, embora os segmentos aumentem linearmente por um parâmetro n , o perímetro aumenta em maior proporção, que, pelas relações do momento angular, são da ordem n^2 .¹⁰¹ O aninhamento de polígonos da figura 8 ilustra uma perspectiva do crescimento linear, imaginando-se que as figuras estariam inscritas em uma circunferência.

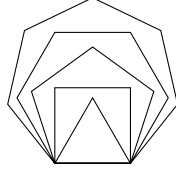
Conforme o raio aumenta por um fator n , por $v_\theta^2 \propto 1/r$, a velocidade $v_\theta = c\alpha$ deveria cair por n^2 para se manter em uma órbita circular de menor atração,

¹⁰⁰ Enfatizando a circularidade, refazendo o mesmo desenvolvimento para a natureza eletrodinâmica, chega-se a uma indefinição: frequência eletrodinâmica aponta que massa inercial possui equivalência gravitacional, e vice-versa. A escala de tempo de um sistema influenciada por fator ambiental desconhecido.

¹⁰¹ Tomando α como velocidade, órbitas circulares distintas se relacionam por $h_1/n = (\alpha_1/n^2)(nr_1) = \alpha_n r_n = h_n$; um raio maior é equilibrado por uma velocidade menor, enquanto se mantém a oscilação $h_1 = (\alpha_1/n^2)(nr_1)n = nh_n$.

mas, para manter a relação entre os comprimentos em 4.115, o raio decai por n^2 com uma velocidade menor para fazer caber um comprimento de oscilação.

Ainda por (4.115), a velocidade diminui o quadrado para manter o momento ou manter a oscilação. Em consideração aos efeitos cinemáticos, conforme o raio diminui continuamente, maior velocidade, menor comprimento (contração espacial), maior frequência (dilatação temporal) até o limite (4.114).¹⁰²



(a) Segmentação de crescimento linear.

Figura 8: Segmentação.

Segundo destaque, o período orbital gravitacional possui efemérides oscilatórias distintas das que seriam produzidas pela frequência natural da matéria. A oscilação forçada pela atração gravitacional não produz uma fundamental na frequência natural da massa (Compton), o que é sintetizado na relação (4.116). Gravidade, embora descoberto o padrão oscilatório, não é discretizável. Relacionado a isso, um terceiro destaque: o corpo deve produzir uma razão de decaimento. Entretanto, outros efeitos tomam parte, e a intensidade pode ser baixa ao ponto de ser reversível pela perda da massa na vida útil.

Por fim, o padrão oscilatório deve produzir uma onda métrica, que pode ser posta como uma emissão escura, uma onda de contenção em vez de onda de emissão. Seção seguinte aprofunda essa questão ondulatória. Além dos indeterminismos e representação da diversidade de observadores, existe tratamento além da covariância.

4.4.6 Ondulatória e “Onda Piloto”

Na resolução para o sistema binário da sessão anterior, a oscilação é um consequente, não um antecedente. A resolução mostra-se a única solução viável ao equilíbrio dinâmico para composição geodésica por 2.86b, tornando a oscilação um elemento estrutural de todo equacionamento.¹⁰³ Implicitamente, uma nova coordenada ao ângulo de fase particulariza a forma com que cada observador passa a instanciar o espaço-tempo, tornando inapropriada a representação geral pontual pelo desencontro que possa advir. Ainda que o novo parâmetro angular seja uma questão menor, outros problemas colaterais à oscilação surgem: correlação entre posição e momento. A solução que atenda a todos os observadores reside em uma representação cuja coordenação de eventos de simultaneidade posicional é feita por um padrão de regularidade do próprio movimento: onda material. Consequente ao movimento corpuscular, também há onda métrica de natureza imaterial.

¹⁰²O padrão crescente dobra a cada nível $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$; o próximo nível se distancia pelo número de orbitais do subnível (número do maior orbital do subnível superior).

¹⁰³Embora a temporização seja pela referência à órbita circular, a extrapolação não é feita pelas condições de equilíbrio de força e momento entre os corpos.

O desafio torna-se sistematizar uma representação que preserve a significância das medições físicas. A resolução oscilatória apresenta um quadro de resultados diversos: aponta-se se a solução no equilíbrio existe; ou, se houver uma solução fora do equilíbrio, como prosseguir de maneira dissipativa.

Dominado pelas frequências naturais e suas modulações pelo movimento, uma distinção feita, admitindo que fenômenos relativísticos são sempre fenômenos oscilatórios, é se as condicionantes do equilíbrio oscilatório resultarão em um padrão de movimento discreto. A condição de ressonância e órbita estável são marcos de conservação de energia e referência para os casos emissivos. Por outro lado, uma realização similar à vista em (4.35) recai na resolução por balanço entre onda material e onda imaterial: as duas maneiras são conjugadas no balanço.

Um primeiro tópico de discussão é a representação da onda-material, na qual o ponto oscilatório é elevado à qualidade de onda. Seguido de onda imaterial, a oscilação da métrica por consequência da parte material.

Ponderando por um parâmetro de ângulo de fase, uma mesma condição oscilatória pode ser obtida por múltiplas soluções, ver fig. 4a, o que se traduz em uma família de curvas representando a trajetória, quer seja no equilíbrio, quer seja na emissão. A sobredeterminação do movimento incorre em indeterminação da posição física. Concomitante a isso, a apreciação do movimento não é feita por um único observador, que deve chegar a um consenso sobre suas observações.

Resolução por oscilação possibilita discriminar como as indeterminações vêm de naturezas distintas: multiplicidade das soluções (modulação de fase), multiplicidade dos observadores (frequências naturais). As principais consequências serão incerteza na simultaneidade de posição-momento, sistematização da abstração do exterior e plano de orientação.

A equação (4.121) apresenta a variável de ângulo de fase ξ , introduzida por generalidade da solução. Essa variável não corresponde à transformação de nenhum parâmetro coordenado, nem é relacionada por aberração ou anomalia angular. Analiticamente, como qualquer valor é válido, a solução se constitui de uma família de curvas. Entretanto, fisicamente somente um dos valores seria válido, e a solução única condiz com o corpo ocupar posição no espaço. Por outro lado, a resolução rigorosa na sincronicidade dos eventos, posição e distância diante da propagação deixa de fora os efeitos em potenciais observadores. Considerando a paralaxe que dois observadores lado a lado experimentariam pela pequena diferença no tempo de propagação, chega-se a uma representação geral de onda de fase para incluir todos os ângulos de fase que constituem a solução válida, ilustrada na figura 4.

O parâmetro é introduzido de forma aleatória, no sentido de que não se correlaciona com qualquer outro processo que não seja sua relação com o corpo recíproco; sua participação em qualquer outro é accidental. Embora exista um ponto de contato único, nessa perspectiva de fase, a posição aparente torna-se dispersa entre os observadores, o que pode ser denominado modulação de fase.

A realização do ponto de contato torna-se uma questão de interação. Um observador que se programe para colisão perfeita entre o seu centro de massa contra o do corpo em observação deverá corrigir as variações produzidas pelo seu movimento e pela métrica que se adentra. Exceto por acidente, a fase originalmente observada irá mudar, o que leva a modulação de frequência.

A situação da onda de fase transfigura se quando os observadores são postos em movimento relativo um em relação ao outro. Análogo ao Doppler relativís-

tico, a velocidade produz modulação de frequência. É interessante observar que a covariância da métrica normalizada relaciona a energia cinética 2.8, ao mesmo tempo que as frequências são relacionadas à velocidade por (4.115). Ainda que tratável, a modulação de frequência acrescenta um grau de indeterminismo na posição.

Considerando um universo de observadores, cada um possui acoplamento com objeto observado diferente. Tanto o ponto de origem de uma emissão quanto um possível ponto de contato são peculiares. Entretanto, a mesma peculiaridade será proveitosa, observando que interações dependem de ressonância, na busca por uma representação que resolva simultaneidade.

Uma representação das frequências de superposição de ondas equivale à covariância por todos os observadores. A conjugação do equilíbrio de momentos em uma posição na convolução de ondas permite o encontro das posições por convolução das ondas em sintonia. Essa representação é condizente com topologia do Espaço Hilbert na análise funcional referida na sec. 4.4.3. Modulação de frequência absorve um universo de observadores na forma de harmônicos, da mesma forma que ocorreria na convergência em um sistema de partículas.

Sistemicamente, a simultaneidade é modulada na relação entre posição e momento. Analiticamente, a defasagem é trivial pela relação de derivada $\sin()$ e $\cos()$ na representação ondulatória. O significado dessa defasagem ao observador está em anomalias, enquanto ao espaço próprio dos corpos latência.

A aberração ocorre, simplificada, pois quanto mais rápido, tanto maior a amplitude de oscilação e maior a defasagem pela velocidade. Por outro lado, quanto mais lento, mais distante e maior a latência. A defasagem entre a anomalia esperada ¹⁰⁴ para o momento e a anomalia esperada para a posição ocorre pois, além da velocidade orbital, a oscilação produz uma velocidade radial. A velocidade altera como a métrica define o espaço, e a medida alternativa de distância passa a ser sua maneira de propagação, de ocorrência pela variação da métrica. Diante da circularidade, algum compromisso deve ser feito: admitido como parte do *ansatz*, pendente de confirmação. Também, pela involução que ocorre na (4.84), não é possível calcular distância radial pela velocidade, pois a transformação covariante em $g_{mn}(r) = \Lambda_m^\mu \Lambda_n^\nu g_{\mu\nu}(r)$ não afeta o parâmetro covariante.

Uma noção do que ocorre é ilustrada segundo o que se sugere na figura 7b. A trajetória que preserva a distância fixa, figura 3, dificulta o balanço direcional do momento, enquanto que a trajetória que balanceia o momento, na figura 6, dificulta a distância entre os corpos.

O que se propõe é que as medidas de posição não resultarão, no rigor do formalismo apresentado, o perfeito balanço de momento. Em contraponto, o reverso também ocorre, ou seja, traçar as posições pelo equilíbrio de momento não resultará na posição perfeita. Em ambos os casos, admite-se serem limitadas por alguma incerteza conhecida.

O entendimento é que se poderia determinar observacionalmente os momentos indiretamente ao acompanhar a simultaneidade de sucessivas posições no tempo de um sistema binário com precisão suficiente para evidenciar a oscilação; entretanto, esses valores não iriam correlacionar com o momento que toma efeito no balanço entre os corpos. Por outro lado, poderia-se obter a medida “direta” do momento (supondo alguma medida por modulação de frequência),

¹⁰⁴Aqui, pondera-se em consideração o equilíbrio na frequência natural da matéria.

mas o retraço das trajetórias não daria as posições simultaneamente perfeitas.

Em uma situação gravitacionalmente mais realística, a estabilidade pressuposta dá lugar ao decaimento. Na simultaneidade entre posição e momento, deve-se descontar o desalinhamento de fase responsável pelo desbalanço.

A constatação direta dos efeitos da mecânica ondulatória gravitacional é uma proposta desafiadora. A viabilidade prática da observação direta da modulação de fase no movimento corpóreo é desfavorecida pela baixa amplitude $\alpha_1 \ell_1$, dada na equação (4.121), em relação às medidas astrodinâmicas envolvidas.¹⁰⁵ O decaimento gravitacional, fora das condições ideais e extremas, também não é notável.¹⁰⁶

Um observador terrestre que observasse Júpiter poderia obter a posição espaço-tempo perfeitamente exata do centro de massa do astro. Ao repassar a informação relativística da representação pontual da trajetória a um observador marciano, esse correlacionaria essas mesmas medidas com uma diferença equivalente à fase de uma trajetória ondulatória pelo observador terrestre. Em realidade, ambos estão vendo o mesmo envelope de onda do movimento jupiteriano, mas como Marte está se movendo por um vetor velocidade diferente do da Terra, e o ângulo de fase não é covariante, a diferença somente é nula ao acaso. A fase é específica ao observador devido à aberração; cada qual vê a sua, o que faz analogia à localização de um arco-íris por dois observadores. A descrição ondulatória é fundamentalmente invariante, enquanto o ponto coordenado é uma conveniência amostral por uma perspectiva específica.

Feitas as devidas considerações e colocadas as questões de práticas e viabilidade de lado, o importante é conceder que, se fossem possíveis medidas perfeitas de posição, elas não seriam absolutas pela sua relação de fase.

Aprofundando a idealização, prossegue-se o detalhamento analítico da representação ondulatória. No mapeamento coordenado, ângulos não se transformam linearmente, e as relações pelo período orbital dependem de um referencial extrínseco por uma condição de sincronicidade temporal. Simplificada na observação de três fatores: a calibragem angular, a oscilação do tempo, e a externalidade correlacionada aos observadores.

Os dois primeiros fatores foram assunto das seções anteriores, sendo: a) o ângulo que tem efeito não dado somente pelas relações estáticas da métrica, como no produto vetorial em (3.47) ou em (4.93), depende da velocidade, como em (2.95); b) movimento da métrica produz variação no tempo. Oscilação do tempo é o correlato temporal do mecanismo para se chegar a uma sincronia no alinhamento. Em c), os observadores são implicados no cálculo da posição e devem, pela mesma álgebra, indicar a orientação que satisfaz relações temporal e direcional.

Assumem-se observadores inerciais que sigam trajetória geodésica que permita distinguir direções fixas.¹⁰⁷ A existência de velocidade entre observadores manifesta diferença no ângulo entre os pontos de referência das direções fixas,

¹⁰⁵O mesmo argumento pode ser dado para explicar por que o fenômeno não foi notado até então. A magnitude dos termos é tão negligenciável que possivelmente deva-se considerar que não é absorvida por processos geológicos e seja aparente pelo movimento da superfície do astro. Também nem todas as órbitas serão circulares; há efeitos de precessão, etc.

¹⁰⁶O decaimento gravitacional é pequeno. Recessão entre os corpos. Ver nota 96.

¹⁰⁷Direções fixas determinadas por medições de quasares distantes. O texto emprega geodésica como sinônimo de intrinsecamente inercial pela ausência de pseudo-forças; a composição por direção fixa permite transformação de Lorentz entre os observadores.

bem como a composição entre transformações de Lorentz com relação à observação do sistema binário estudado, o que produzirá rotação de Wigner sobre uma modulação de frequência. Ângulo e tempo são fundamentais no mapeamento coordenado do sistema binário pelos observadores. A medição da posição será exata se, supondo que um dos observadores, para atestar a posição coordenada, deve interceptar um dos corpos apenas pela predição de posição futura. A desconsideração da transformação do espaço do observador pela mudança de movimento torna o sucesso um evento do acaso.

O espaço é dinâmico e em transformação contínua, não afeta somente a evolução de perspectiva de um mesmo observador. A resolução extrínseca de simultaneidade e causalidade introduz dimensão extra-covariante pela natureza dinâmica, o que se mostra condizente com a perspectiva de diversos observadores, mas, contraditoriamente, a dinâmica não é perfeitamente covariante entre os observadores.

A consequência dos indeterminismos é que não existe medida absoluta de posição na precisão do comprimento de onda da oscilação. A discussão não é recente; a novidade são os ingredientes novos trazidos pela abordagem no tratamento do problema.

O enquadramento permite encaminhar para uma abordagem conhecida a representação da dualidade entre ponto e onda. Em um primeiro momento, representação pontual figura como microestado em que se descrevem os processos internos ao sistema binário; macroestado, uma forma funcional capaz de carrear indeterminismo dos observadores e álgebra para resolução do microestado. A perda de especificidade do microestado é tolerável nas condições existentes.



As propriedades ondulatórias não são proeminentes na gravitação, porém a especificação do processo deve ser consistente com a teorização, medição e interpretação.

Exceto por não manifestar caráter discreto, a aleatoriedade nas práticas adotadas na interpretação de Copenhague é a mais adequada à componente oscilatória. A discussão relevante, como historicamente ocorreu, está no confronto com a proposta de onda-piloto, uma vez que há existência de ondulação da métrica participando dos fenômenos. A proposição é que, embora gere padrões de interferência, é indeterminística pelas mesmas razões de aleatoriedade apresentadas para oscilação corpuscular. É preciso estratificar o comportamento ondulatório da métrica.

Na descrição do equilíbrio por trajetória geodésica, a causalidade do balanço de momento é artifício do padrão de regularidade temporal pela oscilação corpuscular. Como o corpo é ponto de referência de origem da métrica, ocorre a consequente oscilação da métrica. Por essa mesma condição de regularidade, a propagação métrica deve formar uma onda estacionária. Essa formação fundamenta-se no mesmo artifício da simultaneidade da causalidade; o padrão de regularidade cria ilusão de não-localidade.

Em outra perspectiva, a propagação da métrica dentro do equilíbrio pode ser entendida como emissão escura,¹⁰⁸ e seu padrão estacionário forma-se quer por ser rebatido, quer por ser anulado entre os corpos, em decorrência da conservação

¹⁰⁸ Ondulação intrínseca à métrica, que é específica de um acoplamento e que já está energeticamente contabilizada.

do movimento. Por outro lado, quando ocorre o desbalanceamento, também ocorre vazamento, e a emissão torna-se luminosa,¹⁰⁹ carregando a energia do decaimento. Essa última colocação permite descrição do processo de medição da posição por suas relações sistêmicas.

Uma definição geral para continuidade de macroscópico ao microscópico: medição, o ato de coletar amostras definido por um protocolo e contexto do que está sendo medido. Sistema ampliado inclui interface (contorno na fronteira) e transdutor (elemento de reação).

Na forma idealizada, medição causa perturbação nula; na prática, arbitrariamente pequena. Entra em questão também a duração da medição ínfima em relação a quaisquer variações no sistema, deixando de lado a questão da reversibilidade. Em diversas grandezas clássicas, realização idealizada é obtível: velocímetro com inércia e atrito nulo, voltímetro com resistência infinita. Os mais ilustrativos são termodinâmica e ensaio de materiais.

Em um termômetro, devido ao acoplamento, há necessidade de equilíbrio térmico com um reservatório térmico. O transdutor de capacidade térmica ínfima minimiza a perturbação, latência e o transiente.

Em outro extremo, o contexto de uma prensa para ensaio destrutivo de corpo de prova. A interação física entre sistemas é mais proeminente; não é possível minimizar a perturbação. O mais importante é ilustrar que sempre há amalgamação de propriedades intrínsecas, ainda que procure-se minimizá-las. Na amalgamação referente, se o transdutor deformar-se com o corpo de prova, a medição torna-se um híbrido das duas propriedades. A resistência à ruptura é um estado latente, revelando um valor intrínseco ao acoplamento.

Medição idealizada, aquela que separa o “sujeito” (medidor) do “objeto” (medido), colapsa nos processos fundamentais. A medição idealizada falha no nível fundamental porque nela o transdutor e o objeto possuem a mesma ordem de grandeza de ação. A medição não revela o estado do objeto; ela define o estado estacionário do híbrido formado pelo objeto e pelo transdutor. Sintetizando o efeito de “carga” do transdutor e a inércia do registro em uma medição: para um transdutor registrar algo, ele precisa mudar seu próprio estado.

Dentre as medidas possíveis, a posição é conhecida pela amostra da emissão de sua oscilação, ou ainda por alguma outra emissão que sofra modulação pela métrica (brilho próprio ou refletido). O corpo é imperceptível, exceto pelo contraste em relação à oscilação de equilíbrio. Por fim, separabilidade é uma ilusão de escala, se o objeto já estiver manifestado em uma causalidade única ou não.

Nos corpos celestes, um planeta (fosco) só revela sua posição se for iluminado por uma estrela ou se ocultar uma fonte de luz (trânsito), enquanto um elétron precisa de contraste (estímulo) e “eliminar” o elétron exige um salto energético que altera permanentemente seu estado anterior.

4.5 Ação da curvatura

Ação da curvatura concerne a formulação lagrangiana da parte imaterial do processo gravitacional (ou eletrodinâmico). A ação da curvatura concerne à formulação lagrangiana da parte imaterial do processo gravitacional (ou eletrodinâmico).

¹⁰⁹Vinculada em espaço-tempo a um emissor, mas sem acoplamento com um receptor específico, constitui um excedente que poderá “iluminar” qualquer corpo.

Iniciando pela noção de que ondas gravitacionais e eletromagnéticas propagam-se à mesma velocidade constante, a indicação é que a aplicação do princípio de Hamilton regride da ação mínima para o princípio da menor distância, e a equação de Euler-Lagrange torna-se geodésica lumínica. Entretanto, o caso é degenerado para as equações corpusculares, pois a formulação fundamenta-se no limite da velocidade, e a forma Euler-Lagrange é trivialmente nula. Como consequência, a propagação imaterial segue por processo peculiar, e a formulações segundo consistência sistêmica.

A proposta em forma aberta é coerente com a arbitrariedade topológica do espaço, natureza da iteração, discretização e acoplamento ao processo, ou seja, a representação da onda depende da representação do meio. Entretanto, apesar da diversidade de casos, faz-se necessário equacionar alguma condição de contorno quando confrontado com a materialidade corpuscular, e o enunciado conceitual auxiliam no entendimento das formulações. Transpõe-se o tensor métrico regular como métrica do espaço, e denomina-se a propagação da métrica como sendo a velocidade de atualização de sua intensidade pela mudança de posição. A métrica não varia intrinsecamente no tempo, e a variação é devida ao movimento da massa que origina o tensor.

Métrica espacial é o descritor do mapeamento coordenado para o espaço próprio; entretanto, o efeito relativístico ocorre tanto pela atualização da posição quanto pela celeridade que ocorre. Rastrear a intensidade que a métrica possui em uma posição do espaço em um instante no tempo torna-se um evento de simultaneidade de difícil realização. Convencionalmente, abstrai-se o corpo originador da métrica pela adoção de um modelo de propagação extrínseco, porém resultaria na circularidade em determinar o movimento do espaço por medida do próprio espaço que se movimenta. A solução recai em uma formulação de uma função lagrangiana intrínseca, mas a formulação do movimento imaterial pode ser obtida de outra forma.

A dinâmica do espaço é motivada pelo mecanismo de autotransporte mencionado em (4.73), métrica induz o próprio “movimento”. Entretanto, a menção de transporte é capciosa, e a cautela é tanto com o que é “transportado” quanto com como é transportado: intensidade métrica transita por onda. A especificidade elimina modelo o de fluxo.

Observada a deformação temporal g_{00} , pela curvatura, produz intrinsecamente uma transição gradual $\partial_{11}g_{00}$ que afeta uma vincinidade. Infere-se pelas posições coordenadas que dilatação temporal induz contração espacial consoante ao desenvolvimento do escalar de curvatura. Taxas (4.39) e (4.40) resultam em (4.71c), que torna a reforçar (em segunda ordem) a dilatação temporal. Em outras palavras, como não é desconexo de continuidade, afeta adjacência. Outro aspecto: ao induzir a manutenção do próprio estado, produz um efeito inercial.

Gradualidade na transferência da intensidade métrica é ocorrência da latência temporal. A variação espacial é correlata à variação temporal quando ocorre por uma velocidade c . Pela eq. (4.71a), a variação temporal, extrínseca, induzida pelo movimento, é tal que:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t g_{00} \equiv \partial_{11} g_{00} = -\mathcal{R} \quad (4.122)$$

A velocidade de propagação deve ser a mesma velocidade inferida em (4.81). A relação com a velocidade limite coordenada surge da variação temporal, ao que

foi iniciado em (2.66), é consoante ao que foi produzido pela derivada covariante temporal em (4.76). Simplificado, $\nabla^2 g_{00} = 0$.¹¹⁰

A expressão é reconhecidamente uma equação de onda, e o mecanismo de sua produção reforça o modelo oscilatório introduzido na sec. 4.4.5. A determinação da velocidade pode ser, em tese, obtida experimentalmente pela conveniência ondulatória da expressão $c = \lambda f$. Embora um equacionamento seja satisfatório, o entendimento traz outros questionamentos: a onda métrica intrínseca por dilatação temporal e contração espacial, como irá se manifestar extrinsecamente.

Velocidade de propagação da métrica, pela sua origem material, relaciona-se à frequência fundamental de oscilação da matéria. Entretanto, o modelo harmônico desta não se decide entre uma origem gravitacional ou eletrodinâmica da fundamental: a oscilação gravitacional depende da massa inercial, mas a frequência fundamental da eletrodinâmica depende de carga elétrica. Ponderando por analogia clássica, a questão sobre a mesma velocidade de onda para meios de “rigidez” diferente é intrigante: ondas gravitacionais possuem a mesma velocidade que ondas eletromagnéticas. Transposto para a realidade métrica, a eletrodinâmica causa deformação na métrica gravitacional para se propagar: o mesmo conflito na determinação da frequência natural da matéria é repassado à contraparte imaterial. Ainda que seja razoável que a propagação independente do meio seja atribuída à extrinsecidade temporal do período pela variação $\partial_{tt}g_{00}$ introduzida pela derivada covariante temporal, algo mais pode ser obtido pela forma como a métrica introduz propriedades relacionadas à natureza da atração.

A sessão também discorre sobre outras consequências que podem ser inferidas. Pelo equacionamento imediato, se a velocidade é constante, então a aceleração é nula. A equação de Euler-Lagrange nula surge da ação igualmente lagrangiana nula. Embora haja trivialidade da ação, o valor nulo indica como balancear as quantidades relacionadas nas ondulatórias da matéria. A ação nula também indica ausência de desvio geodésico, e a distância é percorrida em velocidade constante, congruente com a medida métrica.

Homóloga a uma métrica espacial, onda imaterial poderia ser entendida como uma amostra temporal e espacial. Entretanto, a proposta de equivalência entre duas representações é equivocada: métrica normalizada é um elemento primariamente cinemático e a sua ocorrência em mapear o espaço é circunstancial; por outro lado, onda é o conjugado espaço-temporal produzido pelas relações extrínsecas à métrica, na condição de que as relações de covariância, simultaneidade e causalidade sejam demarcadas por eventos dos períodos oscilatórios, como visto na resolução da seção anterior, com efeitos no corpo. Ou seja, ao contrário da métrica, onda reproduz as indeterminações posicionais entre corpos que não estão diretamente representadas em uma formulação geométrica pela métrica. Uma função de onda de emprego em formulação lagrangiana está em concordância com a topologia por espaço de Hilbert, e a equivalência entre métrica e equação de Dirac é apresentada adiante. Entretanto, o desenvolvimento de uma mecânica ondulatória do contínuo foge ao propósito do texto.

Com respeito à polaridade,¹¹¹ reiterar-se a natureza intrínseca da onda não depende de definição de espaço; ao contrário, é ela que dará a definição de espaço.

¹¹⁰Ainda que a derivada reiterada produza termos indefinidos $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{A})$ e $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A})$, as definições remetem-se à sec. 4.4.2

¹¹¹Ver texto que remete à nota 99.

4.5.1 Geodésica (radial) do Fóton

O desenvolvimento é uma adaptação simplificada de Max von Laue[101]¹¹² com o propósito específico de evidenciar similaridade entre lagrangiano material e imaterial. Pelo tratamento óptico da gravidade, a variável índice é assumida na perspectiva de um observador coordenado em espaço plano, uma vez que não há como considerar a velocidade da luz do observador próprio que já se encontra nessa velocidade. Em vez de considerar a velocidade da luz variável, um “índice de refração” do espaço é definido.

Uma definição para geodésica radial nula do fóton pelo tensor métrico normalizado segue de $\sqrt{P^\mu P_\mu} = 0$. O fóton não possui massa e a equação é melhor estabelecida se $P^\mu = \hbar[\omega/c, \vec{k}] = \hbar K^\mu$, com $\vec{k} = 2\pi\hat{n}/\lambda$ e $\omega = 2\pi/T$, então para $c = \lambda f$ o fóton possui $K^\mu K_\mu = 0$. O relacionamento conduz a $V^\mu V_\mu = 0$.¹¹³

Restringido para o movimento radial, pode-se supor, para o equacionamento nulo da velocidade, que haja um parâmetro n tal que meça o desvio em relação ao que seria o espaço plano.

$$c^0 c^0 g_{00} = -\dot{x}^1 \dot{x}^1 g_{11} n^2 \quad (4.123)$$

A difração ocorre em proporção à possibilidade de modular a frequência da massa de repouso em ponderação à velocidade. Tomando que para o fóton $\dot{x}^1 \dot{x}^1 = c^1 c^1$, o parâmetro índice assume o valor.

$$n_c^2 = -\frac{g_{00}}{g_{11}} \quad (4.124)$$

A introdução do índice evita a velocidade da luz variável $n = c^1(r)/c^0$. Não seria possível, ainda que fosse visível, aferir a velocidade $c(r)$ por coordenada devido à contração espacial. A medida da velocidade é relacionada ao *redshift* de sua frequência de propagação. Pela natureza ondulatória corpuscular, o caso também é extensível ao material.

A fração relaciona-se com curvatura pela equação (4.43). Uma resolução geral: a difração inclui efeito da velocidade pela relação implícita com a frequência natural. Em uma perspectiva ondulatória, ambas as formulações, material e imaterial do movimento, possuem uma frequência natural. Entretanto, enquanto materialmente a modulação por essa frequência ocorre tanto por causa cinemática quanto por causa métrica, imaterialmente ocorre somente por causa métrica. Ou seja, o índice de refração possui medidas diferentes, possuindo dispersão de acordo com a modulação da frequência natural. O caso imaterial não possui uso prático em relação às outras formulações, mas demonstra que o corpuscular curva-se mais do que a luz. Além de balizar com velocidade da luz na posição, sugere como inércia está relacionada à frequência.

Para essa forma corpuscular da luz, torna-se interessante produzir uma definição de função lagrangiana relativística que sirva tanto ao material quanto ao imaterial do mesmo espaço. A forma corpuscular convencional escreve-se:

¹¹²§23 p.225.

¹¹³Algo semelhante pode ser feito para a parte material. No movimento circular, o comprimento de Compton de (4.114) e comprimento de de Broglie estendido de (4.115) para compor $P^\mu = [\hbar c/\lambda_c; \hbar/\lambda_b]$, então $K^\mu = [\omega_0/c, \omega_0/c\alpha]$.

$$\mathcal{L} = -mc \frac{ds}{dt} \quad (4.125)$$

O espaço próprio experimentado pelo movimento é dado por $\int ds$. A generalização pretendida procura uma expressão que abranja a condição imaterial, uma expressão pelo momento escalar $p = m\dot{s}$ que pode ser aplicada tanto ao fóton quanto à partícula material. Assim, a relação com o momento vem por alternativa à forma material $p = \gamma_v^{-1} \sqrt{P^\mu P_\mu}$. A segmentação ocorre na escolha do fator de Lorentz, e a expressão convencional aplica-se ao movimento corpuscular, enquanto, no caso imaterial, o valor torna-se unitário. Com isso, chega-se a:

$$\frac{ds_c}{dt} = \sqrt{c^0 c^0 g_{00} + \dot{x}^1 \dot{x}^1 g_{11} n_c^2} = 0 \quad (4.126)$$

O valor trivialmente nulo coincide com o esperado para distância espaço-tempo da geodésica nula. Na análise mecânica para luz, a velocidade constante implica em aceleração nula, e o caso também resulta em uma ação nula. Na interpretação, não há ganho (nem perda) de energia, e a deflexão não constitui um desvio geodésico como descrito na sec. 4.3.2.

Substituindo-se a massa inercial por $m = p/c$, como o fóton possui $p = hf_0/c$ e, portanto, $E = hf_0$.

$$\mathcal{L}_c = -\frac{hf_0}{c^2} \dot{s}_c \quad (4.127)$$

Separação entre a energia carregada pelo fóton e a energia de transporte. O que é implícito: a energia carregada varia pela frequência, energia de organização métrica, mudança do espaço é abstraída por uma quantidade invariante.

A equação expressa o que é conhecido da relação de dispersão relativística $E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$. O termo é legado da relação de dispersão $v = \lambda f(\lambda)$ da óptica clássica, em que ondas com comprimentos distintos viajam a velocidades diferentes.

O importante no propósito do texto é que a formulação lagrangiana para perspectiva corpuscular é trivialmente nula no movimento imaterial. O mesmo deve ser esperado para o tensor curvatura da equação (4.43). Ação nula para autotransporte curvatura.

Ademais, a despeito do Laue, a métrica regular normalizada não possui esfera de fótons, o que remete ao desenvolvimento em 4.4.4 no que diz respeito ao comportamento assintótico material. Por outro raciocínio, a gravidade move-se à velocidade da luz, conseqüentemente não pode ser obstruída em razão de sua velocidade. Uma implicação: esfera de fótons é inconsistente com o desenvolvimento normalizado por ser uma solução para buraco negro por métrica de Schwarzschild. Ainda nessa outra metodologia, a equação para um corpo material é aplicada diretamente em equivalência imaterial.

4.5.2 [Entwurf §1-§5] Einstein e a equação de campo preliminar

As equações de campo da teoria geral da relatividade têm relevância por serem a principal referência sobre o tema, tornando indispensável a correspondência entre a forma holonômica e a métrica regular.

A preferência pela formulação preliminar justifica-se tanto pela métrica unimodular quanto pela especificidade do tensor curvatura.

Considerando que, apesar de fundamentos conceituais distintos nas formulações, há interseção de aplicação nos dois temas, torna-se instrutiva a comparação, onde cabível. Uma primeira questão é apontar e contornar as incompatibilidades. Nesse quesito, a equação preliminar é menos submetida à holonomia ao propor um tensor unimodular. Não se exige do tensor curvatura que a identidade de Bianchi seja satisfeita, com a consequência de que a conservação de energia, no critério que lhe é imposto, não é assegurada em todos os casos.¹¹⁴ O tensor densidade é o elemento estranho à métrica normalizada, mas tem trato por partícula pontual. Esse enquadramento também facilita o entendimento da incompatibilidade entre a versão preliminar e a versão final da teoria.

A fim de motivar a discussão, é preciso imputar um propósito e raciocínio ao equacionamento. Iniciando pelo último, uma vez que a formulação lagrangiana dá origem à equação geodésica, não há um balanço claro entre cinética e potencial. O equacionamento depende da escolha de um formato de tensor métrico condizente com a situação física; entretanto, o tensor métrico é um “parâmetro livre”. Conjugado ao tensor métrico, o tensor curvatura é compatível com o diferencial da equação de Poisson. Equação de continuidade é uma forma local mais restrita do que a conservação de energia, e a ideia das equações de campo é equacionar a continuidade do fluxo gravitacional por um parâmetro mensurável do movimento: surge o tensor energia. O propósito primário é obter um tensor métrico capaz de satisfazer as trajetórias geodésicas, evitando situações dissipativas.

A versão preliminar é “correta” para um caso mais geral, mas intratável.

¹¹⁵ A versão final é mais restritiva; o fluxo gravitacional transita somente por trajetórias geodésicas e, redundantemente, conservativas. Como efeito colateral, a holonomia introduz artificialidade ao processo gravitacional ao excluir casos dissipativos. Há falta de covariância entre sistemas de coordenadas e, ainda que se fabrique um processo dissipativo por ondas gravitacionais, sofrem com a escolha de coordenadas.¹¹⁶

A equação de campo preliminar da teoria geral da relatividade se escreve:¹¹⁷

$$R_{\mu\nu} \equiv \kappa \Theta_{\mu\nu} \quad (4.128)$$

¹¹⁴A previsão de que haja um processo dissipativo é incompatível com a conservação de energia obrigatória. Faz sentido que a conservação seja contingente a situações específicas, como descrito na sec. 4.3.2

¹¹⁵Relaxamento da condição de conservação exige balancear as situações de emissão (processo de Rayleigh), o que não se apresenta de maneira evidente na forma canônica (geométrica) da equação geodésica.

¹¹⁶É possível apontar uma série de nuances, indo e vindo da proposta preliminar para a proposta final e sua triangulação com o tensor regular.

Um fato sutil da resolução: a métrica unimodular rejeita a proposta final das equações de campo (não pode ser obtida por ela), o que pode ser correlacionado ao fato de que a métrica não pode ser estritamente conservativa, enquanto a holonomia exige que seja. Na resolução original, ainda pela preliminar, Schwarzschild inicia por métrica unimodular, mas logo em seguida procede a uma transformação (não-covariante) para coordenadas holonômicas. O que está implícito nessa transformação, é que não há covariância entre sistemas de coordenadas.

¹¹⁷O tensor de Ricci é preterido nos artigos entre 1912 e 1915. O tensor utilizado em 1913 era $\Gamma_{\mu\nu}$, uma versão com redução do número de termos de Ricci, o que torna interessante confrontá-lo com o desenvolvido em (4.4.2)

A análise é segmentada em quatro assuntos, com os destaques para o *Lado Direito*, o tensor de energia, parte material do processo; o *Lado esquerdo* com o tensor curvatura, parte imaterial; o significado do *Vínculo* entre os dois lados da equação. Um último destaque: *O Divergente*.

[A-Lado esquerdo] Parte imaterial de (4.128), o tensor de curvatura para métrica normalizada possui identidade de Bianchi trivialmente nula. A consequência, a ação da curvatura nula, corresponde à velocidade de propagação constante de autopropagação da curvatura, o que fora antevisto. Também é relacionado ao determinante da métrica e pelo princípio variacional.

A questão sobre princípio variacional do determinante e ação nula está interligada; um não existe sem o outro. O trinômio identidade de Bianchi, holonomia e conservação, adicionalmente, a derivada do determinante nulo.

Confronta-se que, para métrica holonômica, o tensor de curvatura introduz holonomia responsável pela conservação. Pela continuidade, conservação balanceia o divergente da curvatura por uma contraparte material, exigindo identidade de Bianchi não nula para ser nula. A situação somente é possível por holonomia, métrica não-unimodular. Situação similar ocorre por princípio variacional, mas desta vez pelo determinante unitário pela fórmula de Jacobi.

Para a métrica unimodular, os resultados serão semelhantes ao escalar de curvatura de (4.71c), tem-se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0_{\mu\nu} \quad (4.129)$$

O valor da expressão é intrigante em ambas as perspectivas da relatividade geral: se, por um lado, não contribui para a conservação nas equações preliminares, por outro, embora atenda à condição divergente nulo, $\nabla_\nu(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2) = 0_{\mu\nu}$, o faz de uma forma trivial, tornando-se inútil nas equações da proposta relativística final. Métrica unimodular não tem resolução pelas equações de campo, pois não representa holonomia, o que é tema da sec. 4.2.

A solução da proposta final das equações de campo da relatividade geral somente é possível por métrica holonômica. A solução originalmente dada por Schwarzschild desenvolve-se seguindo a proposta preliminar de unimodularidade, por um conjunto de coordenadas não-holonômicas, mas exige que seja possível um mapeamento para holonômicas. Por outro lado, em Hilbert esse mapeamento não se apresenta por se tratar da proposta final. O mapeamento não é uma transformação no senso covariante normalizado, e a mudança categórica exige simetria esférica, métrica fixa e ser invariante no tempo, $(g_{\mu\nu})' = 0$. A abordagem leva a cogitar que a continuidade é equacionável de forma solúvel somente por um mapeamento holonômico do espaço, e que, implícito ao tratamento de formas diferenciais, requer um processo estacionário.

O mapeamento para coordenadas holonômicas na métrica torna o determinante $\det(g_{\mu\nu}) \neq -1$ não-unimodular, o que possibilita equacionar a métrica por valor diferente do trivial em (4.129) e para um corpo pontual na condição de vácuo.

Antecipar a conclusão de que a relatividade geral final é mais restrita, pois somente, na abrangência conservativa, os casos em que pode-se mapear holonomicamente. Nem todos os casos são mapeáveis holonomicamente por um geometria riemanniana.

Para a métrica normalizada, a equação (4.129) é categoricamente diferente do sentido dado na relatividade geral e tem explicação no seu aparecimento nas aplicações do princípio variacional no escalar de curvatura. A velocidade de propagação imaterial é constante, portanto, com aceleração nula.

A correspondência entre as curvaturas de ambas as métricas, normalizada e holonômica, está significada pela equação de Poisson. Algumas substituições de 4.71c são úteis para o tensor Curvatura:

Para $g_{11} = -(1 + R_c/r)\delta_{11}$, tem-se:

$$\partial_{11}g_{11} = -2(1/x^1)\partial_1g_{11} \quad (4.130)$$

$$\partial_{11}g_{00} = -2\delta_{00}\delta_{11}\delta_{11}g^{11}g^{11}(1/x^1)\partial_1g_{11} \quad (4.131)$$

A expressão dada pela métrica é conveniente em um contexto geométrico, mas obscura no contexto mecânico. A variável f^k em (2.74) no arranque resulta $\partial_1g_{11}|_{(v=0)} = \delta_{11}\delta_{11}f^1|_{(v=0)}/c^2$. Nessa velocidade, cabe diferenciar a condição estática da condição dinâmica.

A situação dinâmica está vinculada a uma trajetória geodésica e, principalmente, rotação hiperbólica do tensor velocidade, o que é marcado por $\dot{\gamma}_v \neq 0$ (velocidade nula exclui o movimento circular).¹¹⁸ Uma velocidade instantaneamente nula é ocorrência da mudança de direção do movimento. A situação estática, iminência do arranque, difere nas qualidades inercial e hiperbólica. Curvatura é a situação em que não se contempla nenhum movimento corpuscular específico e se iguala a situação estática.

O caso estático possui um tratamento especial: o equacionamento não segue a intenção geodésica, mas também não ocorre emissão, como exposto em 4.3.2, devido à velocidade nula. Outra nuance: deve-se empregar a equação (2.86b), sem facultar o uso discricionário de (2.96b), por conta de $\dot{\gamma}_v$.

Para deixar patente, a situação estática denotada por:

$$f^1 = f^1|_{(v=0, \dot{\gamma}=0)} \quad (4.132)$$

O que acarreta:

$$\frac{f^1}{c^2} = -\delta^{11}g^{11}\partial_1g_{11} \quad (4.133)$$

A simplificação de (4.131) pode se beneficiar dessas peculiaridades. Iniciando pela introdução de:

$$F^1 = \frac{f^1}{\gamma_v^2} \quad (4.134)$$

Faz-se o análogo:

$$\mathfrak{F}^1 = F^1|_{(v=0, \dot{\gamma}=0)} \quad (4.135)$$

Assim, no contexto mecânico, o arranque pode ser expresso como:

¹¹⁸Estático, circular e radial são casos notáveis. Não existe caso “exatamente” elíptico.

$$\mathfrak{F}^1 = c^0 c^0 \partial_1 g_{00} \quad (4.136)$$

Por fim (curvatura pela equação de Poisson):

$$\partial_1 \mathfrak{F}^1 = c^0 c^0 \delta^{11} \partial_{11} g_{00} \quad (4.137)$$

A variável $\mathfrak{F}^1$ deixa claro que se mapeia uma situação estática/estacionária.

$$\mathcal{R} = -\frac{2}{c^0 c^0 \delta_{00}} \partial_1 \mathfrak{F}^1 \quad (4.138)$$

Equação (4.137) pode ser identificada como Poisson tensorial pela métrica, em vez de ser por um potencial escalar. A advertência é que, embora pareça que possa ser encontrado sem a necessidade do tensor densidade, esta é a expressão para 1-corpo central fixo. É importante destacar que a configuração sistêmica idealizada não é o caso mais geral.

A configuração de 1-corpo central fixo, apesar de facilitar a simultaneidade, é degenerada por não atender ao balanço pela contraparte, visto na sec. 4.4.5, e não contemplar a velocidade relativa, como a forma mais geral por (2.96b), exceto pelo caso em que a velocidade é nula, como ocorre na escolha estacionária em (4.135), o que, em consideração a um sistema de partículas, corresponde a um centroide de massa.

O significado sistêmico de propagação imaterial da atração (força) resultante (componente estática) do centroide de um sistema de partículas deve ser replicado na contraparte material, o tensor densidade.

O equacionamento abstrai a natureza ondulatória de sua propagação, mas deve ser encontrado na contraparte.

[B-Lado direito] Parte material da equação (4.128), o tensor densidade opera sobre uma distribuição produzida por um sistema de partículas no espaço. A concepção analítica conflita com a abordagem pela métrica normalizada o enfoque é para pontual, enquanto uma conceituação sintético é mais adequada.

A métrica normalizada trata de mecânica do ponto material, abstração para corpo pequeno o suficiente para ser considerado pontual, ou ainda, centroide de uma distribuição e o seu deslocamento geodésico. Essa última é a forma de interesse da seção.

Um sub-sistema de partículas circunscrito a uma região do espaço pode ser mecanicamente representado por ponto material correspondente ao centro de momento. Na copresença de outros subsistemas e preservando as características pontuais, a dinâmica da atração que se estabelece entre as partes é simplificada no movimento dos centroides, e, com isso, a recorrência recursiva para o centroide resultante permite abranger casos mais complexos.

Por outro lado, a métrica normalizada estabelece relações diádicas; a composição direta entre três ou mais corpos é dificultada por questões de simultaneidade e causalidade, tomadas por relações dois a dois. Admitir que, por lógica indutiva, todos os sistemas possuirão um centroide mecânico, tomado por base a formação de átomo elementar, viabiliza a representação pontual.

A motivação para o tensor densidade pela teoria da relatividade é abrangente e de cunho analítico: do movimento das partículas à continuidade do espaço. Especificidade sintética da distribuição explora peculiaridade abstraída pela função delta de Dirac e análise funcional.¹¹⁹

$$\Theta^{\mu\nu} = \int \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} m \delta(r) d\tau \quad (4.139)$$

O tensor é dado na forma pela densidade pontual (Landau e Lifshitz)[63]. Representa densidade de evento de simultaneidade: no entendimento estipulado para métrica normalizada, não é possível acompanhar a simultaneidade, mas sim a condicionante peculiar de um observador: centro de momento. A representação pontual de uma densidade (por classe de equivalência) é amostral, ou outra representação possível pelo delta de Dirac.

Regredindo do espaço-tempo para o instantâneo de densidade espacial, um sistema de partículas possui densidade pela composição pontual.

$$\mu = \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (4.140)$$

Uma forma mais elaborada leva em conta que o arranjo de partículas é instantâneo no tempo. Com esse aprimoramento, surgem questões de simultaneidade e, ainda que seja possível ignorar a especificidade de variação do tempo¹²⁰ na obtenção do escalar massa total, o mesmo não seria possível em outras grandezas.

$$M = \iiint \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n) dV \implies \iiint \mu(\mathbf{r}) dV \quad (4.141a)$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{M} \iiint \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n(\tau)) \mathbf{v}_n d\tau dV \quad (4.141b)$$

O contrassenso que surge está na representação de massa-pontual por um centroide de posição definida. Isso traz um certo descompasso com a noção de oscilação dos corpos e consequente oscilação do centróide de massa. fig.5., Por outro lado, um ponto de massa com comportamento oscilatório seria mais compatível com as definições das seções anteriores.¹²¹

Esse mesmo raciocínio do centro de massa e energia de repouso para uma massa pontual aplica-se na densidade.

Esse mesmo raciocínio do centro de massa e energia de repouso para uma massa pontual aplica-se na densidade $\mu(\mathbf{r})$. Uma partícula com energia não possui posição definida; portanto, não faz sentido dizer que uma densidade de energia possui posição definida.

As velocidades em (4.141b) devem ser medidas por algum ponto. O centro de momento expressa o equilíbrio e é um centroide de inércia fixo, pelo que se

¹¹⁹ A delimitação temporal, ou por um volume de controle espaço-tempo, tornar-se-á uma questão recorrente. Ver notas 89 e 91.

¹²⁰Seguido formalismo integral da sec. 4.4.3.

¹²¹Ainda que se colete os indícios ondulatórios, a abordagem pontual é de entendimento mais simples.

sugere na fig. 6. Ao referir-se a esse centroide mecânico, introduz-se incerteza posição-momento, pelo que a mesma figura ilustra. Ainda assim, a resultante deverá possuir um centro de momento fixo. A incoerência aparente é devida à inversão que se coloca na apresentação ou omissão de equações: o equilíbrio no balanço dos momentos é a condição imperativa.

Seguindo as indicações precedentes, em coerência com a composição topológica, sec. 4.4.3, faculta-se prosseguir pelas propriedades ondulatórias ou densidade de distribuição, sendo o segundo mais expressivo para o espaço. A função de Dirac somente faz sentido dentro de uma integral, e atribui-se um significado físico à análise funcional da posição obtida pela integral como a amostra de um instantâneo por um observador particular.

Os diversos observadores concordam sobre como a causalidade pode ser conjugada por um mesmo centro de momento, sendo esta uma propriedade sobre todos os pontos materiais da distribuição. Sintetiza que a extensão espacial é por um instantâneo e temporalmente extrínseco, ou seja, não se furta da existência de um observador.

Nesse enquadramento, a distribuição é sobre o espaço amostral de observadores que possam coletar sobre o estado dos corpos segundo perspectivas covariantes. O conjunto dos arranjos de simultaneidade de observações passa a possuir características termodinâmicas. Macroestado, microestado sugeridos na sec. 4.4.6, mesmo idioma que, embora por uma conotação diferente, traz homogeneidade no formalismo para diferentes escalas.

Em microescala, como um sistema de partículas se organiza em relação ao centro de momento, intenção que pode ser ilustrada por um desenvolvimento pela função de Green para muitos-corpos.

$$\langle f(x) | \delta(x - x_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx \quad (4.142)$$

Macroestado subentende um volume de controle em que densidade compreende uma classe de funções de um mesmo arranjo.

Relatividade Geral escolhe a distribuição dada por Poisson $\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho$ da massa pontual para a função delta de Dirac (o mapeamento holonômico do espaço exige campo e rebalço da variação de Bianchi), enquanto normalizada é aberta a outras possibilidades.

O entendimento feito pela métrica normalizada, o tensor sintetiza macropropriedades de um centroide de massa e, como tal, traz questões sobre ser exatamente localizável. O significado de $\nabla_\sigma \Theta^{\mu\nu} = 0_\sigma^{\mu\nu}$ é trajetória geodésica do centro de massa, e corresponde a atravessar uma curvatura $\nabla_\sigma R^{\mu\nu} = 0_\sigma^{\mu\nu}$. Nesse quesito, a condição de geodésica é muito mais abrangente (restritiva) que o divergente $\nabla_\sigma \Theta^{\mu\nu} \ll \nabla_\mu \Theta^{\mu\nu}$, e o estudo da relação entre os dois temas da continuidade no transporte material.

[C-Divergente] As divergências entre a métrica normalizada e a métrica holonômica da relatividade geral, conceituais e estruturais, confrontam-se com a concordância em formalismo, princípios e concordância de resultados em campo fraco. A intriga é desfeita no entendimento simplificado das condicionantes dos respectivos modelos energéticos, sendo possível apontar onde se originam e de que forma terminam.

Equações de continuidade são leis de conservação mais restritivas sobre a criação e destruição de uma quantidade física localmente. Esse requerimento de causalidade é bem adequado à formulação de teorias de campo.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \oint_{\partial V} \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0 \quad (4.143)$$

O fluxo por uma fronteira explica a variação quantitativa. Com $Q = \int_V \rho dV$, teorema de Gauß e chegar à forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.144)$$

O fato importante é que, para isso ocorrer, em leitura ao teorema da divergência de Gauß-Ostrogradsky, está na passagem da medida total por área (macro, independe da distribuição) para a densidade de volume (micro, dependente de distribuição).¹²²

Considerando a integral no tempo do teorema de transporte de Reynolds, formula-se:

$$\iiint_V \rho dV = \int_t \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt + \int_t \oint_{\partial V} \mathbf{j} d\mathbf{S} dt \quad (4.145)$$

No segundo termo do lado direito da equação, aplica-se o teorema da divergência de Gauß-Ostrogradsky para composição do “jato” de quantidade $\mathbf{J} = [c\rho; \mathbf{j}]$. A diferenciação sobre o índice $\partial_0 = \partial/\partial(ct)$ simplifica o integrando com respeito ao volume, e com isso a da expressão diferencial da continuidade para a forma tensorial:

$$\partial_\mu \mathbf{J}^\mu = 0 \quad (4.146)$$

Seguindo na proposta, deve-se considerar uma família ou classe de equivalência para a distribuição, a análise avança ao abstrair as propriedades por função representativa dessa família. Na última expressão, o termo $\mathbf{J}^\mu d\mathbf{S} dt$ não pode ser colocado como área sem um “gauge” Q_0 ¹²³.

$$\int_t \oint_{\partial V} \mathbf{J}^\mu d\mathbf{S} dt = Q_0 - \int_t \int_V \partial_\mu \mathbf{J}^\mu dV dt \quad (4.147)$$

É preciso solucionar a disparidade entre a continuidade material e a representação do fluxo imaterial. Tomando que:

$$(Q' =) \quad \kappa \Phi = \oint_{\partial V} \mathbf{J}^k d\mathbf{S} \quad (4.148)$$

¹²²O conceito de distribuição de densidade difere de fontes e sorvedouros por evitar o surgimento de dimensões extras por onde as quantidades surgem ou desaparecem.

¹²³A quantidade total Q_0 denota que evita-se a representação de ponto singular do delta de Dirac.

Se ρ é a densidade de Q , tão logo $\kappa\Phi$ seja nulo, o termo $\partial_\mu \mathbf{J}^\mu$ condiz somente ao movimento interno ao volume sem atravessar a superfície de controle e o sistema é fechado. Entretanto, é esperado vincular $\kappa\Phi = \mathcal{R}$, e a ponderação é sobre o imaterial. Se a matéria não flui por meio da superfície de controle, então outra quantidade escapa. Simplificadamente, representa a energia-massa que “projeta-se” ao exterior pela superfície correspondente ao ganho de cinética em relação à massa de repouso pelas relações relativísticas do movimento interno.

$$0 = \int_t \int_V \partial_\mu R^{\mu\nu} dV dt = \int_t \int_V \partial_\mu (\mathbf{J}^\mu v^\nu) dV dt = \int_t \oint_{\partial V} \mathbf{J}^\mu v^\nu d\mathbf{S} dt - Q \quad (4.149)$$

Assim, Q é o balanço entre a componente temporal e a componente de movimento espacial.

$$Q = \int_{\partial U} \partial_\mu \mathbf{J}^\mu d^4x = 0 \quad (4.150)$$

A expressão de continuidade clássica informa que a mudança de densidade intrínseca somente acontece em decorrência de um gradiente; não há criação ou destruição de matéria, nem o seu teletransporte. Com relação ao espaço-tempo relativístico, deixa de fora a energia de organização: a forma como a massa se organiza condiciona a resposta inercial, pois, se, por um lado, uma maior velocidade produz uma “massa relativística” maior para a métrica local. Porém, um observador externo enxerga mais lenta a dispersão $mc^0 c^0 g_{00}$. Em síntese, a energia necessária para mover inercialmente o centroide dessa distribuição não diferenciará entre densidade material e imaterial no resultado em macroescala.

Especificamente ao transporte, a condição importante é a densidade constante ser equacionada por sua variação total nula.

$$\frac{d\rho}{dt} = \partial_0(c\rho) + v^k \partial_k(\rho) = 0 \quad (4.151)$$

A despeito de a densidade aparente ser nula, a densidade intrínseca $\partial_t \rho$ pode não o ser, uma vez que se contraponha como complemento da contraparte espacial para o resultado nulo. Ou seja, a variação intrínseca da densidade varia em razão do gradiente experimentado no movimento.¹²⁴ A variação intrínseca no espaço está conjugada a uma variação intrínseca no tempo. Para uma quantidade constante, a variação ocorre por efeito espaço-tempo, portanto incompreensível, como o esperado pela variação diferencial de volume $\det(g_{**}) = 0$.

Com isso, tem-se que:

$$\partial_\mu \mathbf{J}^\mu = \frac{d\rho}{dt} + \rho \partial_k v^k = 0 \quad (4.152)$$

Como consequência da variação de densidade ser nula, tem-se que o divergente da velocidade deve ser nulo (invariância do elemento de volume e velocidade independente da posição).

¹²⁴ As considerações de densidade intrínseca são de interesse para o volume espaço-tempo em sua contração espacial pela dilatação temporal.

$$\partial_k v^k = 0 \quad (4.153)$$

O caso clássico de interesse está no movimento orbital. Um mesmo resultado dessa abordagem seria chamado, em astrofísica, de solenoidal. O movimento sempre possui divergente nulo, o que é análogo a um limite newtoniano de situação de conservação pela escolha de uma trajetória geodésica $\tilde{\nabla}_\mu(\gamma v^\mu) = 0$.

A ponderação feita é que a trajetória geodésica é condição de transporte mais adequada que a equação continuidade, satisfazendo o requisito de transporte. Para a densidade, é esperado, no caso relativístico, que a dilatação da componente temporal, intrínseca, seja compensada pela contração da componente espacial.

Outro destaque sobre a propriedade da matéria, para o fluxo circular uniforme, poeira em órbita circular, que se caracteriza por ser um vórtice irrotacional: tanto o divergente é nulo quanto a vorticidade $\partial \times \vec{v} = 0$ também o é.¹²⁵ A conjunção entre o divergente $\partial \cdot \vec{v} = 0$ e vorticidade $\partial \times \vec{v} = 0$ é denotada em $\partial_\mu v^\nu = \delta_\nu^\mu \partial_\mu v^\nu + \varepsilon_\nu^\mu \partial_\mu v^\nu$, e as expressões também são condizentes com a noção de que o transporte paralelo $\nabla_\kappa \Theta^{\mu\nu}$ é mais restritivo do que o divergente $\nabla_\mu \Theta^{\mu\nu}$; a satisfação do primeiro implica na do segundo.



A forma mais geral da equação da continuidade inclui fontes e sorvedouros como pontos de “singularidades”. Na perspectiva da continuidade, constituem uma exceção a exclusão do teletransporte, ou ainda transvio para “dimensões extras”. Embora esse seja um ponto de atenção para ocorrência local, o interesse está em outras ocorrências em escala global.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \oint_{\partial V} \mathbf{j} d\mathbf{S} \equiv \Sigma \quad (4.154)$$

Um equacionamento dessa maneira deixa de ser solenoidal: o objeto de controle deixa de ser o espaço que define a superfície de controle coordenadas e torna-se distribuição de matéria no estudo do divergente. A quantidade Σ esquiva-se da fronteira convencional pela superfície de controle definida em coordenada generalizada, o que faz surgir “extra-dimensionalidade”, pois o envelope $\partial_t Q$ não é o mesmo que a superfície de controle operada para a quantidade Σ .

A quantidade Q é uma variável de macroestado observada como resultante pelo exterior da fronteira superfície. Dependendo do contexto, pode ser denominada global, sintética, *on the shell*, integral, em oposição à local, analítica, *off the shell*,¹²⁶ diferencial. Uma vez que a condicionante (o que se conhece) seja a variável macro, as variáveis micro perdem especificidade, o que é denotado na família de funções por classe de equivalência.

¹²⁵Em alusão ao éter luminífero, supor-se-ia inicialmente um fluido de viscosidade nula. A vorticidade exige uma viscosidade infinita, como a de um corpo rígido, confrontando-se contra a definição inicial.

¹²⁶*off the shell*: interações internas cancelam-se mutuamente e não chegam a influenciar a resultante sobre a superfície.

$$Q \equiv \int_V (\rho_i)_{i \in \mathcal{F}_Q} dV \quad (4.155a)$$

$$\mathcal{F}_Q = \left\{ f_\rho \mid \int_V f_\rho dV \equiv \int_V Q \delta^3(r) dV = Q \right\} \quad (4.155b)$$

No interesse relativístico, o envelope material viabiliza o que de outra forma seria impossível acompanhar por condições de simultaneidade: entrada e saída de partículas simultâneas para preservar o balanço. A conveniência do valor nulo em (4.150) circunscreve a distribuição a um sistema fechado pelo seu próprio autoconfinamento, extinguindo a necessidade do controle por simultaneidade.

A expressão (4.155a) denota a independência da distribuição. A função distribuição representativa da família é feita pelo valor em macroescala com auxílio do símbolo de Dirac $\delta(r)$. A generalidade é proveitosa quando a distribuição não segue um padrão funcional: ou por ser estatística, ou por ser dinâmica.

A quantidade global Q resulta em representação espacialmente singular para a definição local do espaço-tempo. O ponto importante é que não deixe de ser solenoide para tornar-se divergente ou, pior ainda, afete a continuidade para esquivar-se do divergente. Dado que a distribuição por função de Dirac coincide com a definição polo, alguma atenção deve ser dispensada nesse conceito.

Singularidades podem ocorrer na forma de singularidades coordenadas, singularidades não-removíveis ou singularidade por polos. O primeiro é exemplificado no uso de coordenadas esféricas por uma métrica não-normalizada. A questão foi discutida anteriormente, com destaque de que ângulos não se transformam linearmente, afetando a normalidade da métrica. Outro argumento refere-se especificamente à sec. 2.8, com destaque de que transformações covariantes não se restringem a mudanças coordenadas e possuem consequência na percepção cinética dos observadores. A transformação deve ser normalizada para preservar as propriedades da métrica, o que se relaciona com o segunda forma de ocorrência, singularidades não-removíveis.

Singularidades não-removíveis são saltos infinitos por lateralidade $(+\infty, -\infty)$. A descontinuidade infinita (ou assíntota vertical com sinais opostos) leva ao colapso do divergente: ponto não pode ser definido nem como fonte, nem como sorvedouro. Em algumas abordagens físicas, as condições permitem que seja tratada como mudança de coordenadas.¹²⁷ Nesse último caso, a situação é tão ou mais indesejável que a anterior.

Polo é uma singularidade holomórfica, diferenciável em uma vizinidade bola aberta. Descontinuidade infinita por uma assíntota vertical em que a vizinidade converge para um mesmo sinal. Ele não causa o colapso do divergente: é fonte ou sorvedouro. Para definição de cada polo, existe uma função ponto-zero com a mesma taxa de variação (complementaridade espaço-tempo). Apesar de o polo espacial pela derivada covariante ordinária ∇_μ produzir um resultado divergente, pode-se fazer o entendimento de que a derivada covariante temporal $\dot{\nabla}_\mu$ garanta que seja solenoide no espaço-tempo ao suprir o termo faltante para satisfazer a definição, em substituição à real condição distributiva. O significado está no transporte geodésico da quantidade macroscópica por referência ao seu centroide, enquanto em partículas elementares, a impenetrabilidade.

¹²⁷Mudança de variável em Kruskal-Szekeres, Eddington-Finkelstein, Painlevé-Gullstrand revelam a “singularidade nua”.

A representação da distribuição da quantidade Q pela representação por um polo espacial é útil na Lei de Gauß do fluxo imaterial.

Entretanto, embora no caso de jato de matéria construído por (4.150) não haja um fluxo de matéria atravessando superfície de controle, a representação pontual é motivada na lei de Gauß é o fluxo imaterial. Essa é a distinção categórica entre as leis de Gauß e a equação da continuidade geral (4.154) com a presença de fontes e sorvedouro.

A existência conjugada de uma quantidade imaterial $Q' = \kappa\Phi$, proporcional ao material, segue trajetória diferente pelo fato de a geodésica imaterial, ilustrada na seção sec.4.5.1, ser distinta da material. Ainda que a quantidade Q esteja autoconfinada por seguir a geodésica material, não há curvatura que detenha uma quantidade imaterial.

No teorema de Gauß o transbordo pela superfície de controle segue a mesma indicação de gradiente $\mathbf{J}^\mu d\mathbf{S} = \partial_\mu \mathbf{J}^\mu dV$ por uma constante diferente. Adaptando às categorias, se, por um lado, no caso material, a matéria está contida no confinamento gravitacional, por outro, no caso imaterial, a variação nula de velocidade indica ausência de aceleração.

✱

A perspectiva clássica dada até aqui apresenta noções intuitivas preliminares na conciliação de duas tarefas antagônicas: controlar a distribuição material e o fluxo imaterial da curvatura.

Nesse contexto, pode-se trazer ilustração de nuvem de poeira. Para uma composição do tensor momento-energia.

$$\Theta^{\mu\nu} = \mathbf{J}^\mu \mathbf{V}^\nu \quad (4.156)$$

Considerando que o transporte paralelo $\nabla_\kappa \Theta^{\mu\nu}$ é mais restritivo que o divergente $\nabla_\mu \Theta^{\mu\nu}$, a derivada covariante temporal $\dot{\nabla}_\kappa (\Theta^{\mu\nu} g_{\mu\nu})$ é beneficiada pela invariância da métrica $\dot{\nabla}_\kappa g_{\mu\nu} = 0$ e a condição solenoidal do jato $\dot{\nabla}_\kappa \mathbf{J}^\mu = 0$ na simplificação para:

$$\dot{\nabla}_\kappa \Theta^{\mu\nu} = \mathbf{J}^\mu \nabla_\kappa (\gamma \mathbf{v}^\nu) \quad (4.157)$$

A dualidade na interpretação: em microescala, a condição solenoide é entendida como continuidade, enquanto em macroescala observa-se o transporte por geodésica. Em ambos os casos, é válido o equacionamento:

$$\dot{\nabla}_\kappa \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (4.158)$$

Pelas considerações anteriores sobre a relação com o divergente do tensor, também é válido $\dot{\nabla}_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$. Em ambos os casos, a condição do tensor momento-energia resulta na geodésica.

$$\dot{\nabla}_\kappa (\gamma \mathbf{v}^\nu) = 0 \quad (4.159)$$

Pela rotação hiperbólica e pelo cancelamento dos índices alternados, é vórtice irrotacional puramente imaterial, independentemente das condições materiais.

Similar ao exposto na ocasião de (4.153), a partícula deve seguir trajetória geodésica, sem colisão para evitar perda de energia e sem decaimento (e consequente colapso).

Incompressibilidade refere-se à mudança de volume. Na métrica normalizada, o elemento diferencial de volume é o determinante da própria métrica: como a derivada é nula, o volume é constante. A coerência nisso é que a densidade do espaço é dada pela própria métrica espaço. Em contraste, quando indiferente ao transporte paralelo pela trajetória geodésica, o transporte solenoidal pelo divergente nulo é sobre a densidade do elemento transportado. Assim, no caso holonômico, a curvatura é o antecedente e resulta na consequente variação da métrica. Isso explica os termos espaciais não-normalizados da holonomia em vez da complementariedade entre espaço-tempo da normalizada.¹²⁸

Ainda assim, em holonomia, a condição de continuidade do divergente nulo é conservativa da quantidade transportada, no entendimento de que o gradiente permite escrever potenciais balanceados. Ou seja, mapear no espaço um campo métrico em vez de tratar por relações diádicas como na métrica normalizada. Algumas questões que surgem dessa abordagem estão na transformação de escala por calibre, mas, em geral, campos potenciais simplificam o processo.

A abordagem normalizada pode mostrar se mais equilibrada, entretanto restrita a dois corpos, enquanto a holonômica é mais direta. Dentro da limitação do que se é esperado para uma representação, a delimitação conceitual de critérios balizam escolha para uma aplicação.

Pela proposta normalizada, a gravitação é geometrizable por uma holonomia da mesma maneira que a regularidade da propensão manifesta da dinâmica é mapeável de maneira latente para todo um espaço por um potencial. Congruências e razões de medidas espaciais próprias a substituem a forma analítica por uma forma geométrica.

[D-O Vínculo] O entendimento de vinculação vem da relação analítico-sintética entre microestado e macroestado. A massa pontual faculta a escolha topológica, apresenta formulação de critério de mapeamento pela correlação entre quantidades intensivas e extensivas em complemento à recorrência intrínseca no remapeamento extrínseco.

As equações da física são expressões de proporcionalidade ou definição de identidade. Tomando como exemplo a lei dos gases ideais.

$$\frac{PV}{N} = k_B T \quad (4.160)$$

Os dois lados da equação correlacionam uma mesma quantidade física. A temperatura do gás ideal é proporcional à pressão e volume do recipiente. Em outra equação da termodinâmica estatística sobre gases ideais, tem-se:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m v_{rms}^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (4.161)$$

¹²⁸Como na métrica normalizada não há limite de densidade para curvatura, pode-se especular sobre sua relação com os processos Breit-Wheeler e Bethe Heitler para o caso da eletrométrica.

Essa expressão de proporcionalidade pode ser tomada como definição para temperatura, entendido que o fenômeno macroscópico é medido pela energia cinética média das partículas de gás.

Essa expressão de proporcionalidade pode ser tomada como definição para temperatura, entendendo que o fenômeno macroscópico é medido pela energia cinética média das partículas de gás. Assim também o é $R = \kappa\Theta$. Pela relação de Bianchi trivial em (4.129), pode-se escrever (4.128) como:

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \equiv \kappa\Theta_{\mu\nu} \quad (4.162)$$

A expressão de proporcionalidade não explica a natureza do fenômeno, enquanto a definição de identidade o faz.

Seguindo a teoria cinética dos gases da termodinâmica clássica, pode-se supor uma nuvem de gás que possua volume inicial correspondente à baixa densidade. Com o passar do tempo, colapsa em direção a um ponto único devido à atração gravitacional. O volume de controle inicial não está em equilíbrio e, além da cinética do gás, deve-se considerar a ação do potencial como um “pistão gravitacional”.

Temperatura é estritamente intensiva apenas quando o sistema está em equilíbrio térmico, porém deixa de ser “estritamente” uma medida intensiva quando o sistema está em equilíbrio térmico não-local. Também não é intrínseco, uma vez que o valor esperado depende da configuração total, dada pela gravidade, pela quantidade de massa, densidade e estágio de evolução.

A teoria cinética dos gases define temperatura apenas em função do movimento cinético. Na nuvem colapsante, a medida intensiva pelo equilíbrio pode ser substituída pelo teorema virial. Afirma que, para um sistema mantido unido por gravidade, um valor médio para energia cinética total é igual à metade do potencial gravitacional liberado. O potencial deixa de ser ignorado, e a discussão torna-se sobre sistemas dinâmicos. A formulação de “invariante” na forma hamiltoniana $H = T + V$, energia específica orbital ou vis-viva completa o novo quadro.

A temperatura, pela estatística termodinâmica dos gases ideais (4.161), possui a mesma estrutura da velocidade *RMS* que o tensor momento-energia (4.139). Reinterpretando a ilustração, o volume de controle, no instante do quadro inicial da nuvem de gás, a dispersão não concentra massa suficiente para produzir uma curvatura significativa. Conforme o sistema evolui, a formação de um adensamento central produz aumento da curvatura métrica. Tensorialmente, se o sistema não estiver em equilíbrio local, o valor esperado (temperatura/pressão) não é um número simples, torna-se dependente da direção do fluxo (quer por anisotropia ou viscosidade).

O traço nas equações (4.128) ou (4.162) resulta em uma expressão de mesma forma da operação análoga nas equações de campo $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \kappa\Theta_{\mu\nu}$ da Relatividade Geral, sendo uma comparação de significado.

Em ambos, o traço muda conforme a nuvem se comprime; a geometria do volume de controle precisa se adaptar “instantaneamente” para satisfazer a equação.

$$\mathcal{R} = \kappa\Theta \quad (4.163)$$

Em comparação, a Relatividade Geral possui uma dupla tarefa: dar forma e movimento à distribuição de matéria, concomitante ao mapeamento do campo de curvatura métrica.¹²⁹ A equação expressa uma identidade do espaço pela continuidade do transporte da densidade de energia. O mapeamento como propriedade do espaço introduz holonomia. Estritamente conservativo, difere da métrica normalizada por sua “organização energética”: simetria esférica, organização da parte não normalizada, ausência de fontes e sorvedouros.

Por outro lado, a métrica normalizada toma (4.128) como uma expressão de proporcionalidade, é sempre por um volume de controle por exigência da função de Dirac, sendo assim uma medida do sistema pelo seu centroide de massa.¹³⁰

$$\int \mathcal{R} = \int \kappa \Theta \quad (4.164)$$

Mantendo a comparação com o virial da nuvem de gás, a equação faz a correspondência entre “energia potencial” de uma posição pelo substituto equivalente de e energia ganha no impulso por colisões no ponto.

Popular virtualmente o espaço por uma amostra representativa dá materialidade ao potencial.

Aspecto estatístico (indiferença ao microestado) é oportunamente reaproveitado na representação das dinâmicas. Posições são eventos de simultaneidade, e a exigência de uma integral coloca a perspectiva de um observador como amostra,¹³¹ o que remete à equação (4.142).

Métrica normaliza descreve movimentos por massa pontual, e a equação (4.163) refere-se a um centroide. O tratamento de corpos extensos foge ao escopo dessa proposta; entretanto, o “viral métrico” pode ser sugerido para confrontar o modelo de equilíbrio hidrostático estelar,¹³² Outro ponto de interesse, em estruturas extensas, anomalia dinâmica na rotação de galáxias.

4.5.3 [Entwurf §6] Gravidade e Eletromagnetismo: Vácuo e Meio Dielétrico

Seguindo a proposta preliminar da relatividade, embora a métrica afete todos os campos por sua transformação covariante, somente a gravidade responde diretamente à variação segunda do tensor métrico. A propagação de onda eletromagnética é geometricamente condizente com a curvatura gravitacional e, uma vez que ondas gravitacionais deslocam-se na mesma velocidade, pressupõe natureza compartilhada.

Na mecânica de onda gravitacional, onda de variação intrínseca da métrica, corresponde à autopropagação dessa métrica em sincronicidade, atualização de seu efeito no espaço, como sugerido na sec. 4.4.6. Onda eletromagnética seria

¹²⁹ Nota: essa é a dupla tarefa de densidade energética. Adiante a dupla tarefa de tensão-pressão.

¹³⁰ Segue conforme 89, 91 e 119.

¹³¹ Na geometrização do problema, mapeamento simplifica a natureza dinâmica do sistema, mas a própria idéia de metrificar todo o espaço, em vez da relação diádica, introduz espaço absoluto.

¹³² A intensidade dos efeitos métricos pode ser desconsiderada no limite de Chandrasekhar. O limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff é de maior interesse para métrica normalizada, e uma equação de equilíbrio hidrostático para métrica normalizada é apresentada adiante.

perturbação na métrica gravitacional, possuindo a mesma mecânica, mesmo que por outra natureza.

Eletrodinâmica clássica possui seu próprio formalismo covariante, escala de calibre, que não apresenta a mesma regularidade da geométrica que a métrica gravitacional. Entretanto, a convergência entre as duas naturezas ocorre na aceitação da mudança de escala.

A onda métrica no espaço atua pela alternância na escala de contração do espaço e dilatação do tempo. A onda eletromagnética, nessa mesma concepção, implica que uma carga elétrica deveria produzir efeitos no espaço-tempo capazes de propagar-se pela métrica. Uma abordagem pode ser elaborada para como os corpos produzem ondas. Uma vez que o cancelamento de cargas resulta em corpo de carga neutra representado apenas pela massa, então, em vez de polarização elétrica do espaço-tempo gravitacional, uma abordagem mais consistente seria a composição da neutralização do espaço-tempo elétrico.

Seguindo uma idealização clássica, suponha um átomo ${}^1\text{H}$, prótio composto por e^- e p^+ em uma posição A . Em um instante do tempo, no eixo de alinhamento do dipolo elétrico, a carga negativa e^- é montado verticalmente abaixo da carga positiva p^+ . No mesmo instante, outra partícula ${}^1\text{H}$, em uma posição equatorial B , encontra-se distante o suficiente da primeira partícula para evitar forças de Van der Waals e não formar uma molécula diatômica.

A situação é instável, entre outros motivos, pela inércia distinta entre as partículas de carga e^- e p^+ de um mesmo átomo, mas a disposição oferece distâncias e forças para uma análise estática da resultante no instantâneo.

Na posição alternada idealizada entre as cargas de dois átomos, é esperada atração.

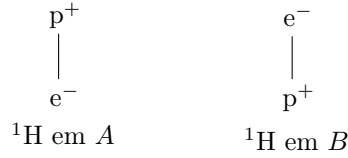


Figura 9: Instantâneo da disposição espacial de dois átomos ${}^1\text{H}$.

Análise da resultante de forças indicaria que cada par elétrico, ao mesmo tempo que atrai, atua no sentido de separar as partículas do outro par, o que é contido e superado pela atração do par. Por uma distância grande o suficiente, a configuração é vista como atração entre duas cargas neutras ${}^1\text{H}$.

Supondo a eficiência total na neutralização de cargas, analisar como a resultante emula atração por movimento geodésico em proporção das massas resultantes e razão com gravidade esperada para massa resultante de cada átomo.

Retoma que o movimento por trajetória geodésica condiciona a variável de velocidade ao equacionamento geodésico para preservar a velocidade limite. As variáveis coordenadas em (2.96a) são condicionadas por uma resultante da curvatura em (2.96b). Em uma inspeção cuidadosa, atração é aditiva para situação de “arranque” pela sua composição primária dos efeitos da variação métrica; entretanto, as variáveis coordenadas não são separáveis e a “resultante pela soma direta de potenciais não é possível. A questão torna-se circular; se houvesse uma álgebra de métricas, resolver-se-ia o impasse surgido por sua ausência. O sistema de partículas é melhor analisado pelo tensor energia.

O tensor energia possui unidade de energia por volume, atendendo ao interesse externo por uma massa de repouso; e unidade de pressão no interesse de composição interna e como se equaciona a uma resultante de forças (4.138). Isso explica a “anatomia” e “fisiologia” do tensor, mas falta o entendimento do “metabolismo”. No tensor, a energia depende apenas da cinética, e não depende da natureza da força que a impulsiona, como apresentado na eq. (4.139). A adição de velocidade não segue uma escala linear de energia: quanto maior for a velocidade, mais energia seria necessária para o próximo incremento. Nesse raciocínio, seria inercialmente mais “pesado”; entretanto, negligenciam-se os efeitos métricos. Na orbitação, uma maior velocidade somente é obtida com uma maior proximidade, e a concentração de massa incorre na sobreposição dos efeitos métricos individuais. Por um lado, isso explica a intensificação da curvatura resultante; por outro, cada corpo estará exposto a um efeito métrico maior.

O tensor energia expõe a primeira parte, que relaciona a cinética com maior curvatura. Implícito, há a energia de organização e de formação: se cada corpo está exposto a um efeito métrico maior, então a parcela $mc^0c^0g_{00}$ pela métrica resultante da equação de dispersão relativística será menor, explicada como energia de autogravitação.¹³³ Em outra perspectiva, um observador externo percebe o corpo com velocidade menor por efeito de g_{00} , portanto mais leve pela “massa relativística”. A questão da energia de formação: a concentração somente ocorrerá com perda de energia em processo natural de orbitação. O corpo só decai se perder energia.

A forma “traço escalar” (4.163) relaciona a energia virial à curvatura por uma constante de escala. Em gravitação, todos os corpos sofrem a mesma aceleração, pois a força exercida é em proporção à massa, enquanto na eletrodinâmica a aceleração depende da carga. Gravidade é geometrizable, ou seja, é possível atribuir uma mesma curvatura de uma fonte métrica para todos os corpos. O processo de neutralização entre as partículas elimina interação com carga externa, mas não ajusta a escala de curvatura. Construir um tensor de curvatura de eletrodinâmica neutralizado exige duas mudanças de escalas. O escalar de curvatura para uma natureza de atração depende da força estática, como visto em (4.138). Assim, a relação de escala entre duas curvaturas pode ser posta por uma constante.

$$\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_g \kappa_{(e/g)} \quad (4.165)$$

Com isso, a relação do tensor curvatura com o tensor energia torna-se:

$$\mathcal{R}_e = \kappa_g \kappa_{(e/g)} \Theta_e \quad (4.166)$$

A relação revisita uma constante da hipótese de Dirac; distrativa para discussão em curso, aprofundamento na interpretação é postergado para outra seção. O importante aqui é que essa razão implicaria em um volume de controle máximo por um horizonte de partículas.¹³⁴ Torna-se premente analisar o tensor curvatura.

¹³³ Atomicamente a perda de massa é observada “defeito de massa” pela eletrodinâmica.

¹³⁴ A razão recai em grandezas coincidentes com a “Hipótese de Dirac para Grandes Números”. Pela necessidade de um volume de controle, a limitação pelo raio pela idade do universo é conveniente. Aqui é denominado Horizonte de Dirac.

$$\kappa_{(e/g)} = \frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_p m_e} \quad (4.167)$$

Em uma concepção mais moderna, as partículas em Θ_e seriam localizadas por (4.142). Ao contrário de teorias de campo, em que campo é atributo do espaço, a métrica normaliza fundamenta-se na realidade cinemática material; com isso, a delimitação de um volume de controle, como exposto em (4.164). A necessidade de um controle de volume implica na escolha da distribuição. Embora tenha procuração para uma função representativa (4.155a) do centroide de massa, a formulação possui suas nuances.

Centro de inércia em movimento inercial ¹³⁵ é apresentado em 4.5.2 pela condição do transporte paralelo. Similar a (4.141b), tem-se:

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{R} dV \quad (4.168)$$

Tal qual a força resultante é uma simplificação para as forças atuantes “dentro” de um corpo, a curvatura resultante reside na capacidade de abstrair ponto material por uma distribuição representativa, trazendo a importância de um volume de controle (4.168): métrica normalizada é demonstrada somente para massa pontual.

O tensor $\Theta_{\mu\nu}$ depende apenas da cinética das partículas, sem menção à natureza que produz a curvatura, enquanto o tensor $R_{\mu\nu}$ é curvatura metrificada pela natureza da atração. O fator de acoplamento κ , contanto que seja constante, pode relacionar atrações de naturezas diferentes.

Da equação (4.138), é possível simplificar $\mathcal{R} = GM/(c^2 r^3)$, e com $\rho \propto M/r^3$ tem-se que $\mathcal{R} \propto G\rho/c^2$. Com isso, é possível chegar ao equivalente da resposta inercial-gravitacional à presença de uma curvatura. Em reverso, uma curvatura somente ocorre pois os corpos possuem uma resposta inercial gravitacionalmente válida.

$$G \int \rho_H dV = \kappa \int g_{mn} \mathcal{R} dV \quad (4.169)$$

Posto de outra forma, a constante gravitacional G é um fator de proporcionalidade com que inércia atua sobre curvatura. Escolhendo ρ_H a distribuição de massa para o átomo de hidrogênio ^1H por massa pontual, chega-se a uma resultante gravitacional. Por outro lado, a composição massa energia deve refletir a cinemática pela soma individual de seus constituintes, como predito em 4.162

$$\Theta = \int (v_e^2 M_e \delta(r) + v_p^2 M_p \delta(r)) dt \quad (4.170)$$

Embora as velocidades sejam resultados da eletrodinâmica, o entendimento é que expressam uma relação de proporcionalidade em vez de uma identidade do espaço. Sai do roteiro analítico das equações de campo da relatividade geral, mas

¹³⁵O movimento é inercial a despeito da sua oscilação pela natureza ondulatória, como ilustrado em 5a.

que possui enquadramento sintético pelo tensor métrico regular. A constante de acoplamento κ_H para o arranjo, aqui um intercâmbio eletrogravitacional.

$$G\rho_H \equiv \kappa_H \Theta \quad (4.171)$$

Percebe-se que a densidade resultante $\rho = M\delta(r)$ varia com a distância radial $r_n = n^2 r_1$ entre as partículas, seguindo a sequência de raios estáveis do modelo de Bohr.

A massa total do átomo varia com a emissão e absorção de energia, em contraparte à mudança do radial e consequente variação cinética nas partículas. Sendo assim, a diferença de massa entre dois estados estáveis leva a uma variante da fórmula de Rydberg adaptada para relação massa-energia. Entendido que $v = c\alpha$ na eq. (4.109), a expressão de energia corresponde a:

$$1 \text{ Ry} \equiv hc R_\infty = \alpha^2 m_e c^2 / 2 \quad (4.172)$$

A energia liberada pelo decaimento orbital é o fundamento mecânico por detrás da equação (4.171) e sua relação com (4.172), substituindo no tensor a velocidade $\beta = v/c$ pela velocidade α em (4.109) equivalente da eletrodinâmica, a velocidade de Sommerfeld. O tensor energia ressignifica a massa das partículas constituintes p^+ e e^- pela sua velocidade para uma nova massa de repouso resultante ^1H , descontada a energia liberada em cada nível. A proporcionalidade com a curvatura é trazida por uma constante de escala.

A proporção dada pela razão entre F_e/F_g e as forças gravitacional e eletrostática não possui uma denominação oficial como uma unidade de medida. Na física teórica, ela é central na Hipótese dos Grandes Números de Dirac. Para o átomo de hidrogênio, resulta em, aproximadamente, $2,26 \cdot 10^{39}$.¹³⁶

A existência da expressão (4.170) justifica conceitualmente por que a soma das massas não pode ser dada diretamente pela soma das massas na métrica $g_{11} = 1_{11} + Gc^{-2} \sum_i (m_i/r_i)_{11}$. Em outro aspecto, uma “soma” das métricas individuais ignora todas as questões de “mobilidade” apresentadas em sec. 2.2. Por fim, a métrica regular é demonstrada para distância a partir de uma única posição fixa radial, a variável coordenada de derivação, o que não acontece por conta da dispersão de pontos do termo $\sum_i (m_i/r_i)$, por movimentos independentes. Entretanto, a convergência desses pontos permitiria uma única distância de derivação.

Tomando um tensor métrico de natureza eletrodinâmica, em que o espaço-tempo é afetado por $k_a = q^2/4\pi\epsilon_0 m_a c^2$, e considerando que a diferença entre as massas do elétron e do próton seja de tal ordem que o centroide de inércia possa ser representado pela posição coincidente ao próton, formular-se:

¹³⁶ Aqui o foco é a preservação da massa. Ainda que se possa especular sobre variação na definição da escala do tempo extrínseco, como deixa aberto em 100, aqui as constantes físicas são tratadas como constantes.

$$\text{Atração:} \quad g_{11} = \left(1 + \frac{k_a}{r + \delta}\right)_{11} \quad (4.173a)$$

$$\text{Repulsão:} \quad h_{11} = \left(1 - \frac{k_b}{r}\right)_{11} \quad (4.173b)$$

$$\text{Neutro:} \quad f_{11} = g_{11}h_{11}\eta^{11} \approx \left(1 + \frac{k_a - k_b}{r}\right)_{11}, \quad (r \gg \delta) \quad (4.173c)$$

Conforme mencionado anteriormente, gravidade é geometrizable, ou seja, é possível atribuir uma mesma curvatura de uma fonte métrica para todos os corpos. Todos os corpos sofrem a mesma aceleração, pois a força exercida é proporcional à massa, enquanto na eletrodinâmica a aceleração depende da relação entre carga. Assim, um e^- pode possuir duas métricas, uma em relação a outro e^- e outra em relação a um p^+ .

Atração segue a normalidade da métrica, sendo que em $r + \delta$ o deslocamento δ é considerado fixo, segue órbita circular fixa e não entra como variável do movimento. Repulsão possui sinal relativo negativo, indicando a condição de partículas de mesma polaridade. Apesar de o sinal negativo apresentar questões de singularidade em proximidade com raio crítico, a interpretação em cargas de mesma polaridade representa impenetrabilidade, reafirmando que: não é uma propriedade do espaço, é uma relação entre corpos.

Em proximidade ao átomo de ^1H qualquer partícula é sujeita ao dipolo formado pelas partículas constituintes. Nessa região, faz-se a análise de sistema de “forças”. Entretanto, há convergência da condição de neutralização e ponto material, ambas alcançadas se distante o suficiente para ser considerado por um único ponto.

A convergência pontual é observada na métrica quando $r \gg \delta > k$, condição em uma “aritmética das métricas”, é possível sem recair nos problemas enumerados anteriormente.

O produto triplo-métrico $f_{11} = g_{11}h_{11}\eta^{11}$ em (4.173c) inclui o termo η^{11} para preservar a variância.¹³⁷ Para raio grande, o termo que envolve o raio quadrático torna-se ínfimo por $k_a k_b \ll \min(k_a, k_b) < 1$. Outro termo resolve para:

$$\frac{k_a}{r - \delta} - \frac{k_b}{r} = \frac{rk_a - (rk_b - \cancel{\delta k_b})}{r(r + \delta)} \approx \frac{r(k_a - k_b)}{r(r + \delta)} = \frac{(k_a - k_b)}{r + \delta} \approx \frac{(k_a - k_b)}{r} \quad (4.174)$$

A expressão resultante converge assintoticamente para métrica que varia pelo inverso da distância. Em condição de grande distância, satisfaz (4.165) e, por conseguinte, (4.166). As cargas neutralizadas emulam a resposta inercial na mesma proporção que a gravidade.

Ondas gravitacionais e eletromagnéticas propagam-se na mesma velocidade, são da mesma espécie, embora originadas por especificação de carga diferente. Oscilação na contração do espaço e dilatação do tempo. Aqui a definição de tempo torna-se mais importante.

¹³⁷Poderia ser $g_{11}h^{11}\eta_{11}$.

Em um entendimento simplista, pode-se dizer que gravidade é uma onda eletro-neutra,¹³⁸ o que seria tendencioso pela decomposição inicial de cargas elétricas. O reverso seria afirmar que a polarização do meio altera a magnitude da curvatura. Ambas são influência da escolha inicial de representação; a forma mais equilibrada é pela ondulatória. As naturezas elétrica e gravitacional estão conjugadas, e a temporização da onda depende das duas.

A neutralização faz predominar o caráter inercial, e o caso ideal eliminaria tanto a carga quanto a massa. Supondo que, em vez da manipulação da variação radial $\delta/r \rightarrow 0$ do desenvolvimento anterior, fosse possível reduzir continuamente a distância entre as partículas de carga, nesse caso as partículas e^+ e e^- , fazendo com que a distância δ entre as partículas seja tão pequena quanto possível, teria-se em (4.173c) para os corpos na vizinidade do dipolo a resultante dada pelo limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_{11} = \eta_{11}$, descrevendo o processo conhecido de aniquilação entre partículas. Faz nota que, nesse caso, a discussão relevante seria por consideração sobre $k_a k_b$ e que a expressão mais adequada para 4.173a seria a pela métrica exponencial $g_{11} = \exp(k/r)$,¹³⁹ que constitui uma discrepância com a métrica convencional em raio pequeno, mas ambas possuem a mesma convergência em raio grande. Como anteriormente, as limitações métricas são superadas no domínio da frequência.

As frequências de propagação se originam por uma oscilação “forçada”, retomando a discussão que segue a figura 8 e se estende para o texto da indexa a nota 100. A frequência natural depende tanto da inércia quanto de constantes de natureza elétrica. Aspectos diferentes de um mesmo fenômeno, e a circularidade indica uma relação sistêmica.

140

A atração é um fenômeno ondulatório, que pode ser decomposto pela dominância elétrica (proporcional à carga) ou inercial (proporcional à massa).

Mecanismo de massa-tempo, ou, simplificando, mecanismo de massa completo, deve contemporizar com outros fenômenos além da aniquilação massa-carga: processos de criação Breit-Wheeler e Bethe-Heitler. Confrontados com as novas ideias de “campo” e “onda” e de estipulação de uma densidade de curvatura limite; mecanismo de massa do decaimento beta de um nêutron.

4.5.4 Ação de Hilbert

A ação de Hilbert, é antecipada no entendimento de que a curvatura se propaga a velocidade constante; portanto, a equação de Euler-Lagrange, aceleração, é nula. Na forma convencional para métrica normalizada, a aplicação do resultado de Euler-Lagrange ‘geral’ seria (4.129). Nessa leitura prévia do resultado de Hilbert, curvatura nula é somente ausência de massa, pois o tensor densidade também seria nulo $\Theta_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu}$.

Há uma colisão entre o que a expressão Euler-Lagrange pode apresentar: propagação, por seu significado geodésico; formulação de força, por seu significado dinâmico; propagação de força, pela combinação de ambos.

¹³⁸ Outra ideia que teria apelo, gravidade seria força residual ou emergente, tal qual ocorre na descrição da força nuclear em relação à força forte. Por outro lado, pelo potencial de Yukawa, decaimento exponencial induzido pela neutralização, a atração elétrica deixaria de “ofuscar” a natureza inercial.

¹³⁹ Métrica exponencial normalizada é elaborada adiante. Cf. 33 e 88

¹⁴⁰ O espaço Minkowski é cinemático, mas não é cinético, como será visto adiante.

A expressão Euler-Lagrange conjuga dois significados: propagação, por seu significado geodésico; formulação de força, por seu significado dinâmico. Em síntese, propagação de força, pela combinação de ambos.

A seção encaminha a reformulação lagrangiana de Hilbert no interesse do tensor métrico normalizado. O termo variacional para ação de Hilbert se decompõe em:

$$\delta(\sqrt{g}R) = \delta(\sqrt{g}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = (\delta\sqrt{g})R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + \sqrt{g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu}) + \sqrt{g}R_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) \quad (4.175)$$

Três termos independentes são obtidos da aplicação do princípio variacional na ação:

$$(\delta\sqrt{g}) \quad \text{Derivada do determinante} \quad (4.176a)$$

$$(\delta R_{\mu\nu}) \quad \text{Identidade de Palatini} \quad (4.176b)$$

$$(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \quad \text{Remanescente} \quad (4.176c)$$

Em comparação com a forma holonômica, ocorre eliminação do termo pela derivada do determinante, e destaque vai para revisão da fórmula de Jacobi da derivada do determinante na condição de dependência funcional entre as componentes métricas. Na métrica regular, o determinante torna-se a função implícita para as componentes métricas, tornando os termos interdependentes no acoplamento diferencial. Como o determinante é constante, o resultado é nulo. Além disso, a especificidade da métrica normalizada está na existência de duas curvaturas cardinais, sendo que a curvatura temporal está sempre em reciprocidade com a curvatura pelas componentes espaciais, vista na sec. 2.5.

Determinante da Métrica Como a métrica normalizada é unimodular, o cofator é igual à inversa;

Seja o determinante dado por:

$$\det(g_{**}) = g_{mn}\delta_p^m\delta_q^n\varepsilon^{pijk}\varepsilon^{qrst}g_{ir}g_{js}g_{kt}\frac{1}{(\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{abcd})} \quad (4.177)$$

A expressão destaca a expansão por cofatores de Laplace. Pode-se obter o cofator do elemento g_{mn} ao eliminar esse mesmo fator da expressão e ajustar as permutações para obter índices livres. Assim, uma operação cofator pode ser expressa:

$$\text{Cof}(g_{**})^{mn} = \delta_p^m\delta_q^n\varepsilon^{pijk}\varepsilon^{qrst}g_{ir}g_{js}g_{kt}\frac{1}{(\varepsilon^{abc}\varepsilon_{abc})} \quad (4.178)$$

Repara-se que é reduzida a ordem das permutações de $\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{abcd} = 4!$ para $\varepsilon^{abc}\varepsilon_{abc} = 3!$.

$$g_{mn}\text{Cof}(g_{**})^{mn} = 4\det(g_{**}) \quad (4.179)$$

Então, na versão reduzida:

$$\text{cof}(g_{**})^{mn} = \delta_p^m \delta_q^n \varepsilon^{pijk} \varepsilon^{qrst} g_{ir} g_{js} g_{kt} \frac{1}{(4\varepsilon^{abc} \varepsilon_{abc})} \quad (4.180)$$

Seguindo a expansão de Laplace, a operação de cofatores de um tensor covariante é um tensor contravariante. Em reverso, pela manipulação de índices, obtém-se definição da operação de cofatores do tensor contravariante, denotado na forma covariante $\text{cof}(g^{**})_{mn}$.

No caso de transposição, o que afeta a mudança dos índices nos símbolos de Levi-Civita $\varepsilon^{qijk} \varepsilon^{prst}$ (ou então $\delta_q^m \delta_p^n$).

$$\text{cof}(g_{**})^{mn} = \text{adj}(g_{**})^{nm} \quad (4.181)$$

Repara-se que, como os índices m, n são fixos:

$$g_{nk} \delta_m^k \text{adj}(g_{**})^{mn} = \delta_m^k \det(g_{**}) \quad (4.182)$$

Então:

$$g_{nk} \delta_m^k \frac{\text{adj}(g_{**})^{mn}}{\det(g_{**})} = \delta_m^k \quad (4.183)$$

As expressões possuem uma definição de inversão pelas propriedades estruturais.

$$g^{\mu\nu} = \frac{\text{adj}(g_{**})^{\mu\nu}}{|g_{**}|} \quad g^{\mu\nu} = \frac{\text{cof}(g_{**})^{\nu\mu}}{|g_{**}|} \quad (4.184)$$

O tensor é ortogonal, em relação à transposição matricial, então, pela manipulação dos índices da operação, caso de inversão:

$$g^{\mu\nu} = \text{cof}(g^{**})^{\mu\nu} \quad (4.185)$$

$$g_{\mu\nu} = \frac{\text{cof}(g_{**})_{\mu\nu}}{|g_{**}|} \quad g_{\mu\nu} = \frac{\text{adj}(g^{**})_{\mu\nu}}{|g^{**}|} \quad (4.186)$$

Ilustrando para métrica esférica normalizada:

$$\begin{aligned} \det(g_{**}) &= \varepsilon^{pijk} \varepsilon^{qrst} g_{pq} g_{ir} g_{js} g_{kt} \frac{1}{(\varepsilon^{abcd} \varepsilon_{abcd})} \\ &= \varepsilon^{qrst} g_{0q} g_{1r} g_{2s} g_{3t} = \\ &= \varepsilon^{0123} \varepsilon^{0123} \delta_{22} \delta_{33} g_{00} g_{11} \\ &= \varepsilon^{01}_{23} \varepsilon^{0123} g_{00} g_{11} \\ &= \varepsilon^{01} \varepsilon^{01} g_{00} g_{11} \end{aligned} \quad (4.187)$$

O resultado esperado pela equação (2.54). O refinamento nos símbolos de permutação vem ao fixar índices 2, 3 e ε^{qr23} , que se tornam ε^{qr} para permutação entre 0, 1; ou seja, $\varepsilon^{pi23}\varepsilon^{qr23}\delta_{22}\delta_{33}g_{pq}g_{ir}$ torna-se igual a $\varepsilon^{pi}\varepsilon^{qr}g_{pq}g_{ir}$ reduzido para os índices 0, 1.

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij}\varepsilon^{mn} &= \delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm} \\ \varepsilon^{01}\varepsilon^{01} &= \delta^{00}\delta^{11} - \delta^{01}\delta^{10} = \delta^{00}\delta^{11}\end{aligned}\quad (4.188)$$

Na métrica normalizada, inversão, cofator e adjunta são, diante da manipulação da ordem de índices, conceitos unificados. O determinante unimodular pode ser pelo produto de qualquer componente por seu inverso.

$$\det(g_{**}) = g_{\mu\nu} \text{adj}(g_{**})^{\mu\nu} \quad (4.189)$$

A derivada do determinante é pela regra do produto entre uma componente vezes o seu cofator, que torna:

$$\frac{\partial \det(g_{**})}{\partial g_{\alpha\beta}} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} g^{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \frac{1}{g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} = 0^{\alpha\beta} \quad (4.190)$$

Identidade de Palatini . O resultado normalizado é similar ao holonômico no aspecto de não contribuir com a ação. Com atenção à fórmula de Voss-Weyl, por atenção ao determinante da métrica.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} \neq \frac{1}{\sqrt{\det(g_{**})}} \frac{\partial \sqrt{\det(g_{**})}}{\partial x^{\nu}} \quad (4.191)$$

Sua aparição em demonstrações ocorre no divergente $\nabla_{\nu}A^{\nu}$. Especificamente, o desfecho $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu}X^{\mu}$: quando a variação é pela métrica no limite, o termo não contribui para a ação.

$$\partial_i U^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} U^i) \quad (4.192a)$$

$$\nabla_i U^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \nabla_i (\sqrt{g} U^i) \quad (4.192b)$$

Remanescente A ação resultante corrobora, para métrica normalizada, a equação preliminar (4.128).

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (4.193)$$

A escolha entre o significado geodésico ou dinâmico da equação de Euler-Lagrange também influencia a ocorrência de variáveis cíclicas ou ignoráveis. A interpretação pela dinâmica entre dois corpos vincula simetria e conservação à reciprocidade. A forma geodésica, a abstração de um dos corpos, coloca a métrica como substituto na associação entre simetria e conservação.

O caso normalizado, pela exigência de restringir a relação entre dois corpos, a simetria é atributo da relação entre os participantes. Holonomia abstrai a presença de corpos pela formulação de campo; assim, simetria é uma necessidade holonômica que é contingente à formulação formalismo.¹⁴¹

O tensor densidade-energia tem desenvolvimento similar. Para fazer constar:

$$S = - \int mc^2 ds = - \int \left(\iiint \mu dV \right) c^2 ds = - \iiint \frac{\mu c^2}{\gamma} dx^4 \quad (4.194)$$

Densidade lagrangiana $\Lambda_{\mathcal{M}}$:

$$\Lambda_{\mathcal{M}} = - \frac{\mu c^2}{\gamma} \quad (4.195)$$

Princípio variacional:

$$\delta(\sqrt{-g}\Lambda_{\mathcal{M}}) = \sqrt{-g}(\delta\Lambda_{\mathcal{M}}) + (\delta\sqrt{-g})\Lambda_{\mathcal{M}} \quad (4.196)$$

Como o determinante da métrica é constante, o termo $\delta\sqrt{g}$ não segue a fórmula de Jacobi para derivada do determinante, vista anteriormente.

O tensor densidade é:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{2}{-\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}}} \mu c^2 \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \gamma^2 \mu \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (4.197)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \iiint \Lambda_{\mathcal{M}} dV = - \frac{c^2}{\gamma} \iiint \mu dV \quad (4.198)$$

4.5.5 Energia em escala absoluta: De Émilie para Emmy

Historicamente, as leis de conservação de energia surgiram em sequência das leis de Newton. A seção apresenta uma revisão normalizada para conservação.

Na situação de dois corpos, seguindo as leis de Newton, um corpo se manterá inercial e somente pode ganhar (ou perder) momento, por variação proporcional à massa, se sua reação corresponder a uma ação de outro corpo.

A condição é independente de a força ser de contato ou ação à distância, difere apenas pelo modo ou forma de transferência da força, mas não as quantidades: a posição espaço-tempo no instante de contato é a mesma entre dois corpos, enquanto a interação à distância, a sincronia da ocorrência do balanço é avaliada como um evento de simultaneidade.

¹⁴¹A condição necessária para a aplicação do teorema de Noether para conservação de energia é que a energia cinética seja expressa em coordenadas generalizadas.

A terceira lei equivale ao princípio da conservação de momento. Na ação à distância, a conservação do momento, balanço simultâneo aferido por todo e qualquer observador, é possível, apesar do tempo de propagação, por um padrão de repetição periódico que torna o movimento ondulatório. A simultaneidade do momento em uma posição tem incerteza por, ao mínimo, um ciclo da oscilação. Tempo extrínseco à métrica, visto na sec. 2.7.2, então é possível relevar essas questões temporais até que se obtenha uma resolução espacial.

O diferencial do impulso vetorial que um corpo A obtém em uma colisão elástica com outro corpo B é $dp_A = \dot{p}dt = -dp_B$, ocorre no mesmo diferencial de tempo. Embora o módulo da força $F = \dot{p}$ seja igual para ambos os corpos na colisão, a aceleração que decorre depende da massa de cada corpo. Assim, ainda que a força seja a mesma, a quantidade de movimento trocada não será, pois a expressão é inversamente proporcional à respectiva massa. m_A , ou à m_B .

Um mesmo lagrangiano de ponto material pode ter vários enquadramentos, segundo o encaminhamento. Enquanto em uma abordagem geométrica o entendimento é feito pelo caminho mínimo, em uma abordagem mecânica, é preferível a decomposição em variáveis de momento e energia.

$$\mathcal{L} = m \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m} \sqrt{p^\mu p_\mu} \quad (4.199)$$

Conforme afetado em proporção inversa da massa, e com relação ao valor absoluto do momento, o diferencial de energia cinética teria uma forma $(1/m)d(\sqrt{p^\mu p_\mu})$, o que corresponde ao diferencial do lagrangiano, ou seu variacional. A raiz na forma covariante é laboriosa, introduz termos redundantes. Uma simplificação consiste na remoção da raiz, acompanhada do fator $1/2$, chegando-se à cinética proposta pela Marquesa de Châtelet, que difere de *vis viva* pelo mesmo fator do diferencial sem a raiz, é melhor por energia $\dot{p}dx$. Relacionado à magnitude das componentes espaciais, tem-se:

$$\frac{1}{2m}d(p^2) = \frac{1}{2m}2p^k dp_k = \frac{1}{2m}2p^k \dot{p}_k dt = 2p^k \dot{p}_k \frac{1}{2m\dot{x}^k} dx^i \quad (4.200)$$

Pela integração e escolhendo-se os intervalos apropriados para cada situação, obtém-se uma expressão de energia cinética. A expressão pode continuar a ser elaborada para uma forma espacial mais interessante, similar ao princípio de D'Alembert.

A ação à distância, diferente da força de contato, tem curso prolongado e contínuo no espaço e tempo, e torna interessante o mapeamento do movimento nessas variáveis. Convencionalmente, o uso de coordenadas generalizadas é feito para ignorar restrições holonômicas. Entretanto, essa abordagem é problemática por ignorar a energia do movimento da base 2.1). Evita-se essas coordenadas holonômicas, preferindo um sistema que se demonstra transformar-se covariantemente. (2.103).

Na métrica normalizada, transformação covariante é um ajuste de escala energética, no entendimento de que energia cinética é relativa à velocidade e, portanto, ao referencial. Entretanto, a transformação afeta todas as variáveis, inclusive as coordenadas, dado que a transformação é conservativa pela invariância da expressão $W = F^k x_k = \Lambda_j^k F^j \Lambda_k^i x_i$.

Retornando à situação de dois corpos, a aceleração do corpo de massa m_A ocorre por reação à influência à distância exercida pelo corpo B , o que é a ação de A

$$F^i dx_i - m_A a^i dx_i = 0 \quad (4.201)$$

Pretere-se o uso de coordenadas generalizadas (holonômicas) em preferência às variáveis coordenadas isométricas apresentadas na sec. 2.3.2. Deslocamentos arbitrários presumem a inexistência de forças holonômicas, e a transformação covariante é pela mesma razão obtida das variáveis cinemáticas, o que é proveitoso nas substituições subsequentes.

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_k} dx_k \quad (4.202)$$

Assim:

$$m_A a^i dx_i = \ddot{x}^i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} dx_k = m_A \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) dx_k - m_A \dot{x}^i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) dx_k \quad (4.203)$$

Onde os diferenciais comutam, então:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} \quad (4.204)$$

Assim, aplicando tanto (4.202) quanto (4.204), chega-se a:

$$m_A a^i dx_i = m_A \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_k} \right) dx_k - m_A \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} dx_k \quad (4.205)$$

O termo sobre derivada parcial ¹⁴² pode ser substituído por uma expressão lagrangiana que só possui o termo cinético $\mathcal{L}_{A_k} = mv^k v_k / 2$ para as k -variáveis espaciais. Uma vez que se possa atribuir uma função lagrangiana que siga a equação de Euler-Lagrange, a substituição por $\mathcal{L}_{A_k} = \sqrt{p^k p_k} / m$.

$$m_A \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \mathcal{L}_{A_k} \right) dx_k - m_A \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{L}_{A_k} dx_k = F^i dx_i \quad (4.206)$$

Similar a equação (4.201), temos que o mesmo procedimento pode ser aplicado ao corpo B . A força entre os corpos é a mesma, porém com sentidos opostos, $F^i = F_A = -F_B$. O mesmo ocorre com a orientação dx_i de cada corpo; com isso, pode-se escrever a relação de direta ação-reação entre os corpos sem a mediação da força:

¹⁴²Notar que a velocidade contravariante $v^i = v^i(t)$ não varia no espaço, mas a covariante $v_i(t, x) = v^k(t) g_{ki}(x)$ sim.

$$\mathcal{L}_k = m_A \mathcal{L}_{A_k} - m_B \mathcal{L}_{B_k} \quad (4.207)$$

Fazendo Euler-Lagrange, tem-se que ação-reação correlaciona-se com a reciprocidade entre os corpos e envolve uma série de simetrias físicas.

O equacionamento, embora correto, não é prático; somente é possível conhecer a equação de um dos corpos se for conhecido o movimento do outro, o que, por recorrência, envolve conhecer o movimento do primeiro. Uma resolução é obtida na abstração de um dos corpos por campo.

Na lei da gravitação universal, a proporcionalidade da força entre os corpos é pelo produto das massas e inverso do quadrado da distância. A expressão de proporcionalidade permite mapear a reação ¹⁴³ que um corpo possui para cada posição que outro corpo potencialmente assuma. A ação à distância torna-se abordagem por campo a partir do eletromagnetismo de Maxwell; o efeito retardado pela propagação causa reação deslocada no espaço-tempo. ¹⁴⁴

Para cada ação, uma reação. Nesse modelo, a ação gravitacional de um corpo é acompanhada de uma reação dinâmica do campo acondicionada na forma da simetria que teria pelo par, se não fosse abstraído o corpo pelo meio.

As construções importantes para fatorar esses grupos de simetria do campo são as transformadas de Legendre, transformadas pelos colchetes de Poisson ou pelos colchetes de Lie. A decomposição por operação diferencial atua em variáveis específicas, expondo constante.

Transformada de Legendre atua em pares de variáveis conjugadas. Na termodinâmica, mapeia variáveis intensivas em sua contraparte extensivas. No caso relativístico, pelo tensor densidade, velocidade poderia ser considerada uma variável intensiva, enquanto momento teria o papel extensivo por depender da distribuição de massa. Uma nomenclatura mais apropriada seria variável forma integral e forma diferencial.

$$\hat{A}_{\dot{x}} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - 1 \quad (4.208)$$

Para o lagrangiano $\mathcal{L} = \sqrt{p^\mu p_\mu}/m$, o hamiltoniano $\mathcal{H} = \hat{A}_{\dot{x}} \mathcal{L}$ resulta em:

$$\mathcal{H} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L} - \mathcal{L} = 0 \quad (4.209)$$

Algebricamente, o valor nulo é esperado, pois a transformada de Legendre é uma operação involuta, enquanto o lagrangiano é uma quantidade autoinvoluta nessa operação; portanto, a transformada de Legendre para o lagrangiano resulta no próprio lagrangiano. Nulo: não existe outra forma de mapear, sem mediação por outra variável.

Pela explanação postulada, o hamiltoniano nulo indica a correspondência direta entre as variáveis velocidade e momento. Recobrando que se preteriu o uso

¹⁴³Campo vetorial de aceleração no arranque mapeado para campo escalar pela relação de gradiente.

¹⁴⁴ Propriedade no espaço como meio é causa comum tanto para as forças eletromagnéticas quanto para a propagação de onda.

de coordenadas generalizadas, o resultado indica não haver outro mapeamento entre as variáveis.

O fato mais notório: se as variáveis são mapeadas diretamente, não existe mediação entre as variáveis. Ou seja, não é mediado por campo. Sem a consideração de dois corpos, as simetrias não estão diretamente acessíveis. Tomando como exemplo o teorema de Poisson, uma quantidade Q :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \{Q, H\} \quad (4.210)$$

Não existe mediação, definitiva ou transitória, por qualquer propriedade relacionada à posição. Lagrangiano é puramente cinético.

A aplicação do teorema de Noether para conservação de energia requer que a energia cinética seja expressa em coordenadas generalizadas.¹⁴⁵ A alternativa está no teorema da energia generalizada, trivialmente correto: $H = E = 0$, a energia é conservada e não varia no tempo.

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \right) = \frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (4.211)$$

Outra forma: reescrever o lagrangiano.

$$\mathcal{L} = - \frac{mc^2}{\gamma} + mc^2 - mc^2 = - \frac{K}{\gamma} - mc^2 \quad (4.212)$$

Assim, o lagrangiano assume uma composição de energia:

$$\frac{K}{\gamma} + mc^2 = \mathcal{K} + mc^2 \quad (4.213)$$

Refazendo (4.209) para (4.212), chega-se à energia total:

$$H = E = mc^2 \quad (4.214)$$

Para um sistema de partículas, retorna a $\Theta^{\mu\nu}$ por (4.194). A conservação é condicionada pela proibição de advecção para fora do volume de controle e, seguindo modelo sugerido em (4.171), será constante se não emitir radiação de qualquer tipo, analiticamente por (4.31a) e (4.31b).

Partindo da mecânica newtoniana, ação e reação é relação simétrica reflete a condição de um balanço no equacionamento. Ao abstrair a ação e reação entre os corpos por um campo, a formulação desse deve se dispor como meio de troca um substituto equivalente. O condicionamento do espaço a um campo torna o processo holonômico, na concepção normalizada, mas simplifica por permitir apenas trocas conservativas, em oposição a processos dissipativos vistos por (4.33) pela elaboração de (4.23). O importante na discussão que se segue é que a ausência de variação em uma quantidade é devida à variação nula ou

¹⁴⁵Explora simetrias da formulação de significado mecânico.

cancelamento mútuo, quer seja por dois corpos ou pela emulação de um deles por campo. Um equacionamento pode se beneficiar da simetria para uma formulação holonômica.

Simetria na ação e reação entre dois corpos depende da sincronicidade dos eventos, condição que deve ser emulada pelo campo.¹⁴⁶

Ângulos não se transformam linearmente, um tema recorrente apresentado na sec. 2.3.2 em contraponto à sua ocorrência holonômica da sec. 4.2.1, e com consequências sobre transformação de medidas de área e perímetro orbitais da sec. 4.4.3. A questão é ilustrada na concepção geométrica que leva à “Trombeta de Torricelli”, exposta em (4.84), ou cinematicamente nas anomalias e aberrações. Não é possível uma razão $p/2r = \pi$ comum ao espaço coordenada e próprio; sugere uma “constante π dinâmica” que dependeria do raio e /ou da velocidade no trato trigonométrico “alinhado” entre os dois referenciais.¹⁴⁷

A conservação do momento angular, pelo disposto em (2.86c) e (2.86d), não ocorre para as variáveis coordenadas. O desregramento é mais pronunciado em distâncias radiais “pequenas”, mas converge assintoticamente para a regra conservativa conforme o raio cresce.

O entendimento dessa situação é sintetizado na observação de que, se houvesse conservação, os corpos não emitiriam energia, pois seria algo proibido pelo balanço do equacionamento. Assim, equações conservativas descrevem uma parte do processo, enquanto uma equação geral não suprime as condições mecânicas de emissão, como as demonstradas na sec. 4.3.2. Nesse enquadramento, a questão deixa de ser intratável e encaminha o remapeamento adequado.

A sec. 4.4.4 contém o equacionamento para condição ondulatória de 4.4.6, que aponta para uma regularidade intrínseca de sincronicidade temporal com um referencial extrínseco. Ou seja, há simetria, então é possível representar conservação no mapeamento por campo pela maneira como os corpos se sincronizam.

Uma vez que o efeito métrico da velocidade em espaço próprio esteja devidamente equacionado, o mapeamento da velocidade $\beta = v/c$ para α em (4.109) para satisfazer a terceira de Kepler (4.107), e com isso o momento angular pela segunda de Kepler.

Ângulo é definido pelo período orbital (4.107), em que o tempo coordenado é uma variável externa sincronizada pela informação de α sobre a frequência fundamental. Em sequência, é preciso de uma escala de regularidade temporal para definir a velocidade orbital α e, com isso, o período orbital que irá fatorar a escala angular do período orbital. A circularidade do mecanismo massa-tempo faz surgir constantes sistêmicas, sendo o coeficiente de definição extrínseco ao processo: a sincronicidade entre os eventos é global.

A ausência de linearidade nas transformações das quantidades angulares também está presente no produto vetorial em vis-redux, que não é prontamente definido de forma ordinária. Seguindo uma definição de produto vetorial por (4.95), a identidade de Grassmann que define triplo produto em (2.96a) e (2.96b) não segue as definições ordinárias de ângulo e/ou função de arco.

¹⁴⁶Específico ao campo retardado, a causalidade na atração ocorre pela formação estacionária, simultaneidade constatada por todos os observadores, é efeito da regularidade. Ver: 4.4.6.

¹⁴⁷Efeitos angulares conhecidos que possam ser correlacionados: arrasto de referenciais, efeito geodético (precessão de de Sitter) e o caso rotacional, precessão de Lense-Thirring.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a})\| &= v \left[va \sin(\psi) \right] \sin(\pi/2) = av^2 \sin(\psi) \\ \sin(\psi) &= \frac{\|\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a})\|}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|v\|^2} = \frac{\|\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a})\|/\|v\|}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|v\|}\end{aligned}$$

A arbitrariedade na omissão de γ_v^4/γ_r^4 , o que poderia trazer a velocidade α ao equacionamento, e presumindo uma identidade para função de arco em $\pi/2$. Também sugere, se as propriedades assim o permitirem, que:

$$\|\mathbf{v} \otimes \mathbf{a}\| = \|\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{a})\|/\|v\|$$

4.6 Torção

Torção é um conceito da geometria riemanniana que tem consequência sobre como deslocamentos diferenciais produzem caminhos consistentes por conexão das bases holonômicas. O desenvolvimento apresentado, embora empregue as mesmas técnicas e notações, não se diria enquadrar nos critérios da disciplina referida e, até mesmo, refuta os princípios holonômicos. Ainda assim, proposta mecânica não termina sem conciliar com geometria riemanniana. O ponto em comum entre as duas matérias está na natureza intrínseca da aplicação em fenômenos elementares, idealizados dos fundamentos mecânicos, que possuem equivalente geométrico. Entretanto, ainda que o estudo de massa pontual em sistema de simetria central por um ponto fixo caiba no tratamento da geometria, eis um motivo para não fazê-lo generalizado: fenômenos não-elementares possuem topologias mais diversas.

Espaço de configuração definido pela rotação hiperbólica no invariante de Lorentz; a mecânica pelo tensor métrico normalizado é holonômica e se fundamenta em princípios não-riemannianos. O tensor de curvatura não é definido pela forma convencional riemanniana.¹⁴⁸ A conexão mecânica, que na forma conservativa é pela continuidade por deslocamentos mecânicos por princípios variacionais, é uma aplicação que condiciona a base à natureza cinemática. A consistência está na condição do tensor métrico de velocidade promover rotação hiperbólica, o que, na forma não-conservativa, é observado na preservação da razão hiperbólica entre as componentes do tensor curvatura.

O tensor métrico normalizado é indiferente à existência de torção, pois, diferente do homólogo riemanniano, a conexão tem fundamentos na invariância da cinética hiperbólica; não existem restrições holonômicas da base. Ainda assim, o entendimento do tensor de torção e sua participação no tensor de curvatura são relevantes pela condição de transcrição da métrica cinemática para métrica holonômica. O que se torna relevante é a forma dos deslocamentos diferenciais.

4.6.1 Elemento de Linha Infinitesimal de Minkowski

Elemento de linha é preterido no desenvolvimento normalizado, e sua ausência é justificada pelo seu viés holonômico em detrimento da perspectiva de continuidade cinemática.

¹⁴⁸Na seção anterior, a curvatura $R_{\mu\nu}$ foi obtida de maneira puramente mecânica; portanto, a concepção independe da curvatura riemanniana $\mathcal{R}_{\mu\nu}$.

A formulação holonômica satisfaz a continuidade de um espaço diferencialmente mapeável, exigindo a ausência de torção. Partindo dessa abordagem, a forma geral do tensor métrico é consequência da condição de continuidade diferencial no espaço.

Intervalo espaço-tempo, medido pela distância em tempo próprio percorrida pela luz, experimenta dilatação do tempo e contração do espaço segundo uma estrutura métrica no movimento de um corpo material. Presumindo que haja curvatura, o tratamento do espaço apoia-se nas propriedades lineares das operações diferenciais para formar um elemento infinitesimal: um deslocamento pequeno o suficiente para ser considerado “plano”. A medida de tempo coordenado é pontualmente metrificação para o tempo próprio por g_{00} em razão de sua dilatação temporal, enquanto espacialmente por g_{ij} para as contrações espaciais. A condição de convergir para o espaço plano torna a forma diagonal desejável.

$$c^2 d\tau = c^2 g_{00} dt^2 + g_{11} dx^2 + g_{22} dy^2 + g_{33} dz^2 \quad (4.216)$$

Regredindo ao espaço plano e expandindo na forma bilinear, um primeiro ponto de atenção é determinar se os termos omissos seriam trivialmente nulos ou estruturalmente nulos.

$$ds^2 = \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 \\ 0 & 1 \cdot 0 & -1 & -1 \cdot 0 \\ 0 & -1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (4.217^*)$$

$$ds^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

A forma correta é dúvida, sem maiores condicionantes. Na verdade, ambos estariam corretos, ¹⁴⁹ e uma primeira condição seria a homogeneidade da forma preservada pela convergência em massa diminuta ou raio grande por uma métrica curva.

A forma simbólica motiva outras condicionantes. A associatividade pela simetria da métrica resulta em uma anticomutatividade dos diferenciais.

$$\begin{aligned} ds^2 = dt \cdot dt \eta_{00} + dx \cdot dx \eta_{11} + dy \cdot dy \eta_{22} + dz \cdot dz \eta_{33} \\ + (dx \cdot dy + dy \cdot dx) \eta_{12} \\ + (dy \cdot dz + dz \cdot dy) \eta_{23} \\ + (dz \cdot dx + dx \cdot dz) \eta_{31} \end{aligned} \quad (4.218a)$$

A associatividade pela comutatividade dos diferenciais resulta em uma antissimetria da métrica.

$$\begin{aligned} ds^2 = dt \cdot dt \eta_{00} + dx \cdot dx \eta_{11} + dy \cdot dy \eta_{22} + dz \cdot dz \eta_{33} \\ + dx \cdot dy (\eta_{12} + \eta_{21}) \\ + dy \cdot dz (\eta_{23} + \eta_{32}) \\ + dz \cdot dx (\eta_{31} + \eta_{13}) \end{aligned} \quad (4.218b)$$

¹⁴⁹Métrica de Minkowski é cinemática, mas não é dinâmica.

No caso (4.218a), tem-se uma anticomutatividade oculta; no caso (4.218b), tem-se uma antissimetria indesejável.

Escolha da métrica, para componentes espaciais, segue o apresentado nas equações de (3.20a) até (3.20i). Nessa forma, para a convergência na métrica de Minkowski, o importante é que $\lim_{\rho \rightarrow \infty} B = 1$.

$$g_{ij} = \delta_{ij} + (B - 1)(\hat{x}_i \cdot \hat{\rho})(\hat{x}_j \cdot \hat{\rho}) \quad (4.219)$$

Ao contrário da sec. 3.1, prossegue-se com a escolha da anticomutatividade do diferencial. Uma forma de representar é por números imaginários, e a sugestão altera a estrutura do diferencial.

A assinatura e números imaginários escrevem-se:

$$ds^2 = \begin{bmatrix} dt \\ i d\vec{x} \\ j d\vec{y} \\ k d\vec{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dt \\ i d\vec{x} \\ j d\vec{y} \\ k d\vec{z} \end{bmatrix} \quad (4.220^*)$$

$$ds^2 = dt^2 g_{00} - dx^2 g_{11} - dy^2 g_{22} - dz^2 g_{33}$$

4.6.2 Torção e Orientação

Orientação é implícita em Geometria Diferencial[7], pois as superfícies trabalhadas são extrínsecas, e os casos de ausência são ignoráveis; implícito, mas tratável, em formas diferenciais [10]. Ainda, a falta de uma forma explicitamente orientada também é tratável pela desnormalização das grandezas.¹⁵⁰ No caso clássico, há alerta sobre superfícies como fita de Möbius ou garrafa de Klein;¹⁵¹ no segundo, a continuidade da integração de formas diferenciais somente é possível em espaços pressupostamente orientados. Na métrica normalizada, os números imaginários introduzem explicitamente orientação.

A noção intuitiva reconhece que uma medida escalar de área é a mesma, independentemente da ordem dos seus fatores. Formas diferenciais possuem arranjos mais elaborados pelo símbolo de Levi-Civita, exemplificado pelo diferencial que se forma com (4.90). A forma simplificada é:

$$\|i\Delta\vec{x} \cdot j\Delta\vec{y}\| = \|j\Delta\vec{y} \cdot i\Delta\vec{x}\| \quad (4.221)$$

Desnormalização atua na norma de maneira distinta: coeficientes são obtidos após fatorar variáveis ignoráveis em uma direção.

$$\|i\Delta\vec{r} \cdot j\Delta\vec{\theta}\| = \|j\Delta\vec{\theta} \cdot i\Delta\vec{r}\| \quad (4.222)$$

Artifício de introduzir o recurso notacional para equacionar operações sobre o espaço holonômico. Distinção entre índices covariantes e denotar orientação explicitamente por imaginários, em equivalência aos resultados conhecidos. (Abdica da generalidade no número pelo número de dimensões)

¹⁵⁰Variáveis por mapeamento matemático de posição dispensam a homogeneidade dimensional. A combinação de esféricas r, θ, ϕ não dá medida de área, mas de perímetro e “ângulo sólido”.

¹⁵¹Convencionalmente, não é tratado como torção.

Prosseguindo com essa extensão holonômica, grandezas tensoriais não são necessariamente orientáveis. A métrica e os símbolos de Christoffel são coeficientes normalizados e, como norma implica, suas “direcionalidades” não são necessariamente orientáveis. Nos símbolos de Christoffel, a taxa de variação da base (leia-se taxa de variação do espaço próprio) por uma coordenada (não orientada), enquanto a métrica é uma quantidade intrínseca que não é relacionada por uma taxa alguma.

Índices variacionais promovem a independência direcional e denotam qualitativamente que uma quantidade somente é afetada por outra de mesma direção, geralmente decomponível pelo símbolo de Kronecker δ_j^i . O principal propósito está na demonstração de invariância diante das transformações de escala. A interoperabilidade entre direções é feita sob o símbolo de Levi-Civita ε_{ij}^k , contração exclusiva entre duas direções em uma terceira. Apesar de definir uma orientação, cancelam-se aos pares e não participam do invariante, sendo quantidades ignoráveis para um balanço geral do invariante.¹⁵² Convencionalmente, são colaterais as grandezas associadas que exigem definição pelo símbolo. Dado o quadro geral, a preferência por simetria e comutatividade, simplificação dos termos ignoráveis, é realizável por alinhamento com uma diretriz¹⁵³ que proporcione simetria de índices em coincidência com simetria coordenada, o que não é possível em cartesianas.

O símbolo ε_{ij}^k opera direção segundo uma orientação; entretanto, é apagado pela contração (substituição por outro símbolo). Também não é possível decompor entre os operandos, uma limitação em representar a álgebra antissimétrica implícita. Os imaginários satisfazem essa necessidade. A concordância com índice não significa que são redundantes e a ausência de notação faculta a álgebra.

Todos os elementos da base possuem instrução de covariância intradimensional pelos índices, e como tornam explícito como operam interdimensionalmente (3.48). Uma vez resolvido o fundamento, a preferência notacional por imaginários é uma conveniência.

Consequentemente, os demais tensores correlatos à base também terão orientações pela propagação das orientações, como o tensor métrico (3.47), mas há casos mais ilustrativos para torção. Incidentalmente, os símbolos de Christoffel não somente possuem a mesma disposição, mas também compartilham a função interoperabilidade (3.66) do símbolo de Levi-Civita na forma normalizada.

Holonomia exige a perda dessas qualidades nos tensores correlatos com a base, como a simetria dos índices anotados em 56, ao mesmo tempo em que a mesma funcionalidade passa a ser suprida externamente.

O emprego de números imaginários não é inédito na relatividade, eletromagnetismo e quântica, ou mesmo em alternativas por álgebras anticomutativas. Exceto pela ondulatória de Schrödinger, a atenção vem da propriedade comutativa quando se passa dos colchetes de Poisson para os Lie, nas matrizes de Pauli e Dirac. Faz-se o caso desaperecebido no operador de d’Alembert e na equação de onda.

Operador de segunda ordem, correlato ao operador de Laplace, não possui uma forma primeira sem a métrica de Minkowski. Uma representação escalar

¹⁵² O cancelamento mútuo de símbolos de Christoffel faz parte da demonstração de que a derivada covariante de Levi-Civita resulta em um tensor (ver: Grinfeld p. 125). O símbolo também pode figurar como tensor ocasional. Ver: (42).

¹⁵³ Direção que atua como um autovetor.

livre sem a necessidade da métrica, é:

$$\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{i\partial x} + \frac{\partial}{j\partial y} + \frac{\partial}{k\partial z} \quad (4.223)$$

Entre as permutações possíveis dos quatro índices, o zeroésimo pode ser considerado neutro e não participa de maneira convencional nas permutações no símbolo de Levi-Civita $\varepsilon_{0\kappa\mu\nu}$ (4.91), ou seja, $\varepsilon_{0ijk} \equiv \varepsilon_{ijk}$, então $\varepsilon_{0\mu\nu} \equiv \varepsilon_{00\mu\nu} = 0$.

$$\partial = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{i\partial x}, \frac{\partial}{j\partial y}, \frac{\partial}{k\partial z} \right) \quad (4.224)$$

A nulidade dos termos de segunda ordem vem pelo teorema de Schwarz-Clairaut.

$$\begin{aligned} \partial^2 = & \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ & - i j \left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \right) - j k \left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z} \right) - k i \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.225)$$

A natureza ondulatória está presente em todo equacionamento. Especificamente para o imaterial, como em (4.122), consiste na oscilação da contração espacial em contraparte da dilatação temporal, mecanismo que descreve forma de propagação, enquanto a geometria da onda depende do movimento da fonte de emissão.¹⁵⁴ Um terceiro aspecto é o seu efeito, que pode ser transversal conforme (3.66). A caracterização transversal, no entendimento de que não expressa a passagem de um fluxo de um ponto para o outro; longitudinal, no entendimento da compressão espacial na direção de sua propagação, e essas caracterizações indicam que codificam vários sinais, a depender do transdutor, sua orientação e frequência de ressonância, se for o caso.

4.6.3 Transcrição Cartesiana

A similaridade no formalismo tensorial entre as formas holonômicas e cinemáticas deve-se ao tratamento intrínseco que ambas promovem; entretanto, expressam diferenças conceituais em suas proposições. A mudança do domínio da velocidade para o domínio do espaço é marcada também pela terminologia sobre um mesmo tensor, que distingue a perspectiva mecânica da perspectiva geométrica.

Contraste entre pares homólogos: os símbolos de Christoffel holonômicos apresentam-se no trato de torção, enquanto os símbolos de Christoffel cinemático, indução.

Tomando que a semântica dos tensores na forma mecânica é mais abrangente, uma vez que a geometria tratada concerne ao caso em que haja regularidades e simetrias, é possível estabelecer a compreensão das formas transcritas, explicada pela relevância que a velocidade, tanto em direção quanto em intensidade, possui nas duas modulações.

¹⁵⁴Ver nota 99.

Na métrica regular, o símbolo de Christoffel representa o coeficiente de indução que atua pela direção e intensidade, portanto anisotrópica: tanto maior a velocidade, bem como tanto maior o alinhamento, maior a intensidade. Por outro lado, a regularidade da fonte fixa e simetria de um sistema de coordenadas móvel torna o fenômeno intrínseco mapeável no espaço recuperável pelas propriedades geométricas da ocorrência do fenômeno pela recorrência no ponto.

Ainda que se possa condescender, no caso de simetria esférica, que o fenômeno é atribuído intrinsecamente ao espaço, não há a mesma complacência na mudança de sistema cartesiano por não encontrar as mesmas simetrias: a covariância falha.

O entendimento da causa mecânica dessa falha permite a transcrição holonômica (sem torção) cartesiana, ainda que não covariante com a holonomia esférica, dado que ângulos não se transformam linearmente.

A compreensão conceitual inicia-se na forma como os deslocamentos diferenciais são concebidos.

Partindo da perspectiva cinemática, deslocamentos diferenciais arbitrários não são conservativos, exceto aqueles que, em razão da intensidade e direção da velocidade, atendem a princípios variacionais. Entretanto, em analogia ao dissipativo atrito clássico que depende da velocidade, um deslocamento dx pode ser, em baixa velocidade (ou ponto de arranque), considerado não-dissipativo. Deliberadamente suprime-se o efeito à velocidade para adequar-se ao modelo.

O modelo holonômico não sabe como trabalhar a indução da velocidade, exceto na simetria. A base móvel absorve efeito da velocidade, eliminando as assimetrias, rendendo um tensor de torção zero. Por outro lado, a alternativa seria a introdução de campos vetoriais ou outras abordagens, como as de Cartan.¹⁵⁵ O artifício que se faz presente na base cartesiana reproduz o mesmo efeito por meios diferentes.

Desnormalização para holonômico, assim como em esféricas, ocorre pela manipulação simbólica entre os homólogos cartesianos.

Partindo de (3.58), com referência a um valor conhecido, as componentes espaciais possuem “covariância ocasional”,¹⁵⁶ o que permite substituir (3.63d) por $J_a^\alpha \mathcal{J}_\mu^m \mathcal{J}_n^\nu \Gamma_{\nu\alpha}^\mu$, ilustrado por $\mathcal{J}_3^m = \mathbf{k}J_3^m$ e por $\mathcal{J}_n^1 = \mathbf{i}J_n^1$.

$$J_a^2 \mathcal{J}_3^m \mathcal{J}_n^1 \Gamma_{12}^3 = J_a^2 (\mathbf{k}J_3^m) (\mathbf{i}J_n^1) \Gamma_{12}^3 \quad (4.226)$$

Em vez de proceder à conversão usual entre sistema cartesiano e esférico, preceder a definição de um novo símbolo simétrico pela variação intrínseca da base com relação a uma coordenada possui resultante pela soma dos correlatos antissimétricos.

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(\mathbf{i}\hat{\mathbf{e}}_1) = \mathbf{k}\mathbf{i}\Gamma_{12}^3(\mathbf{k}\hat{\mathbf{x}}_3) + \mathbf{j}\mathbf{i}\Gamma_{12}^2(\mathbf{j}\hat{\mathbf{x}}_2) + \mathbf{i}\mathbf{i}\Gamma_{12}^1(\mathbf{i}\hat{\mathbf{x}}_1) + \mathbf{1}\mathbf{i}\Gamma_{12}^0(\mathbf{1}\hat{\mathbf{x}}_0) \quad (4.227a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\mathbf{j}\hat{\mathbf{e}}_2) = -\mathbf{k}\mathbf{j}\Gamma_{21}^3(\mathbf{k}\hat{\mathbf{x}}_3) - \mathbf{j}\mathbf{j}\Gamma_{21}^2(\mathbf{j}\hat{\mathbf{x}}_2) - \mathbf{i}\mathbf{j}\Gamma_{21}^1(\mathbf{i}\hat{\mathbf{x}}_1) - \mathbf{1}\mathbf{j}\Gamma_{21}^0(\mathbf{1}\hat{\mathbf{x}}_0) \quad (4.227b)$$

¹⁵⁵Poderia-se dizer que Cartan, quando não emprega formas diferenciais, contorna a torção na fita de Möbius por considerar um sistema móvel, em vez de coordenadas fixas ao espaço.

¹⁵⁶Ver nota 152.

Percebe-se que, em um primeiro momento, considerou-se a base simétrica por $i\hat{\mathbf{e}}_i$ e $j\hat{\mathbf{e}}_j$, o que tornaria similar a (3.48), enquanto se espera (4.1). A falta de consistência vem da própria holonomia, mais especificamente, do discriminante holonômico (4.8), ao qual as igualdades se prestam. Uma expressão $[i\partial_1, j\partial_2] = 0$ poderia ser escrita por $k\varepsilon^{ij} i\partial_i j\partial_j = 0$, satisfazendo o teorema de Schwarz-Clairaut. De outra maneira, se fosse considerada a simetria, não haveria distinção entre os sinais e seria imediato que $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{e}}_k$.

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(i\hat{\mathbf{e}}_1) = -i\Gamma_{12}^k \hat{\mathbf{x}}_k \quad (4.228a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(j\hat{\mathbf{e}}_2) = j\Gamma_{21}^k \hat{\mathbf{x}}_k \quad (4.228b)$$

Pela mesma consistência notacional, falta o imaginário de cada uma das variáveis de diferenciação $\hat{\mathbf{e}}_i = \partial/i\partial x^i$. Considerando que $j = ki$ e que $i = -kj$, a simetria nos símbolos $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ é obtida pela comutação dos imaginários.

$$\frac{\partial}{\partial(jx^j)}(i\hat{\mathbf{e}}_i) = -j\Gamma_{ij}^k \hat{\mathbf{x}}_k = i\Gamma_{ji}^k \hat{\mathbf{x}}_k = \frac{\partial}{\partial(ix^i)}(j\hat{\mathbf{e}}_j) \quad (4.229)$$

Alguma concessão é feita na desnormalização para holonomia. Assim como esférica, o determinante da métrica deixa de ser unimodular; em cartesianas, perde-se projeção e rejeição de 3.2.1. Também não é esperada a transformação esférico-cartesiana entre holonômicas, uma vez a transformação de ângulos não é linear.

$$\det(g_{\mu\nu}) \neq -1$$

5 Natureza do Espaço-Tempo

Natureza do espaço-tempo refere-se à representação apropriada do espaço para a métrica normalizada. Ainda que o fundamento descrito procure ser conciliável com a noção ontológica do espaço, o que se torna relevante é a descrição sistêmica comum a um vasto espectro de soluções.

Do átomo à fronteira do cosmos, gravitação e eletrodinâmica abrangem fenômenos que se estendem por trinta e seis ordens de magnitude. A coexistência de fenômenos em amplitude de escalas diversas delimita o que é significativo e o que é abstraído para uma resultante de causa-efeito. Não obstante, relações cinemáticas não buscam reinterpretação, como em *Umdeutung* de Heisenberg[48], que substitui descrições cinemáticas clássicas. Em vez disso, predica um imperativo topológico, a escala de velocidade que deverá ser satisfeita no espaço ontológico por uma representação topológica.

Outras situações tornam-se interessantes: compositividade, vácuo, espaço plano, tempo e generalidade por métrica. Rudimentos existenciais para satisfazer especificidades de leis da física, mas não generalidades matemáticas. ¹⁵⁷

¹⁵⁷Escapar da armadilha da generalização matemática: entre todos os espaços imagináveis e descritíveis, nem todos são adequados/apropriados.

5.1 Imperativo Topológico

Variáveis de velocidade são independentes das variáveis de espaço. Uma determinada posição pode ser populada por corpo com qualquer velocidade, e a demarcação por um referencial permite descrever e/ou constatar extrinsecamente fatos intrínsecos.

A despeito da descrição ser feita por referencial externo, a velocidade é condicionada pelo seu momento, e a qualidade intrínseca desse *ímpeto* não varia de forma absoluta, mas relativa ao movimento de outro corpo. A conservação de momento entre dois corpos pode ser expressa analiticamente, independentemente da escala de espaço, pela arbitrariedade promovida pelos índices covariantes. Velocidade é propriedade intrínseca da relação entre dois corpos que não possuem movimento relativo acima da velocidade limite. Na cinética, a escala de dilatação temporal é inversa da contração espacial, rotação hiperbólica, e o equilíbrio dinâmico por essa relação é estrutural por uma oscilação fundamental.

A generalização da rotação hiperbólica não se restringe ao caso geometrizável. Rotação hiperbólica é expressa independentemente de qualquer estrutura de espaço, que é válida se a deformação dessa estrutura espacial pode satisfazer a rotação hiperbólica.

Conhecidas as condições de movimento e estabilidade na regularidade, a situação inversa é atribuir escala de tempo pela regularidade periódica e demarcar distâncias em proporção às medidas do movimento ou da velocidade limite. A regularidade desse relógio natural, independente de referenciais externos, é consequência da condição de estabilidade intrínseca.

Avançando na descrição intrínseca da velocidade, o bilinear cinemático, na condição estacionária por um corpo fixo, possui mapeamento de geometrizável. O tensor métrico resultante dessa condição, como a denominação implica, dá a definição de comprimento, ângulo, área e volume.

A definição relativística da velocidade não reside na escolha de uma topologia específica, mas de um imperativo topológico que satisfaça o invariante de velocidade. Ainda assim, representação requer um espaço de configuração: fronteira material, volume de controle. Seguem questões sobre o ambiente, sua dimensionalidade e sua natureza.

5.1.1 Espaço Métrico e Dimensionalidade

A definição de distância é o rudimento de um espaço métrico. Pela adição de estrutura, a grandeza escalar é operada pelo produto interno especificado por uma forma bilinear, a mesma que define ortogonalidade. Ortogonalidade hiperbólica possui suas especificidades em relatividade especial, mas é restrita a uma forma bilinear simétrica.

A operação bilinear pelo tensor métrico normalizado na forma cartesiana, termos espaciais na expressão (3.47), possui definição tensorial de paralelismos, exemplificado em $V^\mu V_\mu = c^2$, e ortogonalidade, observado na derivada $A^\mu V_\mu = 0$ da expressão anterior. Ortogonalidade tensorial apresenta produto interno nulo, porém o mesmo critério não é aplicável aos tensores da base. Simplificadamente, a própria rotação hiperbólica coloca, indiretamente, os tensores covariantes em combinação linear entre si.

Ortogonalidade implica em restrição da cardinalidade dimensional na produção de uma base linearmente independente. O que pode ser demonstrado é

que a dimensão do espaço tensorial, i.e., a cardinalidade da base, não pode ser maior (nem menor) do que é estabelecido.

Convencionalmente, o processo de Gram-Schmidt, ortogonalização, parte de um conjunto de vetores e prossegue por uma definição de projeção ortogonal, tal qual em 3.2.1, definida pelo produto interno. A necessidade de idempotência conduz à projeção diedral, sec. 3.2.3, e a ortogonalidade deixa de ser expressa pela nulidade do complemento ortogonal para ser expressa por um conjunto de números imaginários, que externaliza a comutatividade da operação e propriedades simétricas dos resultados. A adoção deste conjunto, isoladamente, coloca uma restrição na generalização por expansão do número de dimensões ou a subespaços; entretanto, esse recurso não introduz artificialidade na propriedade.

Supondo o espaço métrico em que não exista uma restrição estrutural da dimensionalidade. Por um corpúsculo singular, obtém-se a propriedade reflexiva da distância.¹⁵⁸

$$d(A, A) = 0 \quad (5.1a)$$

Por dois corpúsculos não coincidentes, a reflexividade encontra representação por um eixo.

$$d(A, B) = d(B, A) \quad (5.1b)$$

Três corpúsculos e o plano: uma vez que cada par de pontos não coincidente representa um eixo, por três pontos, pode-se obter dois resultados em relação à desigualdade triangular:

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C) \quad (5.1c)$$

$$d(A, C') \neq d(A, B) + d(B, C') \quad (5.1d)$$

O trânsito entre os pontos da primeira expressão é descrito como um eixo, e os pontos são ditos colineares, enquanto a desigualdade da segunda expressão é atribuída à existência de outra dimensão, ou um eixo extra. Dois eixos não colineares definem um plano e um total de duas dimensões espaciais.

Supondo, agora, quatro corpúsculos que não estão restritos ao mesmo plano, pela representação de um tetraedro, obtém-se equações:

$$d(A, D)^2 = d(A, B)^2 + d(B, D)^2 \quad (5.1e)$$

$$d(A, D)^2 = d(A, C)^2 + d(C, D)^2 \quad (5.1f)$$

$$d(B, C) \neq 0 \quad (5.1g)$$

Pelo segmento $\overline{AD}$, é possível definir dois planos, um por B e outro por C . O espaçamento entre os planos distintos exige uma dimensão extra à dos planos existentes. Ainda que não seja possível expressar a ortogonalidade dos planos, também não se poderá expressar combinação linear de um pelos elementos do outro. Os dois semiplanos que partem do mesmo segmento de origem $\overline{AD}$ definem um ângulo diedro e um total de três dimensões espaciais.

¹⁵⁸Também pode ser referido como autodistância, ou também identidade dos indiscerníveis.

Extrapolando para cinco pontos, A, B, C, D, E , a análise recai no resultado anterior de quatro pontos em relação às combinações que possam ser feitas em relação ao quinto. Supondo que chegue a uma quarta dimensão espacial, a conclusão esperada é que sempre será possível reduzir uma delas à combinação linear das outras.

Considerando-se a distância $\overline{AE}$, passando pelo espaço BCD , o segmento $\overline{AE}$ formará planos com $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ou $\overline{DB}$. Uma vez que esses segmentos também definem planos entre si, haverá redundância na forma como um poderá ser expresso em combinação de elementos direcionais dos outros. O padrão de permutação na mudança de direção. A mudança de um plano recai em outro existente. Na noção, pode ser expressa nas mudanças de direção do itinerário $((A, B), C) = D$, em que se admite a permutação cíclica $((D, A), B) = C$. A substituição de um ponto entre quatro por $((A, B), E) = D$, então a permutação recai em uma das combinações existentes $((D, A), B) = E$. Os pontos de chegada serão diferentes, o que é expresso diretamente, mas a contagem de mudança de direção será a mesma, o que, pelo princípio da identidade dos indiscerníveis, resulta na mesma dimensionalidade.

A permutação entre os elementos é correlata ao determinante de complexos pela formulação de identidade (3.23) em que projeção e rejeição são disjuntos. A operação por orientação, dois operandos possuem um resultado unívoco projetado em um terceiro existente, e o espaço orientado terá um conjunto de três dimensões espaciais.

A definição de dimensionalidade por ortogonalidade também existe no espaço de Hilbert, porém atende ao critério de dinâmica convoluta em vez de orientação.

5.1.2 Auto-Organização

A equação (4.128) vincula a estrutura do espaço-tempo à distribuição de matéria que ela procura organizar. O tensor energia (4.139) foi inicialmente descrito como uma forma caótica de organização ¹⁵⁹ característica do sistema de n-corpos estabelecido por Poincaré.

Ordem surgida do caos remete a padrão estatístico com recorrência fractal, tanto em autossimilaridade de escala. Conceito de organização pela correlação com energia de vínculo e sua entropia de autogravidade e defeito de massa.

O tensor energia Θ expressa um centroide por uma massa constituída em (4.164) e a curvatura resultante $\mathcal{R}$ por massa menor que a soma dos constituintes. ¹⁶⁰ A forma pontual qualifica como quantidade intensiva, ou um microestado. Uma quantidade em extensiva, delimitada por um volume de controle, é uma quantidade macroescala.

$$\iiint \Theta dV \equiv \langle \Theta \rangle = \langle P \rangle V \quad (5.2^*)$$

A delimitação de um volume de controle implica na perda de covariância, ¹⁶¹ uma vez que se vincula à coordenada de observador; porém, a restrição somente

¹⁵⁹Na proposta preliminar das Equações de Campo da Relatividade Geral, o volume de “massa incoerente” é descrito por *der Strömung inkohärenter massen* na composição de *Spannungs-Energietensor der materiellen Strömung*.

¹⁶⁰Ver texto que se remete à nota 133.

¹⁶¹Covariância é recepcionada na métrica normalizada, sec. 2.8; a transformação entre estados de energia estacionários e conhecidos dá suporte à transformação coordenada.

trona explícito o que já estava presente implicitamente na definição. O tensor representa densidade por evento de simultaneidade; um condicionante peculiar de um observador é amostral por uma classe de equivalência.¹⁶²

O tensor energia possui grandeza em dimensões $[\Theta^{\mu\nu}] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ nas unidades do sistema internacional, é expresso em Joules por metro cúbico (J/m^3) ou Pascal (Pa). No lado direito da equivalência acima, pressão é a variável que satisfaz a sentença. Manipulando a relação linear, a expressão define uma pressão $\langle P \rangle$ com qualidade extensiva, uma vez que seria definido um valor médio.

Há uma contradição inerente ao tensor-energia entre o que propõe e o que se pretende.¹⁶³ Em analogia, temperatura é estritamente intensiva apenas quando o sistema está em equilíbrio térmico, o que, em sua ausência, é substituído pelo teorema virial. A perspectiva de diversos observadores não será covariante, pois a quantidade se transforma de maneira linear: depende extensivamente de todo volume e, como não está em equilíbrio, o estágio de evolução será percebido de forma diferente entre os observadores. Havendo equilíbrio, então os termos de não-linearidades seriam suprimidos, e a covariância seria possível, mas o sistema seria evolutivo.

O contorno vem do entendimento de que o cerne do conflito está em tratar uma quantidade em equilíbrio. Supondo que a transformação seja lenta o suficiente para ser considerada em equilíbrio, é possível modelar variação marginal, mas não o seu curso evolutivo. Apesar dessa limitação, o equacionamento revela relações interessantes. Prossegue-se supondo o equilíbrio.

Supondo o equilíbrio e, quando fora da integral de volume, a quantidade Θ é intensiva e, embora seja obtida por uma definição cinética, o resultado recebe unidade de pressão.¹⁶⁴ Ademais, definição é pela massa dos constituintes, massas da microescala, enquanto a resultante pela curvatura $\mathcal{R}$ é expressa pela massa constituída resultante em macroescala. A diferença entre quantidades é entendida pela maneira como a organização da matéria no corpo indisponibiliza parte da energia para manutenção de sua estrutura, o que se reflete na forma de redução de massa.¹⁶⁵

A transformação da quantidade intensiva (microescala) em extensiva (macroescala) é um fator de escala e pode ser replicada na pressão P . Supondo que a aplicação diferencial desse fator de escala seja funcionalmente linear por ρ_{eff} , o produto por parcela $V/m_u = 1/\rho_u$ normalizaria a constituição interna a Θ . Assim, ρ_θ/ρ_u é escala de proporção.

$$n\Theta \equiv \rho_{\text{eff}} \frac{V}{m_u} \Theta = -VP \quad (5.3)$$

A quantidade m_u é a unidade de massa dada por um corpo de referência constituído, e a contagem média fatora a um escalar n em equivalência à contagem quanto a esse mesmo corpo de referência. A pressão passa a ser uma quantidade intensiva pela disposição dos corpos em microescala, mas com os seus valores de massa transformados em macroescala.

¹⁶²Ver comentário sobre pseudotensores 89, 119 e 130.

¹⁶³Peter Landsbert “Thermodynamics with Quantum Statistical Illustration”. p.142: “Não misture propriedades intensivas e extensivas”.

¹⁶⁴Aqui, a pressão é tratada abstratamente, mas pode se referir à pressão de estagnação para deter o corpo, ou pressão de radiação pela sua natureza ondulatória.

¹⁶⁵Veja texto que se remete à nota 133.

$$P = \frac{\rho_{\text{eff}}}{m_u} \Theta \quad (5.4)$$

Conforme Θ varia, parte da energia torna-se estrutural na forma de inércia. Seja m a somatória das massas de repouso constituintes em microescala, e M a resultante constituída em macroescala. As energias de repouso possuem expressões diferentes de acordo com a escala.

$$(\text{micro}) : \Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2 = 0 \quad (5.5a)$$

$$(\text{macro}) : \Delta U = \Delta M \cdot c^2 \neq 0 \quad (5.5b)$$

Como correspondente à energia total em microescala $E = \gamma mc^2$, a macroescala decompõe-se em:

$$dH = \gamma c^2 dM + Mc^2 d\gamma \quad (5.6)$$

Essa última variável, permite fazer analogia à termodinâmica clássica; tem-se:

$$U = PV - H \quad (5.7)$$

A elaboração por essa forma prossegue pela energia livre de Landau [62], e o *ensemble* grande canônico tem em vista que a energia total e o número de partículas no sistema são “fixos” para satisfazer o pressuposto de variação marginal lenta. A linguagem familiar, emprestada da física estatística, comunica a noção do processo irreversível para obtenção da quantidade transformada e o sentido de evolução, mas a margem de erro aumenta conforme se afasta do ponto de equilíbrio em que é calculada.

As quantidades H e U relacionam-se entre si pela transformada de Legendre, que conjuga quantidade intrínseca P à extrínseca V . Por esse mesmo padrão, uma variável extensiva estaria conjugada à quantidade Θ intensiva.

A variável extensiva $n = \rho_{\text{eff}}/\rho_u$ sintetiza o equilíbrio em macroescala em um número médio pela razão entre densidades. A dinâmica interna estabiliza a distribuição devido à permutação de um arranjo de interações de massa para outro produzir a mesma classe de equivalência de interações. Um quantificador para classe de equivalência, com referência ao processo combinatório, é obtido pela expansão binomial.

$$\left(1 + \frac{x}{z}\right)^z = \dots = \sum_{k=0}^z \binom{z}{k} \frac{x^k}{z^k} = \dots = \sum_{k=0}^z \frac{x^k}{k!} \quad (5.8)$$

Em um entendimento por convolução binomial,¹⁶⁶ a expansão fornece um número de valência de ligações na estrutura organizacional pelo o potencial

¹⁶⁶Uma partição de tamanho x/z considerando k ligação entre $(x/z)^k$ interações convolutas é expandido em vários níveis de agregação que escalam em um espectro contínuo de combinações.

de interações que uma densidade normalizada para n elementos possui quando $z \rightarrow \infty$.

O equilíbrio é pontual pela média, e uma contagem completa relaciona o espaço amostral dos pontos de equilíbrio pela sua proporção de ocorrência.

O importante é observar que a estrutura em macroescala, medida na razão entre volumes, é sustentada pela dinâmica organizacional em microescala. Essa dinâmica vincula parte da energia à estrutura, refazendo o valor de massa da mesma maneira que ocorre gravitacionalmente por autogravidade ou atômica-mente por defeito de massa. A razão dada por n expressa uma relação para massa constituída em macroescala e sua variabilidade por (5.6). Associado a isso, há soma das massas constituintes. A quantidade associada ao nível de organização promovido pela dinâmica interna será denominada entropia do processo de vínculo, denotada por $\mathfrak{S}$.

Assim como P está conjugado a T , temos que a organização da densidade por n está conjugado a Θ , mas sem nenhum ganho para transformação de Legendre. A substituição de n pelo correlato funcional $\mathfrak{S}$, por ser taxa relacionada, estender a transformação Legendre.

$$\Theta = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{S}} \quad (5.9)$$

O entendimento é que a atividade medida por Θ dá a medida da variação de energia pela variação da dinâmica estrutural.

Retornando à analogia termodinâmica, o equilíbrio é uma situação estacionária equivale à variação de arranque (4.137). O estudo do não-equilíbrio é feito pelas relações recíprocas de Onsager.[79]

$$\mathbf{J}_\rho = [c\rho; v\rho] = [c\rho; \mathbf{j}_\rho] \quad (5.10a)$$

$$\mathbf{J}_u = [cu; vu] = [cu; \mathbf{j}_u] \quad (5.10b)$$

$$\mathbf{J}_s = [cs; vs] = [cs; \mathbf{j}_s] \quad (5.10c)$$

Onde o fluxo $\mathbf{j}_s$ é dado pela combinação dos outros dois, que, por sua vez, são definidos por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_\rho \\ \mathbf{j}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{uu} & L_{u\rho} \\ L_{\rho u} & L_{\rho\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla(1/\Theta) \\ -\nabla(\mu/\Theta) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

A conservação de massa segue o disposto na sec. 4.5.2. A formulação da conservação de energia total tem suas próprias peculiaridades, como visto na sec. 4.5.5, e reiterado em (5.6). A energia interna U varia por (5.5b), e o mesmo é esperado de sua densidade u . Admite-se que a contribuição devido à variação de volume macroscópico seja negligível, devido à velocidade macroscópica baixa.

A análise passa pela equação de continuidade pelo transporte de Reynolds (4.145) das quantidades consideradas.

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}_\rho = 0 \quad (5.12a)$$

$$\partial_t u + \nabla \cdot \mathbf{j}_u = 0 \quad (5.12b)$$

$$\partial_t s + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma \quad (5.12c)$$

A quantidade $\mathfrak{s}$ é densidade de entropia e o respectivo fluxo é $\mathbf{j}_s$. Admitindo a irreversibilidade do processo de equilíbrio, toma a forma $\sigma = \partial_t \mathfrak{s}$ para expressar o aumento de entropia. Essa condição torna a variação total da densidade entrópica $D_t \mathfrak{s}$ dependente da velocidade com que se processa, e a condição de baixa velocidade macroscópica também se aplica a essa quantidade.

Seguindo pelo disposto na sec. 4.5.2, as quantidades materiais são internas à superfície de controle, o fluxo material pelo superfície de controle é nulo. Em microescala, σ representa um sorvedouro pontual de energia (ou fonte de entropia). Em macroescala, uma integral da lei de fluxo imaterial por (4.154) computaria apenas o saldo da produção de entropia pela superfície de controle, sendo necessário indicar uma fonte para a quantidade imaterial que transborda pela fronteira. Apesar dessa complementariedade entre duas perspectivas, essa quantidade irradiada não é explicitamente identificada no equacionamento de continuidade, e o fator correspondente deve ser incorporado à especificação das expressões. Nesse propósito, um fator de intensidade de radiação térmica emitido pela matéria em termos da temperatura é incorporado à fenomenologia.

Devido às especificidades do estado da matéria, a resolução prossegue com particularidades. A proposta de modelar colapso de uma nuvem de poeira por sua gravidade motiva o equacionamento subsequente. Adotando a difusão pela lei de Fick, presume-se que a proporcionalidade à concentração possui boa correspondência à atração gravitacional.

$$\mathbf{j}_\rho = D \nabla \rho \quad (5.13)$$

Fluxo é proporcional ao gradiente da concentração, e a mudança desse gradiente depende da difusão. A concentração de massa ρ depende da reorganização de matéria ρ_0 pelo número de partículas n , formada por (5.8). De maneira similar, adota-se a difusão de Arrhenius, colisões proporcionais ao número de partículas. Inclui-se o termo Θ^4 , referente à radiação térmica emitida pela matéria, para a ponderação entre “colisões inelásticas e elásticas”.

$$\rho = \rho_0 \exp(n) = \rho_0 \exp\left(-\frac{PV}{\Theta}\right) \quad (5.14)$$

$$D = \frac{1}{A\Theta^4} D_0 \exp(n) = \frac{1}{A\Theta^4} D_0 \exp\left(\frac{PV}{\Theta}\right) \quad (5.15)$$

O fluxo $\mathbf{j}_u$ é dado pela lei de Fourier, no entendimento de que a ondulatória material segue um modelo de onda evanescente, tal qual a equação do calor deriva dessa lei.

$$\mathbf{j}_u = -k \nabla T \quad (5.16)$$

A taxa de produção de entropia σ pela resolução da continuidade no transporte. A variação intrínseca no tempo da densidade entrópica é igual à combinação linear das variações correspondentes para densidade de massa e energia interna que, por sua vez, equivalem ao divergente dos respectivos fluxos.

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{-\mu}{T} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{j}_u - \frac{-\mu}{T} \nabla \cdot \mathbf{j}_\rho \quad (5.17)$$

O fluxo entrópico segue a mesma combinação linear. A substituição pelos valores conhecidos é:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = \nabla \left(\frac{1}{T} \mathbf{j}_u \right) + \nabla \left(\frac{-\mu}{T} \mathbf{j}_\rho \right) = -\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \mathbf{j}_u \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \mathbf{j}_\rho \nabla \left(\frac{-\mu}{T} \right) \quad (5.18)$$

A taxa de produção de entropia é generalizada para:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \nabla(1/\Theta) \\ -\nabla(\mu/\Theta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{uu} & L_{u\rho} \\ L_{\rho u} & L_{\rho\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla(1/\Theta) \\ -\nabla(\mu/\Theta) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Uma forma bilinear positiva-definida para o não-equilíbrio indica que a produção de entropia local somente aumenta, exceto no equilíbrio absoluto em que é positiva semi-definida. Os termos simétricos da anti-diagonal $L_{u\rho}$ indicam reversibilidade no processo, como uma mudança em ρ pode provocar mudança em u e vice-versa. O valor nulo denota independência.

A expressão para σ presume o equacionamento linearmente proporcional proporcionado pela baixa intensidade, ou próximo do equilíbrio. Em condições extremas, a dinâmica original de Onsager deixa de ser linear e o equacionamento mais adequado entra em disputa com conceitos aplicados.¹⁶⁷ No interesse texto, viabilizar uma demonstração da auto-organização é suficiente; ainda assim cabe formular um argumento, embora não único,¹⁶⁸ para seguir a mesma restrição do original.

A mudança de variável de temperatura para $\beta_\Theta = 1/\Theta$, beta termodinâmico, é conveniente como transformação para um “sistema coordenada” que incorpora a restrição de não haver temperatura absoluta não positiva. Supondo que o limite de temperatura segue em analogia ao limite relativístico de velocidade pela rotação hiperbólica, a transcrição para uma analogia mais acertada torna-se:

$$\gamma_\beta \beta_\Theta = \frac{1}{\Theta} \quad (5.20)$$

Nesse esquema, a linearidade opera em reverso ao análogo cinemático com $\gamma_\beta = \sqrt{1 - (\beta_\Theta)^2}$. Valores de baixa intensidade para β_Θ resultam em $\gamma_\beta \rightarrow 1$. Com isso, a expressão $\gamma_\beta \beta_\Theta \rightarrow \beta_\Theta$, correspondendo a valores altos de Θ que, pela análise do gradiente $\nabla(1/\Theta)$, são mais lineares. Uma razão para essa linearidade acontecer estaria no fato de que um maior valor de Θ implica em uma maior velocidade cinética das partículas, limitadas pela velocidade da luz.

A sugestão de que o acoplamento diferencial entre a intensidade na produção de entropia segue a condição do limite da velocidade material é conveniente. Uma formulação por matriz diagonal e uma razão hiperbólica pelo determinante unimodular, tal qual (4.37), coloca $L_{\mu\nu}$ na condição de métrica e continuidade por uma curvatura. Entretanto, a expressão σ para produção de entropia não

¹⁶⁷Há divergência nos conceitos fundamentais e interpretação dos fenômenos entre as formulações propostas pelas “escolas termodinâmicas concorrentes”: Termodinâmica de Processos Irreversíveis, Termodinâmica Racional e Termodinâmica Irreversível Estendida

¹⁶⁸Outra argumentação seria feita pela delimitação temporal de $\langle \Theta \rangle$, ou a equivalência a “variação de arranque”, ou uma taxa marginal.

é adequada para um modelo completo, e uma métrica com esse princípio de hiperboloide, ainda que invariante no tempo, é apresentada adiante.

Correlato ao desenvolvimento apresentado, as propostas de Prigogine[85][86] apontam a importância da entropia na evolução de estruturas dinâmicas. O argumento da correspondência entre modelos de auto-organização na analogia pela termodinâmica irreversível é verificado pela concordância da condição de estrutura dissipativa, dada pelo transvio geodésico em (4.33), e existência de processo de bifurcação, que aqui é demonstrada pela condição ondulatória sec. 4.4.5 e como emissão envolve condição de simultaneidade de diversos agentes.

Importante ressaltar que, embora a elaboração apresente a auto-organização do espaço-tempo pela matéria como consequência da relação entre estrutura dissipativa e energia de vínculo, o equacionamento não deve ser tomado como uma forma geral definitiva, restringindo-se a uma condição particular de demonstração do fenômeno.

Em síntese, colocando-se o potencial Landau como uma função-onda do ambiente, calculou-se a situação de onda estacionária por um equacionamento independente do tempo. De outra maneira, a tensão de “arranque” promovida pelos gradientes relativos não é o curso da transformação, dado que a variável tempo não está envolvida.

A definição do tensor energia normalizado em (4.139) possibilita parametrização temporal para um ponto no espaço. Entretanto, o tensor métrico normalizado não possui variação intrínseca no tempo, visto em 2.7.2, portanto o tratamento é dispensado ao tensor curvatura e, transitivamente, ao tensor-energia normalizado. Além da delimitação temporal, restrição por volume de controle desfaz a caracterização pontual.¹⁶⁹

O tensor-energia normalizado, na forma diferencial, é a manifestação de uma resultante local em ponto do espaço-tempo. A resolução de sua integral é um evento de simultaneidade, como visto na sec. 4.4.5, de um observador sobre todos os pontos em seu volume, e há advertência para abstração do tempo de propagação necessária para definição das operações da sec. 4.4.3. Em outras palavras, o resultado é válido, mas há perda da covariância pela representação geométrica incorrer em um espaço absoluto.¹⁷⁰

Por outro lado, a condição de média no temporal para $\langle \Theta \rangle$ deve ser coerente com o tempo de propagação correspondente às distâncias do volume especificado pelo observador. Nesse enquadramento, a ausência de variação do tensor no tempo limita a observação à apenas de variação marginal pelas taxas relacionadas das variáveis sistêmicas.¹⁷¹ A possível manifestação real dessa dinâmica sistêmica limita tanto o espaço por um horizonte quanto a percepção de uma janela de tempo. Essa última ponderação faz reflexão sobre um tensor-energia normalizado Θ_U que abranja todo o universo.

Ainda que fosse Θ_U parametrizável no tempo, não seria possível definir uma unidade de tempo absoluto, tornando-se coerente a sua invariância no tempo. A explanação expõe as limitações do tensor-energia normalizado. Também motiva

¹⁶⁹A derivada covariante temporal dá conta do transporte paralelo, não da variação intrínseca no tempo. Deixa de ser um ponto pelo símbolo $\delta(x)$ de Dirac para ser uma representação por centroide.

¹⁷⁰No caso presente, a possibilidade de mapear todos os pontos do espaço torna o espaço geometrizável, mas recai, caso não seja estacionário, em um espaço absoluto. Comparar com o visto adiante no espaço de Minkowski, que não é cinético.

¹⁷¹As taxas pelas relações de Maxwell da termodinâmica.

o argumento para exposição de como a auto-organização é estruturada por autossimilaridade. Uma definição da seta do tempo, ou irreversibilidade do tempo, é vista adiante.

Auto-organização é descentralizada e, na ausência de um núcleo de coordenação, requer situação de não-equilíbrio permanente, o que motivou a exposição por Onsager e Prigogine. Nas relações sistêmicas, há o efeito retroativo em que cada partícula do sistema move-se em direção ao ponto de equilíbrio, e, quando todas fazem isso ao mesmo tempo, acabam por fazer mover esse ponto, promovendo uma perseguição interminável. Essa codeterminação implica que as partes e o todo se moldam concomitantemente e o sistema manifesta propriedades semelhantes em diferentes níveis de organização: autossimilaridade.

O sistema é caótico, o que, pela teoria geral sobre o assunto, pode apresentar “espaços de fases” fractais, o que, para um conjunto de partículas, manifesta-se como autossimilaridade estatística. As leis físicas mudam conforme a escala, mas mantêm uma estrutura holárquica.

O que realmente está sendo organizado é a causalidade, um dos aspectos da seta do tempo. Entendida a invariância no “tempo cosmológico” para causalidade.

Nessa mudança de foco para o espaço fásico, é interessante observar que a geometrização do espaço em um fractal segue similar às leis de potência, enquanto a dinâmica material é exponencial. A Lei de Potência é invariante de escala (não possui uma escala característica).¹⁷² A exponencial possui uma escala característica (o tempo médio ou meia-vida) por taxa de variação constante. Temporização é implícita no padrão de regularidade temporal que a organização promove. Assim, a dispensa do tempo no equacionamento anterior transparece que é o sistema que autorregula o seu padrão de tempo.¹⁷³

Autossimilaridade permite arbitrar a referência independentemente do parâmetro temporal. Regredindo a condição do universo atual Θ_U para uma situação passada Θ_{U*} , em que, em reverso do processo expansivo entre as duas situações, toda massa do universo estivesse contida em um raio $R_* = GM_U/c^2$, raio este factível pela métrica normalizada e que permite chegar a um universo Θ_{U*} . Nessa condição antecedente, toda matéria possuiria menor entropia que a atualidade e estaria contida em um horizonte que, pela métrica da atualidade, seria R_* . Na realidade desse universo pregresso, inexistente um espaço além do seu horizonte; trata-se de um sistema fechado, e as relações métricas e de curvatura se fazem sobre as condições de sua contemporaneidade. O raio mensurado por uma condição futura não tem sentido. Se assim o for, então a recorrência é possível. Nesse universo Θ_{U*} do passado, é possível retroagir ao seu anterior Θ_{U**} , dessa vez para um raio $R_{**} = GM_{U**}/c^2$ das condições métricas de sua

¹⁷²Lei de Potência possui invariância de escala $f(\lambda x) = (\lambda x)^{-k} = \lambda^{-k} x^{-k} \propto f(x)$. Ao se multiplicar o argumento x por um fator λ , a forma da função não muda, apenas a amplitude.

¹⁷³Padrão em macroescala de tempo. Em microescala, mecanismo massa-tempo. Ver nota 100 e o texto que remete a ela.

contemporaneidade. ¹⁷⁴

$$\Theta_U = \Theta_{U_*} \exp(\omega) \quad (5.21a)$$

$$\Theta_{U_*} = \Theta_{U_{**}} \exp(\omega_*) \quad (5.21b)$$

$$\Theta_U = \Theta_{U_{**}} \exp(\omega - \omega_*) \quad (5.21c)$$

Embora os tensores pela métrica normalizada não possuam variação temporal, cada ciclo define implicitamente unidade de tempo pelo raio em tempo-luz que mede o horizonte da respectiva época. A contemporaneidade de uma época é uma janela temporal continuamente móvel. O espaço de fases traça uma *spira mirabilis*, ¹⁷⁵ e a ausência de condição inicial absoluta pela forma fractal também aponta como o universo somente é comparável consigo mesmo pela evolução da sua organização interna, o que é apreciado pela cronologia que cada observador faz por coordenadas. Espiral logarítmica também resulta em uma condição “heráclita” ¹⁷⁶ apresentada na simetria local do tempo.

A contrapartida em microescala, o mecanismo massa-tempo descrito ao final da sec. 4.4.5, a frequência natural é controlada por constantes que estabelecem coesão temporal, e o tempo é um elemento sistêmico. Não há definição de um tempo absoluto, porém a cronologia experimentada por todos os observadores vem pela codeterminação das relações de causalidade.

Uma escala característica, ou fator de escala, também se apresenta nas equações de Alexander Friedmann, embora tenha uma participação no equacionamento analítico, enquanto no texto presente esteja restrita a equações sintéticas. ¹⁷⁷ Apesar de ser uma ponte de ligação conceitual com o modelo teórico precedente, a correspondência direta entre os parâmetros não é necessariamente válida, devido à mudança categórica em 4.2. Uma abordagem distinta é necessária pelo fato de que a métrica normalizada mostra-se inadequada para representar explicitamente variação intrínseca.

A relação entre deslocamento para o vermelho por distância na distribuição de galáxias medida por Hubble, na interpretação de Doppler relativístico na velocidade de recessão entre galáxias, é recepcionada como uma medição analítica em relação ao sintético $\langle \Theta \rangle$ da macroescala.

O parâmetro de Hubble para recessão entre galáxias é uma grandeza de dimensão inversa de tempo, $[H] = T^{-1}$. Tal qual o beta termodinâmico, incorpora a restrição de não haver tempo coordenado não-positivo, ou o equivalente por frequência. Para além desse qualitativo, não é direto estabelecer uma relação com a escala característica, quer pelo expoente em (5.21a), quer pela razão entre fatores que figuram nessa mesma expressão. Ainda que um adimensional

¹⁷⁴Poder-se-ia retroagir indefinidamente pela métrica normalizada sem chegar a uma singularidade. Entretanto, quanto mais plana a relação entre o universo imaginário do passado em relação à perspectiva presente, menor o efeito de distorção da curvatura temporal. O raio em questão é excessivo, mas equaciona para uma condição conhecida.

¹⁷⁵Espiral logarítmica aparece em desenvolvimento anterior, também relacionada com situação de não-equilíbrio permanente em razão do decaimento orbital.

¹⁷⁶A noção de impermanência e ordem surgida do caos está presente em diversas culturas e tem penetração na ciência. Parafraseando Oppenheimer, essas ideias não são coisas completamente inéditas ou novas. Elas têm uma história mesmo em nossa própria cultura e na filosofia budista e hindu.

¹⁷⁷O desenvolvimento normalizado é incompatível com a singularidade da “hipótese do átomo primordial” de Lemaître, bem como a concepção geométrica de de Sitter, tendo curvatura na ausência de matéria.

$D_t(1/H) = \dot{H}/H^2$ possa ser produzido, apenas uma das medidas seria conhecida: o expoente é um adimensional incógnito, e os fatores não possuem medida experimental precisa. Por fim, o equacionamento da relação entre as grandezas de escalas distintas envolve alguma presunção estatística.

A apresentação da auto-organização dá o contorno geral do fenômeno de evolução. Adiante, uma métrica de referência é elaborada para descrever uma mecânica do fenômeno de Doppler em larga escala.

5.2 Espaço de Minkowski

Métrica de Minkowski, conforme visto na sec. 3.2.2, é primordial no entendimento da condição hiperbólica entre as componentes temporais e espaciais do tensor velocidade diante de transformações covariantes discretas. A métrica normalizada, transformação contínua do espaço-tempo, se insere no mesmo grupo matricial, mas em condição mecânica distinta. O espaço de Minkowski é estritamente cinemático, e a supressão de causas do movimento também suprime modalidade mecânica, quer holonômica, quer normalizada. A neutralidade é irreversível por ser acompanhada da perda de caracterização inercial pela ausência de resposta à massa. A indiferença inercial torna o caso assintótico comum entre as modalidades métricas.

Minkowski é identidade assintótica de diversas famílias matriciais. No seu propósito cinemático, aceita variantes da assinatura ou composição algébrica (4.217*). Segue a apresentação de alguns conceitos relevantes na conceituação do espaço-tempo normalizado.

5.2.1 Cinemático e Não-Cinético

A principal razão da métrica de Minkowski não ser cinética está na definição mecânica pela expressão de Euler-Lagrange. Uma variável de momento não é obtida por uma velocidade constante na operação diferencial, pois a derivada interna não está definida e, com isso, também o termo cinemático depende das relações sistêmicas.¹⁷⁸

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L} \right) \quad (5.22)$$

Sistemicamente, valores métricos podem ser instantaneamente constantes por um ponto de inflexão, e o valor conjuntural não afeta a condução estrutural. O caso de limite lateral, ou limite no infinito, não coloca o valor no domínio funcional. Com isso, não entra em nenhuma definição métrica normalizada.

Analisando por outra perspectiva, a continuidade no transporte material, sec. 4.5.2, a incompatibilidade existe pela definição de massa. Embora a geometria permita atribuir à métrica de Minkowski uma curvatura nula, na métrica normalizada $\tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}$, pelo entendimento de que o cerne de $\mathcal{R} = \kappa\Theta$ está na definição de um centroide de massa não nulo. Implica, na tradução geométrica,

¹⁷⁸Isoladamente, mesmo quando um termo é indeterminado, a expressão sobre o símbolo passa a ser determinada da sua resolução para relações sistêmicas, o que acontece com a maioria dos símbolos nulos. Normalizada, acrescenta alguns termos por derivada covariante temporal 2.7.2. No caso Minkowski, o sistema não está definido. Ver nota 13.

que seja possível um volume de controle no raio da “esfera osculatória” por uma diretriz.

Métrica normalizada é um sistema diádico, e os referenciais são relações relativas aos corpos participantes, e a definição de inércia é intrínseca.¹⁷⁹ A inércia é definida intrinsecamente pela velocidade em relação à transformação hiperbólica da velocidade, em oposição à dependência do espaço coordenado por um referencial. Assim, na métrica plana, também há perda do referencial relativo da inércia intrínseca. A ausência de referencial intrínseco, o movimento relativo é definido exclusivamente pelo observador por referências de inércia externos.

Por fim, um caso limítrofe é apresentado por métrica de natureza elétrica. Na operação de neutralização (4.173c), a aniquilação da massa no limiar da métrica torna-se minkowskiana.

Exceto por um ponto de inflexão, o valor é assintótico e transcende o domínio da normalidade. O caso também é condizente com 4.6.1

5.2.2 Vácuo

O vácuo é uma discussão correlata à ausência material da métrica de Minkowski. Vácuo é o vazio material, e a atenção da discussão sobre a parte imaterial, o que se correlaciona com o conceito de campo e suas propriedades operativas.

A ausência de matéria em um volume de controle fechado, vácuo, não torna a métrica dessa região em um espaço plano. Qualquer proposição vem da definição métrica de uma vizinhança exterior; a mesma metrifica o volume. O referencial métrico é sempre em relação ao ponto material de origem, e o mapeamento de curvatura como propriedade do espaço é uma conveniência de abstração.

Campo é a abstração da ação-reação no espaço-tempo por efeito retardado, uma simplificação para resolução dinâmica. Campo potencial escalar, por concepção métrica, é o mapeamento holonômico posicional, e campo vetorial vem da necessidade de calibrar as velocidades relativas.

A simplificação por campo é conveniente e proveitosa. Entretanto, não existe um substituto equivalente ao conceito de propriedade e efeitos de campo na forma normalizada. As definições são feitas de maneira distinta. Espaço normalizado é composição topológica solenoidal, demarcação de transporte de eventos. O tratamento entre as duas representações está em reconhecer os efeitos análogos. Enquanto na métrica normalizada o espaço é solenoidal pelo transporte paralelo, a continuidade do transporte de campo segue o divergente tensorial.

Seguido o desenvolvimento da sec. 4.5.2, campo possui dupla tarefa de meio e permeio. Além de ser meio solenoidal, também atua como mediador por abstrair a ação-reação do corpo omissor. Consequências do divergente, colateral à conservação e continuidade do transporte, o mapeamento atribui ao espaço propriedades da distribuição de matéria. Com isso, incompressibilidade (4.151), vorticidade (4.153) e eliminação de fonte e sorvedouros (singularidades).

Em adição ao volume de controle desprovido de massa, efeitos estrangeiros à definição do campo são introduzidos de maneira complementar. As condições

¹⁷⁹Inércia é intrínseca, proposição de que o “acelerômetro interno” possui valor sempre nulo em uma trajetória geodésica perfeita. Um referencial externo fixo tem pouca utilidade diante de trajetória curva geodésica, e na adoção de um sistema de coordenadas da sec. 2.3, a atração central presume corpo fixo com referencial ao centro de momento de um sistema. A forma mais elaborada vem em 4.4.5.

da velocidade limite e sua direcionalidade pela anisotropia aparecem na forma de força de reação do campo, polarização do vácuo e outros elementos virtuais. Também difere no tratamento de energia e simetrias, visto sec. 4.5.5, pela inclusão de potencial.

A abstração do corpo recíproco de ação-reação é substituída por uma equivalência, ou simetria, na transformação de escala. Retornando à sec. 4.5.2, poder-se-ia definir o movimento $\mathbf{J} = [c\rho; \mathbf{j}]$ pelo mapeamento da composição $\mathbf{A} = [\phi/c; \mathbf{a}]$ de um potencial escalar espacial e um vetorial que satisfaça às condições de velocidade limite. Assim, pelo operador de d'Alembert, tem-se $\partial^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}$.

A componente escalar ϕ/c segue conforme a aceleração de arranque (4.136). A componente $\mathbf{a}$ é um campo vetorial cujo rotacional corresponde a um campo vetorial conhecido. A definição dessa última componente torna aparente a dependência da exterioridade, abstraída na indireção da propriedade de ser laço fechado no divergente do rotacional.

Como resultado, o campo não é determinado de modo único; depende da escolha do calibre, arbitrariedades por ser independente do movimento do corpo recíproco de ação-reação.

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} + \nabla\psi \quad (5.23a)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (5.23b)$$

Tomando como exemplo o eletromagnetismo, um maior potencial elétrico produz um maior potencial magnético, mas também uma maior taxa de variação em relação à velocidade do potencial, e depende da direção e intensidade de movimento do campo potencial.

5.2.3 Ponto de Inflexão

Na representação métrica do ponto material, o decaimento da métrica ao inverso da distância é assintótico por limite no infinito.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (5.24)$$

O limite lateral condiz com o raciocínio cinemático da seção anterior. Entretanto, a realização mecânica dessa condicionante espacial, embora em concordância com a exclusão, ocorre de forma diferente. Posições são alcançáveis por velocidade no tempo, e a velocidade limite impõe condicionante temporal à distância espaço-tempo.

Um horizonte cosmológico é conveniente à exigência de um volume de controle para distribuição de matéria pela equação (4.164). Essa mesma exigência cria uma situação inusitada: pode-se procurar por pontos de inflexão ao volume cosmológico e quantificá-los de maneira alternativa.

$$\lim_{(r-r_a) \rightarrow 0} \sigma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (5.25)$$

A situação pela qual a métrica alcança o valor unitário não viola o disposto na seção 5.2.1, uma vez que a situação é conjuntural por um ponto de inflexão, em contraponto a uma definição estrutural. Também, o limite infinitesimal não possui a lateralidade existente do limite no infinito. Por fim, ausência da assinatura, que a métrica unitária fica entendida como indefinição de um referencial inercial ou direção preferencial.

A métrica $\sigma_{\mu\nu}$ não trata de um centroide de massa, redução ao ponto material por (4.155a), mas expressa uma neutralidade diante de uma vizinhança. A situação de neutralização, vista na equação (4.173c), expressa a noção de que a sobreposição de métricas possui alguma equivalência com a aditividade de atração. O mesmo cenário de neutralização exige um volume de controle cosmológico (4.167) que coincide com horizonte.¹⁸⁰

Até então, buscou-se a resultante exterior à superfície de interface entre o exterior e uma distribuição de matéria no volume interno. A condição de horizonte cosmológico impossibilita a exterioridade, e a formulação se inverte. A aditividade da atração gravitacional remete ao teorema dos cascos esféricos de Newton, em inspeção ao resultante no interior.

A formulação de um casco cosmológico é viável na escala galáctica, onde podem ser encontradas distâncias compatíveis com o modelo. Assumindo uma distribuição de simetria esférica, definido um unitário para o tamanho médio de uma galáxia, distância intergaláctica média de mil vezes a escala unitária e um horizonte dez milhões de vezes o tamanho galático, proporções $1 : 1K : 10M$, então o total chega na ordem de trilhão de galáxias.

Em síntese, a descrição apresenta a noção que se tem em cada galáxia centrada no interior de seu respectivo casco cosmológico relativo como se estivesse centrada em uma métrica unitária, portanto inercial. Entretanto, essa situação passa por um ponto de inflexão, o que impede que se enxergue as outras por um espaço plano. Nessa descrição, o fenômeno da recessão entre galáxias é uma necessidade e não possui causa mecânica identificável, sendo emergente da distribuição total de massa e da necessidade de uma métrica que satisfaça a rotação hiperbólica para existência das definições de causalidade e simultaneidade.

A extrapolação do espaço por uma métrica será elaborada adiante para ilustrar o caso peculiar.

5.3 Tempo

Tempo, em uma definição técnica, é a medição em contagem contínua por um padrão de regularidade periódica de eventos de um fenômeno. A correspondência entre o fenômeno periódico tempo coordenado com um outro fenômeno, desvinculado do primeiro, por uma correlação temporal, evidencia que ambos são escalonados por regularidade intrínseca. Como consequência, a variável tempo coordenada formada pelo padrão periódico torna-se, conjugada a uma função de estimativa da correlação, preditora dos processos: nem o tempo coordenado se desvia de sua regularidade, nem o processo observado se foge ao seu padrão interno.

Correlação não é causalidade, e um terceiro fenômeno pode ser a causa da sincronicidade na correlação entre o tempo do relógio coordenado e os valores da função de estimativa. Entretanto, eliminando-se qualquer outra possibilidade,

¹⁸⁰Ver nota(134).

não existe um tempo universal absoluto. Outra ocorrência vai para a descrição de fenômenos que se expressam por independência de uma variável de tempo (sincronicidade por outros meios); ainda assim, há causalidade entre as partes.

Tempo é uma variável extrínseca à métrica normalizada, vista na seção 2.7.2, e a periodicidade entre fenômenos, vista em 4.4.5, resulta, pela causalidade involuta, na separação de fase entre variáveis posição e momento, vista em 4.4.6, inviabilizando a resolução por um invariante temporal, como também uma frequência natural pelo mecanismo massa-tempo. A externalidade da variável temporal sugere sua coligação com auto-organização, o que, na forma sistêmica por 5.1.2, coloca a formação do tempo como uma das resultantes que cada observador obtém pela forma sistêmica de organização da harmonização universal.

As estruturas temporais são auto-organizadas por autossimilaridade, o que, por recursão infinita, torna-se irreversível. Nesse pressuposto, investiga-se a correspondência convoluta pela decomposição dos padrões de regularidade.

Partindo-se de um fenômeno periódico, frequência constante, dado pela grandeza escalar $f(t)$. O seu padrão de regularidade pode ser retratado pela correspondência convoluta na decomposição por série de Fourier da função periódica.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t) \quad (5.26)$$

Em uma descrição, a segmentação do processo em subcadeias em que um subprocesso desencadeia um subsequente em maior intensidade, modulando a frequência do fenômeno. Em outra perspectiva, a referência temporal pelas posições e velocidades segue em correspondência à modulação métrica e cinemática da frequência.

Considerando que a regularidade periódica equivale à situação estacionário de equilíbrio dinâmico, a harmonia existe nos estados igualmente estáveis e a transição discreta entre eles é estudo da eletrodinâmica quântica [103][102]. Em contraponto, o fenômeno não-periódico $f(t)$ e sua transição contínua não poderiam ser mais decompostos da mesma forma que o periódico. Além disso, a correspondência entre frequência constante e conservação de energia indica uma mecânica ondulatória contínua.

No domínio do espaço, a trajetória geodésica é conservativa, o que é observado pela ortogonalidade expressa em (4.31a) e (4.31b), e a trajetória mais geral é dissipativa. Se, de modo similar, a aplicação de uma base ortonormal de autovalores estabelece a relação da série com a transformada de Fourier, então, em $\mathcal{F}\{f\}(\xi) = \hat{f}(\xi)$, caso haja convergência para função original, os coeficientes da série podem ser obtidos pela transformada.

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(\xi - \omega_n) \quad (5.27)$$

O critério de estabelecer um estado de equilíbrio que simplificaria a forma de evidenciar o desequilíbrio. De outro modo, a taxa de modulação da frequência (em função da mesma) exigiria critérios de intensidade no balanço entre energia retida e energia perdida na modulação. Um desenvolvimento nesse sentido é apresentado trabalhos anteriores [70].

Invertendo a abordagem para macroescala, ainda que em estado de não-equilíbrio, a coesão temporal vem da codeterminação por recorrência de sua autossimilaridade em escala.¹⁸¹ Em escala local, o princípio que orienta a seção 4.4.5 é auto-oscilação [2][51]. A abordagem em larga escala, marcada pelo não-equilíbrio, na interpretação pela auto-organização de Prigogine, sec. 5.1.2, a sincronicidade ocorre pela forma como todos concorrem para a mesma frequência.

O mecanismo de codeterminação temporal é adaptado do formalismo do modelo Kuramoto, [59][97] que trata de como osciladores com frequências naturais diferentes alcançam um mesmo parâmetro temporal sistêmico.

Retomando o parágrafo inicial, considera-se a situação em que observadores distintos escolhem um como referência temporal oscilador estável e constante. Uma escolha apropriada confiaria na frequência Compton de uma massa conhecida. Para qualquer escala de agregação, e em ocorrência recursiva, o tensor-energia $\langle\Theta\rangle$ sintetiza na forma pontual centroide para a massa constituída que produz curvatura $\mathcal{R}$. Assim, recorrentemente, um tensor em uma escala menor representa uma quantidade de massa que entra na composição de uma escala de agregação acima, até a totalidade universal de $\langle\Theta_U\rangle$. Como a inércia de uma quantidade de massa produz uma frequência natural em resposta à oscilação forçada, é possível associar ao tensor a frequência natural do equivalente de massa. A equivalência matéria-energia se estende para massa. Assim, com simplificação da notação, tem-se:

$$\Omega^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} / \hbar \quad (5.28)$$

$$\omega = \Omega^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \quad (5.29)$$

O problema com essa proposta é que, conforme os tensores-energia evoluem, as escalas de tempo mudam aleatoriamente em proporção à dinâmica individual de cada subsistema. Sem um referencial global para sincronização dos relógios intrínsecos, a coordenação do ritmo seria instável. A despeito desse prospecto, a forma dinâmica cria um mecanismo de sintonia fina para harmonização da estrutura. O desequilíbrio da instabilidade pode igualmente ser potencial que conduz ao equilíbrio. O universo é bem afinado pela convergência ao estado de maior harmonia.

Assumindo, em uma distribuição simétrica de osciladores sobre um mesmo acoplamento, em que cada oscilador individual tenha frequência intrínseca constante e esteja operando com magnitude $\sin(\omega_i\tau + \phi_i)$, então possui como fase total $\theta_i(t) = \omega_i\tau + \phi_i$. Considerando que o parâmetro de fase é propenso a mudar por influência da densidade de fase local de outros osciladores, então uma velocidade de deriva $v_\theta = d\theta/d\tau$ é definida por:

$$\frac{d}{dt}\theta_i(t) = \omega_i + \frac{d}{dt}\phi_i \quad (5.30)$$

Velocidade de deriva é composta de frequência intrínseca constante ω_i e do termo de acoplamento $d\phi_i/d\tau$, que define a mudança baseada na sua posição em relação à fase média ψ da distribuição em questão:

¹⁸¹Ver texto que remete à nota 175.

$$\frac{d\phi_i}{d\tau} = Kr \sin(\psi - \theta_i) \quad (5.31)$$

Nessa modulação dinâmica de fase, o K é a força do acoplamento; r é o parâmetro de ordem, média da fase coletiva da população ψ . A senoide pode ser entendida como uma álgebra de fasores, mas pela parte imaginária.[106]

O parâmetro de ordem dá a medida de coerência de fase, o quão sincronizado o grupo está. Na forma complexa, é a média geométrica de todos os osciladores. Uma representação desse centroide de fases pode ser mapeada no círculo unitário complexo.

$$\vec{r}(\tau) = r(\tau)e^{i\psi(\tau)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(\tau)} \quad (5.32)$$

A estabilidade do estado estacionário é demonstrada na convergência do número de osciladores $N \rightarrow \infty$.¹⁸² A forma analítica do caso contínuo pelo limite possui uma densidade estacionária $\rho(\theta, \omega)$. A evolução para esse estado é encaminhada por Strogatz [96], aproveitando-se do contínuo para formular, na especificação euleriana, a equação de continuidade para a forma temporal e normalizada dessa densidade.

$$\partial_t(c\rho) + \partial_\theta(\rho v_\theta) = 0 \quad (5.33a)$$

$$F(\omega, \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega, \tau) d\theta = 1 \quad (5.33b)$$

O contínuo permite que a distribuição de frequência natural intrínseca $g(\omega)$, originada no limite do contínuo, seja integrada para todos os ângulos θ e todas as frequências naturais ω . Da análise pela equação de continuidade $v_\theta = d\theta/d\tau$, tem-se:

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(t)} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega) d\theta d\omega \quad (5.33c)$$

Quando $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_i)$, a expressão simplifica para:

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \int_0^{2\pi} e^{i\theta(t)} \rho(\theta, t) d\theta \quad (5.34a)$$

A interpretação é que a codeterminação não é expressa diretamente na frequência intrínseca constante (Compton). Apesar do pressuposto, a quantidade pode evoluir colateralmente em consequência do efeito em sua composição. Seja como for, a falta de participação do parâmetro intrínseco no parâmetro de ordem também torna adequada a adaptação pela frequência da extrínseca

¹⁸²Outros casos são possíveis no modelo original. Aqui, o interessante é o regime sem flutuações, com o comportamento da população explicado nos termos da densidade e sua partição entre ancorados e à deriva.

(Broglie), que fatora os efeitos ambientais na perspectiva do observador. A reformulação da densidade para a equação da continuidade, nesse cenário, também substitui o tempo próprio pelo tempo coordenado, e retrospectivamente teríamos $g(\omega) = \delta(\theta - \theta_i)$.

$$F(\dot{\theta}, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \dot{\theta}, t) d\theta = 1 \quad (5.34b)$$

Na forma reestruturada integral, permite-se a expansão de Fourier. Também é conveniente aplicar o *ansatz* Ott-Antonsen, [81] que aplica substituição dos coeficientes $c_n(t) = \alpha(t)^n$ e resulta em uma expressão fechada exata.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(\theta(t) - \psi(t))} \rho(\theta, \omega, t) g(\omega) d\theta d\omega \quad (5.35)$$

A densidade $\rho(\theta, t)$, que está restrita a uma circunferência, pode ser representada por série de Fourier.

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(t) e^{i\pi\theta} + c_n^*(t) e^{-i\pi\theta}) \right] \quad (5.36)$$

O *ansatz* contrai em uma progressão geométrica por uma única função complexa.

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(t)^n e^{i\pi\theta} + \alpha^*(t)^n e^{-i\pi\theta}) \right] \quad (5.37)$$

Na integral de $\vec{r}(t)$, o termo $e^{i(n+1)\theta}$ da distributiva é simplificado pela ortogonalidade dos conjugados, exceto quando o expoente é nulo, o que ocorre quando $n = 1$, assim:

$$\vec{r}(t) = \alpha^*(t) \implies \alpha(t) = \vec{r}^*(t) = r(t) e^{-i\psi(t)} \quad (5.38)$$

Substituindo na equação da continuidade, a velocidade de deriva torna-se:

$$v_{\theta} = \frac{K}{2i} [\vec{r}(t) e^{-i\theta} - \vec{r}^*(t) e^{i\theta}] = iKr(t) \sinh[i(\theta - \psi)] \quad (5.39)$$

A forma hiperbólica da densidade é obtida por $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x/(x+1)$ e $\alpha = re^{i\psi}$. A expressão é o núcleo de Poisson; a forma hiperbólica, pela identidade de Euler, será proveitosa na equação da continuidade.

$$\rho(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \psi) + r^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cosh[i(\theta - \psi)] + r^2} \quad (5.40)$$

O fluxo $j = \rho v$ é expresso por:

$$j = \frac{-Kr(1-r^2)}{2\pi} \frac{\sinh[i(\theta - \psi)]}{1 - 2r \cosh[i(\theta - \psi)] + r^2} \quad (5.41)$$

A resolução da equação da continuidade sai pela substituição das expressões encontradas e, para o referencial rotacional $d\psi/dt = 0$, resulta em:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{K}{2}(1-r^2)r \quad (5.42)$$

Essa equação de coerência de fase é uma variante da função logística diferencial e sintetiza os pontos críticos na mecânica de sincronização.

Supondo $r = 0$, dessincronizado, então $dr/dt = 0$, porém é instável: qualquer perturbação que produza $r > 0$ desencadeia $dr/dt > 0$.

Se $0 < r < 1$, sincronização parcial, então $dr/dt > 0$, é estritamente positiva: uma vez desencadeada a dinâmica é autossustentada pelos constituintes.

Na convergência $t \rightarrow \infty$, sincronização perfeita, o sistema também converge assintoticamente para $dr/dt = 0$, o que ocorreria precisamente quando $r = 1$.

Uma vez em marcha, o processo é irreversível. A despeito de serem prontamente calculáveis, ambos os pontos críticos em que $dr/dt = 0$ são assintóticos. A resolução da equação diferencial no tempo traça uma curva que não tem começo nem fim, e a forma crescente mantém a relação de ordem.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{K}{2}(1-r^2)r \implies t = \frac{2}{K} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \ln(\tan(\arcsin(x))) \quad (5.43)$$

Ainda, se $r' \propto (1-x^2)x$, então $r \propto x^2/2 - x^4/4$, ou seja, a função sombreiro, associada ao estudo de assimetria.

No contexto da codeterminação, pela generalidade da escolha do observador, o parâmetro de coerência r obtido pelo tempo coordenado é compartilhado entre todos os observadores. A compatibilidade da escala de tempo, condição de ordem causal pela variável extrínseca, é propriedade sistêmica, ainda que este não seja determinístico.

O resultado também é compatível com o contorno temporal da recorrência fractal em espiral logarítmica da auto-organização em 5.21c. Na ocasião, explanou-se sobre a inferência recursiva na autorregulação da escala temporal na reversão da expansão. Uma elaboração similar é cabível sobre o horizonte de espaço e janela de tempo.

Na formulação de uma escala de ordem de tempo absoluta, a escolha de um ponto zero (5.43) por constante de integração é arbitrária e atende a critério de conveniência. Embora a escolha do tempo zero corresponda a criar uma restrição, similar ao beta termodinâmico na escala absoluta, no caso presente seria uma artificialidade. O recorte temporal não atende aos critérios de uma escala no senso convencional: a janela de tempo é móvel e impossibilita formular unidade, portanto não atende às propriedades de linearidade.

Ainda que a existência de um horizonte de espaço conjugado a uma janela de tempo não se apresente diretamente no equacionamento presente, o parâmetro pode ser incorporado de uma forma pragmática. Um valor de raio crítico de um horizonte, em conjugação ao respectivo parâmetro de ordem r , é, foi ou

será interceptado por todo observador coordenado em algum momento t de sua existência. Em outras palavras, mapeia temporalmente o que e quando cada observador enxerga.

Consoante a essa concepção holística, a concordância que dois observadores distintos fazem com relação às respectivas medições parâmetro de ordem, por suas relações em um espaço-tempo evolutivo, o ponto crítico estabelece a sincronicidade na relação simultaneidade e causalidade.

O último destaque para independência de especificidade de microestado conclui em síntese as características inexoráveis da natureza do tempo: infinito, irreversível e imponderável.

6 Métricas Notáveis

A normalidade do tensor métrico estabelece propriedades estruturais à rotação hiperbólica que independem de um formato específico, de métrica. Propriedades conjunturais surgem de formatos modelados pela especificidade do problema e revelam padrões ocultos à generalidade estrutural.

A divisão arbitrária entre essencial e acidental torna-se tênue diante da complexidade sistêmica. Análogo separação que existe entre “anatomia, fisiologia e metabolismo”, propriedades funcionais evidenciadas na composição da complexidade entre forma e função.

Seguem duas métricas que satisfazem a temática normalizada, e que revelam a natureza de outros padrões da interação entre espaço, tempo e matéria.

6.1 Corpo em Rotação e Geodésia

A seção apresenta alguns rudimentos para métrica normalizada de um corpo em rotação. A métrica normalizada é tipicamente definida para um ponto material que representa o centroide de uma distribuição de massa, visto em (4.155a). O ponto material não possui definição de rotação; entretanto, é possível a representação pela parametrização métrica.

A abordagem consiste na extrapolação para um corpo rotacional em consideração aos resultados que seriam obtidos no limite newtoniano para a geodésica. A elaboração fundamenta-se na semelhança que expressões, como (2.74) ou a força estática de arranque (4.136), possuem com as expressões gradiente do potencial clássico ou suas variantes. Essa similaridade permite elaborar a métrica por expressões conhecidas à forma rotacional clássica.

Contanto que atenda à condição de não variar no tempo, a escolha dos parâmetros que figuram no tensor métrico é tanto conveniência da coordenada quanto da forma de aturação da curvatura. O formato resultante é descrito por simetria em superfícies de equivalência.

6.1.1 Corpo Rotacional: Clairout-Somigliana-MacCullagh

A distribuição de massa de um corpo rotacional, segundo o teorema de Clairout, assume a forma oblata no equilíbrio gravitacional diante da força centrífuga da rotação. O formato resultante reflete a redistribuição de massa fluida que é necessária à recomposição do campo gravitacional para equalizar/neutralizar a ação promovida pela mesma rotação que motiva a movimentação. Passando da

expressão geocêntrica para geoidal, a equação de Somigliana expressa a direção normal à superfície da atração gravitacional. Força é maior nos polos que no equador devido à proximidade com o centro de massa e menor força centrífuga.

Fórmula de MacCullagh normalizada com expansão em harmônicos esféricos:

$$\frac{\Phi(r, \theta)}{c^2} = \frac{GM}{c^2 r} \left[1 - J_2 \frac{R_e^2}{r^2} P_2(\cos \theta) \right] \quad (6.1)$$

Para um corpo em equilíbrio hidrostático, a superfície física é uma superfície equipotencial. A condição de massa fluida, para o tempo geológico, como qualquer força tangencial à superfície, irá causar fluxo. O potencial total, pela soma do potencial gravitacional e do correspondente ao campo de velocidade, deve ser constante por toda superfície. O potencial da gravidade efetiva é dado por:

$$\text{Constante} = -\frac{GM}{r} \left[1 - J_2 \frac{R_e^2}{r^2} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (6.2)$$

Assim, denominando $\Phi_{\text{gravitacional}}$ o termo que expressa de MacCullagh e $\Phi_{\text{cinético}} = (1/2) \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$

$$\Phi_{\text{efetivo}} = \Phi_{\text{gravitacional}} + \Phi_{\text{cinético}} = \text{constante} \quad (6.3)$$

Uma partícula de teste no espaço externo ao corpo ($r > R_e$), pela ausência de contato, não é rotacionalmente tracionada; entretanto, a direção do campo é afetada pela distribuição de massa da superfície nivelada pela rotação. Nessa situação, para uma mesma distância fixa r com relação ao centro, a atração gravitacional é maior no equador que nos polos, devido a efeito do alinhamento com distribuição de massa.

6.1.2 Formulação Métrica

O potencial pela fórmula de MacCullagh é adequado à extrapolação ao limite newtoniano. A parametrização métrica compatível com o potencial é:

$$g_{\mu\nu}(r, \theta) \quad (6.4)$$

Os termos não-nulos para os gradientes métricos são:

$$\partial_1 g_{00} \quad \partial_1 g_{11} \quad \partial_2 g_{00} \quad \partial_2 g_{11} \quad (6.5)$$

Entre os símbolos de Christoffel não nulos, além dos quatro símbolos existentes (2.43a) na métrica simétrica $\Gamma_{01}^0, \Gamma_{10}^0, \Gamma_{00}^1, \Gamma_{11}^1$, seis novos são necessários: $\Gamma_{02}^0, \Gamma_{20}^0, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^1, \Gamma_{00}^2, \Gamma_{11}^2$, totalizando dez. Assim, os símbolos pela variação radial são:

$$2\Gamma_{01}^0 = g^{00}\partial_1 g_{00} \quad (6.6a)$$

$$2\Gamma_{10}^0 = g^{00}\partial_1 g_{00} \quad (6.6b)$$

$$2\Gamma_{00}^1 = -g^{11}\partial_1 g_{00} \quad (6.6c)$$

$$2\Gamma_{11}^1 = g^{11}\partial_1 g_{11} \quad (6.6d)$$

Os símbolos pela variação perimetral:

$$2\Gamma_{00}^2 = -g^{22}\partial_2 g_{00} \quad (6.6e)$$

$$2\Gamma_{11}^2 = -g^{22}\partial_2 g_{11} \quad (6.6f)$$

$$2\Gamma_{12}^1 = g^{11}\partial_2 g_{11} \quad (6.6g)$$

$$2\Gamma_{21}^1 = g^{11}\partial_2 g_{11} \quad (6.6h)$$

$$2\Gamma_{02}^0 = g^{00}\partial_2 g_{00} \quad (6.6i)$$

$$2\Gamma_{20}^0 = g^{00}\partial_2 g_{00} \quad (6.6j)$$

Repare que a satisfazem (2.59a) (importante para geodésica reduzida). A derivada da métrica relaciona a igualdade entre algum dos símbolos.

$$\partial_1 g_{00} = 2g_{00}\Gamma_{01}^0 = -2g_{11}\Gamma_{00}^1 \quad (6.7a)$$

$$\partial_2 g_{00} = 2g_{00}\Gamma_{02}^0 = -2g_{22}\Gamma_{00}^2 \quad (6.7b)$$

$$\partial_2 g_{11} = 2g_{11}\Gamma_{12}^1 = -2g_{22}\Gamma_{11}^2 \quad (6.7c)$$

Uma quarta igualdade é obtida pela derivada determinante da métrica.

$$\partial_1 g_{11} = 2g_{11}\Gamma_{11}^1 = -2g_{11}\Gamma_{01}^0 \quad (6.7d)$$

A manipulação simbólica evidencia como as quantidades “circulam” entre si em proporção à métrica e diante da variação espacial do tensor métrico por uma direção. As derivadas parciais do determinante da métrica unimodular são:

$$\partial_1 \det(g_{**}) = g_{00}\partial_1 g_{11} + g_{11}\partial_1 g_{00} = 0 \quad (6.8a)$$

$$\partial_2 \det(g_{**}) = g_{00}\partial_2 g_{11} + g_{11}\partial_2 g_{00} = 0 \quad (6.8b)$$

Derivada do determinante da métrica, somente aparecem (6.5). Assim, para radial, $\partial_1 g_{00}$ e $\partial_1 g_{11}$, para perimetral $\partial_2 g_{00}$ e $\partial_2 g_{11}$. Os demais símbolos que não compõem esses termos são vinculados pela igualdade nas definições. Entretanto, como se observa na substituição por (6.7a), relaciona-se quantidade espacial à temporal por uma mesma direção de variação, resultando em igualdade direta entre os símbolos, como em (2.55).

$$\delta_1^1 \Gamma_{11}^1 + \delta_0^0 \Gamma_{01}^0 = 0_1 \quad (6.9a)$$

$$\delta_1^1 \Gamma_{12}^1 + \delta_0^0 \Gamma_{02}^0 = 0_2 \quad (6.9b)$$

As relações cruzadas podem ser agrupadas pelas variações. Os grupos são, aparentemente, independentes (não há variação temporal da métrica.)

$$\partial_1 g_{00} \implies g_{00} \Gamma_{01}^0 = -g_{11} \Gamma_{00}^1 = -g_{11} \Gamma_{11}^1 \quad (6.10a)$$

$$\partial_2 g_{00} \implies g_{00} \Gamma_{02}^0 = -g_{22} \Gamma_{00}^2 = -g_{11} \Gamma_{12}^1 \quad (6.10b)$$

$$\partial_2 g_{11} \implies g_{11} \Gamma_{12}^1 = -g_{22} \Gamma_{11}^2 = -g_{00} \Gamma_{02}^0 \quad (6.10c)$$

Derivadas de segunda ordem, como não variam no tempo, possuem parciais $\partial_{22}, \partial_{12}, \partial_{21}$, produzindo os termos $\partial_m \Gamma_{a0}^0$ e $\partial_m \Gamma_{00}^k$. Além de (4.42a), o mais relevante deles é o associado à R_{22} .

$$\partial_{22} g_{00} = -2g_{22} \partial_2 \Gamma_{00}^2 = 2g_{00} \partial_2 \Gamma_{02}^0 + 4g_{00} \Gamma_{02}^0 \Gamma_{02}^0 \quad (6.11)$$

Relacionado às derivadas de segunda ordem, derivadas dos símbolos de Christoffel, $\partial_1 \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ e $\partial_2 \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$.

Os tensores de curvatura R_{00} , R_{11} e R_{22} , equivalentes de Ricci, seguem o disposto em 4.62. A segunda ordem por duplo temporal é:

$$\partial_0 \partial_0 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^k \\ \Gamma_{a0}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^k \\ \Gamma_{a0}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{00}^k \Gamma_{a0}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{a0}^0 \Gamma_{00}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_j \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Para dois índices espaciais, repare que a comutação será nula:

$$\begin{aligned} \partial_m \partial_n \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial_m \Gamma_{0n}^0 & 0 \\ 0 & \partial_m \Gamma_{an}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{0m}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{am}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{0n}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{an}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_m \Gamma_{0n}^0 + \Gamma_{0m}^0 \Gamma_{0n}^0 & 0 \\ 0 & \partial_m \Gamma_{an}^k + \Gamma_{am}^k \Gamma_{an}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Índices alternados entre espacial e temporal resultam em:

$$\partial_0 \partial_n \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{0n}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{an}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^k \\ \Gamma_{a0}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{0n}^0 \Gamma_{00}^k \\ \Gamma_{an}^k \Gamma_{a0}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_k \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

A forma alterna é:

$$\begin{aligned} \partial_m \partial_0 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \partial_m \Gamma_{00}^k \\ \partial_m \Gamma_{a0}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{00}^k \\ \Gamma_{a0}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{0m}^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{am}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \partial_m \Gamma_{00}^k + \Gamma_{00}^k \Gamma_{am}^k \\ \partial_m \Gamma_{a0}^0 + \Gamma_{a0}^0 \Gamma_{0m}^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Similar a (4.70), o escalar de curvatura será:

$$g^{00} R_{00} + g^{nn} R_{nn} = \mathcal{R} \quad (6.16)$$

Por (4.44), tem-se uma equipartição espaço-tempo na forma:

$$\frac{R_{00}}{R_{kk}} = \frac{g_{00}}{g_{kk}} \quad (6.17)$$

Entretanto, deixa ser exclusivamente tempo-radial.

$$g^{00}R_{00} - g^{11}R_{11} - g^{22}R_{22} = 0 \quad (6.18)$$

$$\frac{R_{00}}{R_{11}} = \frac{g_{00}}{g_{11}} \left(1 + \frac{\delta^{22}R_{22}}{g^{11}R_{11}} \right) \quad (6.19)$$

Pela propriedade unimodular, o gradiente do determinante da métrica estabelece igualdade entre a componente temporal e as componentes espaciais.

$$\frac{\delta^{00}g_{00}}{\delta^{11}g_{11}} = -1 \quad (6.20)$$

Métrica seguirá rotação hiperbólica 4.38 para qualquer direção 4.39. Entretanto, a curvatura de Ricci será relação entre tempo e a totalidade do espaço, diferentemente do resultado em 4.43. A situação física distinta é entendida com razão, mas sem a equipartição da curvatura no desdobramento entre as componentes espaciais. Resultante da mudança de direcional, na curvatura ao possuir elementos estranhos à diretriz e ao centroide de massa: métrica “geocêntrica” pela composição radial resulta em uma atração “geoidal” pela parametrização.

$$\partial_1 g_{11} = -\frac{GM}{c^2 r^2} + \frac{3GMJ_2 R_e^2}{c^2 r^4} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \quad (6.21a)$$

$$\partial_{11} g_{11} = 2\frac{GM}{c^2 r^3} - \frac{12GMJ_2 R_e^2}{c^2 r^5} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \quad (6.21b)$$

$$\partial_2 g_{11} = \frac{3GMJ_2 R_e^2}{r^4} \sin \theta \cos \theta \quad (6.21c)$$

$$\partial_{22} g_{11} = \frac{3GMJ_2 R_e^2}{r^5} (2 \cos^2 \theta - 1) \quad (6.21d)$$

A expressão da equação geodésica temporal (2.52) relaciona tanto os símbolos que expressam a variação radial Γ_{01}^0 , Γ_{10}^0 quanto os angulares Γ_{02}^0 , Γ_{20}^0 na composição da variação do fator de Lorentz $\dot{\gamma}$.

$$\gamma \dot{x}^0 \dot{\gamma} \hat{\mathbf{e}}_0 + 2\gamma^2 \dot{x}^0 \dot{x}^\mu \Gamma_{0\mu}^0 \hat{\mathbf{e}}_0 = 0 \quad (6.22)$$

A equação geodésica espacial na direção radial é composta pelos símbolos Γ_{00}^1 , Γ_{11}^1 , Γ_{12}^1 e Γ_{21}^1 .

$$\gamma^2 \ddot{\chi}^k \hat{\mathbf{e}}_k + \gamma \dot{\chi}^k \dot{\mathbf{e}}_k + [\gamma^2 \dot{x}^0 \dot{x}^0 \Gamma_{00}^k - \gamma^2 \dot{x}^n \dot{x}^n \Gamma_{nn}^k] \hat{\mathbf{e}}_k + 2\gamma^2 \dot{x}^n \dot{x}^n \Gamma_{nn}^k \hat{\mathbf{e}}_k = 0 \quad (6.23)$$

Uma terceira equação expressa a aceleração latitudinal com relação ao eixo polar pelo centroide de massa pelos símbolos $\Gamma_{00}^2, \Gamma_{11}^2$. Esses símbolos são definidos por $\partial_2 g_{\mu\nu}$ ¹⁸³ pela expressão métrica e possuirão estabilidade na linha equatorial. Então, dependendo da condição inicial, o movimento fica restrito ao plano. Outra forma é dizer que, tomando por referência (6.2), é uma superfície equipotencial; então a componente métrica g_{11} não descreve uma superfície equimétrica.

Para campo fraco, $\partial_1 g_{11}$ e $\partial_2 g_{11}$ serão uma boa aproximação do limite newtoniano para um problema estático.

Para o problema estacionário, a única consideração é que a velocidade equatorial não deve ultrapassar a velocidade limite. Por outro lado, a situação dinâmica de variação da velocidade equatorial pela contração do corpo deve relacionar-se com perda de energia. O equacionamento perde a dependência exclusiva espacial $g_{\mu\nu}(r, \theta)$ e passa a possuir dependência cinemática $g_{\mu\nu}(r, \theta, v)$. Reverter a forma oblata (ou mesmo chegar à forma prolata ou outra irregular) implica em emitir energia para perder velocidade, situação que somente tem sentido com um corpo companheiro.

Outras situações mais complexas envolvem dois corpos: a velocidade relativa máxima entre as linhas equatoriais de ambos os corpos não deve ultrapassar a velocidade limite. O equacionamento deverá ter em conta a inclinação e o alinhamento entre os eixos polares, ou inclinação com relação ao plano equatorial.

6.1.3 Equilíbrio Hidrostático Relativístico

A equação geodésica mais geral é obtida estendendo a fórmula de MacCullagh normalizada para modelo harmônico esférico geopotencial, $\Phi(r, \theta, \varphi)$, com o acréscimo dos termos respectivos ao parâmetro adicional, φ similar ao parâmetro θ . A aplicação clássica desse modelo em geodésia sugere uma mudança de perspectiva do espaço exterior corpo para o seu interior.

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(r, \theta, \varphi)}{c^2} = & - \frac{GM}{c^2 r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n (\text{termos longitudinais}) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Como o tensor métrico normalizado se ocupa apenas da representação pontual, a distribuição de massa do corpo é estudada pelo tensor energia $\Theta^{\mu\nu}$ em sua relação com o tensor curvatura $R^{\mu\nu}$ em um volume de controle delimitado pela superfície do corpo, por (4.164). A comparação feita, admitindo que o limite newtoniano por (6.2), as componentes espaciais do tensor energia $\Theta^{\mu\nu}$ pela definição em (4.139), equivaleria diretamente ao segundo termo $\Phi_{\text{cinético}}$ do lado direito de (6.2), enquanto as componentes espaciais tensor curvatura somente

¹⁸³Notar que $x^\theta = r\theta$, então, para evitar a substituição $\theta = x^\theta/r$, o que afetaria a $\partial_2 g_{\mu\nu}$, a sugestão é substituir $\theta \rightarrow r\theta/r$ para derivação no segundo índice, o que acaba resultando no mesmo operador $r^{-1}\partial/\partial\theta$ empregado no caso holonômico.

$R^{\mu\nu}$ é expresso variação de segunda ordem da métrica $\partial_{kk}g_{\mu\nu}$, mostrando-se inconsistente com $g_{11} = (1 + c^{-2}\Phi_{\text{gravitacional}})_{11}$. A incompatibilidade vem como componente da métrica g_{11} , embora, da congruência ao campo, não descreva uma superfície equipotencial pelo mesmo contorno que define o volume de controle do contorno do corpo material.

Entendimento retoma a proposição para métrica normalizada de evitar a dupla tarefa em controle material e imaterial,¹⁸⁴ iniciada em 4.5.2 e estendida a 4.5.2. Em síntese, uma vez que tenha-se delimitado o fluxo material por uma superfície de controle pela continuidade de Reynolds, analisa-se o fluxo imaterial produzido por essa mesma quantidade pela Lei do Fluxo Imaterial de Gauß. Em comum, as duas expressões se utilizam do Teorema da Divergência de Gauß-Ostrogradsky; entretanto, há distinção categórica.

O tensor $R^{\mu\nu}/\kappa$ representa a propagação imaterial da curvatura segundo a lei de rotação hiperbólica de contração espacial e dilatação temporal (4.122), enquanto o tensor energia (material em movimento livre) possui dimensões $[\Theta^{\mu\nu}] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ unidades no sistema internacional Joules por metro cúbico (J/m^3) ou Pascal (Pa), geralmente referido como tensão-energia.

A vinculação é feita pela configuração da Lei de Gauß do Fluxo Imaterial; com isso, a energia representa uma “pressão de radiação gravitacional” sobre uma superfície de controle. Também, consistente com a densidade (4.151), não é esperado um fluido material¹⁸⁵. Portanto, o tensor tensão-energia $\Theta^{\mu\nu}$ assume a forma de um tensor-tensão deviatório pelas características incomuns de compressibilidade e viscosidade que modela.

Um tensor pressão em condição isotrópica nas componentes espaciais, a exemplo do tensor tensão Cauchy pela consideração do limite newtoniano, teria as tensões principais em equilíbrio, ou seja, os termos da diagonal seriam iguais entre si.

Embora o equilíbrio hidrostático não possa ser apresentado diretamente, pela falta de isotropia, pode ser formulado pela transformação. Considerando-se que a “pressão de radiação gravitacional” expressa em $R^{\mu\nu}/\kappa$ seja equivalente à pressão de estagnação $\Theta^{\mu\nu}$ sobre a parte material quando na condição estática, ou seja, a pressão que seria obtida se toda a energia cinética fosse convertida em pressão em uma forma reversível, obtém-se uma expressão de pressão total.

Pressão de radiação incidente na absorção perfeita, $P_{\text{normal}} = (I/c) \cos^2 \theta$, resulta em uma componente de cisalhamento $\tau = (I/c) \cos \theta \sin \theta$. Considerando-se reflexão perfeita, absorção seguida de reemissão, a componente tangencial se anula, enquanto a normal dobra de intensidade.

$$P_{\text{normal}} = 2 \frac{I}{c} \cos^2 \theta \quad (6.25)$$

Um diferencial de pressão pela equação de equilíbrio hidrostático de Newton (por uma pressão isotrópica) pela equação (2.86b), sendo que velocidade nula resulta em $\gamma_v = 1$, possui componentes espaciais:

¹⁸⁴As tarefas são contraditórias, uma vez que materialmente fundamenta-se pelo apresentado em 2.7, enquanto imaterialmente por 4.5.1. Equiparar por energia conduz a erro categórico. Ver também texto referente à nota 129.

¹⁸⁵Ver nota 124.

$$dP = \rho a_k dx^k = \rho \frac{dv_k}{d\tau} v^k d\tau \quad (6.26)$$

O termo mais à direita relaciona-se com metade da derivada de Θ^{kk} , enquanto o termo imediatamente à sua esquerda relaciona-se com a derivada da parte espacial R^{kk} do tensor curvatura.

Considerando que a radiação age pelo dobro da incidência, para evitar reação na direção transversal na resultante de absorção e reemissão, a mesma duplicidade deve estar presente no equacionamento $g^{kk}R_{kk}$, o que se apresenta na adição do termo temporal em (6.16). A expressão de pressão de equilíbrio hidrostático com convergência para o limite newtoniano relaciona-se com a densidade de força:

$$\nabla_\sigma P = \kappa^{-1} \nabla_\sigma \mathcal{R} \quad (6.27)$$

Assim como a métrica normalizada diverge da métrica de Schwarzschild em campo forte, o mesmo é esperado na comparação com a equação de equilíbrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff[80]. Algo semelhante pode-se dizer da relação entre a métrica rotacional normalizada e a métrica de Kerr[52], em que não faz sentido comparação em campo fraco.

Equilíbrio hidrostático descreve uma situação estática e, ainda que se possa comparar a mudança entre dois estados estacionários, não é esperado que o desenvolvimento dinâmico se apresente como instantâneos da forma estática, pois, relativisticamente, envolve a velocidade com que o processo ocorre.

6.2 Métrica Exponencial

A forma exponencial da métrica normalizada alcança um grau avançado na articulação matemática entre diversos conceitos. Processos exponenciais fogem ao senso convencional, quer por crescimento/decaimento, quer no encontro em grupo de rotação hiperbólica. Além disso, o formalismo encontra “isonomia” ondulatória pela uniformidade no tratamento entre as categorias material e imaterial.

A natureza ondulatória compartilhada entre material e imaterial pelo invariante de velocidade decompõe-se em frequência e comprimento de onda. A decomposição do momento em expressões envolvendo propriedades ondulatórias mediadas por $\hbar_c$.¹⁸⁶

$$P^\mu = \hbar_c K^\mu \quad K^\mu = \left[\frac{\omega}{c}; \vec{k} \right] \quad (6.28)$$

A motivação do estado ondulatório surge ao estipular o estado inercial ao equilíbrio oscilatório intrínseco. Pela observação coordenada, a atribuição da posição do corpo e o seu movimento fazem-se sobre uma métrica fixa. O conflito: se a métrica move-se em relação ao corpo, então é o corpo que se move em relação

¹⁸⁶Aqui, $\hbar_c$ é o parâmetro de acoplamento harmônico (ou angular). Aproveita-se a familiaridade do símbolo da constante de Planck $\hbar$ no lugar de H_1 . O parâmetro H_1 depende dos corpos (não é uma constante universal). Ver (4.112).

à métrica, pois todos os referenciais estão atrelados às posições métricas. Com isso, as resoluções de latência para efeito retardado na dinâmica perde referência de posição. A solução é passar do domínio do espaço para o domínio do tempo, ou melhor, da frequência.

A resposta em frequência de um corpo material a um estímulo depende da latência inercial de sua massa pela forma como a oscilação promove temporização na alternância de movimento.

Imaterialmente, a oscilação métrica ocorre quando a dilatação temporal e contração espacial variam alternadamente pela oscilação de posição do corpo que promove a métrica que, por sua vez, reage a uma oscilação métrica alheia. Nesse mecanismo de equilíbrio dinâmico intrínseco, a sintonia em ressonância será a condição de estabilidade que conserva o movimento e indicará a ausência de força, sendo, portanto, o estado de movimento inercial. Também por esse mecanismo, a oscilação métrica acaba sendo a forma de propagação. As formas material e imaterial acabam sendo conjugadas. O terceiro caso é de dissonância, quando parte da oscilação imaterial se desagrega, carregando excesso de energia do transitório de desbalanço.

A distinção entre a oscilação “forçada” sobre uma fonte material ou a forma autossustentada com que o estímulo se propaga é feita nas componentes espaciais.

$$\vec{k} = \begin{cases} \lambda_{\text{Compton}} \hat{\mathbf{u}} : & \text{material} & (6.29a) \\ \lambda_{\text{Broglie}} \hat{\mathbf{u}} : & \text{métrica} & (6.29b) \\ \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{u}} : & \text{imaterial} & (6.29c) \end{cases}$$

A vinculação com propagação pela oscilação métrica da natureza da atração é obtida pela relação de de Broglie estendida, aqui ao adotar a definição de frequências em (4.115), o que resulta em $K^\mu K_\mu = 0$. Por outro lado, $K^\mu K_\mu = P^\mu P_\mu / \hbar_c^2 = (m_0 c^2 / \hbar_c)^2$ se remete à frequência Compton estendida (4.114). Os dois primeiros são atrações, no sentido de que equacionam para uma geodésica, enquanto o terceiro é força propriamente dita, o que se relaciona com emissão (4.35) e o que possa ser entendido por reação de campo.

Uma visão mais detalhada do processo sistêmico encontra-se nas seções precedentes. Em síntese, corpo oscila intrinsecamente no espaço-tempo em resposta ao estímulo da oscilação da métrica. A autopropagação da métrica pela sua auto-oscilação em proporção à métrica na posição propriedade das taxas relacionadas (4.39). A oscilação intrínseca ¹⁸⁷ transita na velocidade limite em concordância com a velocidade de uma partícula $E = \hbar_c \omega$ vista em 4.5.1. Uma descrição mecânica mais completa, sem abstrair um dos corpos, aponta para sustentação ressonante do fenômeno, visto em sec. 4.4.5, enquanto a concepção ondulatória é elaborada em sec. 4.4.6

Com relação ao invariante de velocidade, é preciso uma relação com a velocidade $c = \lambda f$ para a invariância do momento, sendo ambos resultados constantes e mediados pelo acoplamento $\hbar_c$. Assim, enquanto, por um lado, o corpo material evidencia a frequência “apropriada” à intensidade de atração para uma onda invariante, frequência natural do sistema massa-força em resposta à atração, por

¹⁸⁷Ver texto que se remete à nota 108.

outro lado, o “estímulo” deve se manifestar de imaterialmente, permitindo superposição de ondulatória.

$$K^\mu K_\mu = \begin{cases} \omega_0^2 : & \text{onda material} \\ 0 : & \text{onda métrica} \\ 0 : & \text{onda imaterial} \end{cases} \quad \begin{matrix} (6.30a) \\ (6.30b) \\ (6.30c) \end{matrix}$$

Generalizando, as equações (4.114) e (4.115), para além do uso pela velocidade de Sommerfeld, têm-se Compton estendido obtido por $E_0 = mc^2$.

$$\lambda_C = \frac{h_c}{\sqrt{P^\mu P_\mu}}; \quad f_C = \frac{c\sqrt{P^\mu P_\mu}}{h_c} = \frac{\sqrt{V^\mu V_\mu} \sqrt{P^\mu P_\mu}}{h_c} = \frac{V^\mu P_\mu}{h_c}; \quad (6.31)$$

Seguindo o convencional, a energia de qualquer partícula é pela componente temporal $E_0 = mc^2 = hf_C$. Esses dois parâmetros são nocionais para a formulação de ondas homogêneas ou não-homogêneas, o que é feito pelos parâmetros de Broglie estendido:

$$f_B = \frac{c\sqrt{P^0 P_0}}{h_c} = f_C \frac{\sqrt{P^k P_k}}{\sqrt{P^\mu P_\mu}} = f_C \cdot \gamma\beta_0 \quad (6.32)$$

$$\lambda_B = \frac{h_c}{\sqrt{P^k P_k}} = \lambda_C \frac{\sqrt{P^\mu P_\mu}}{\sqrt{P^k P_k}} = \frac{\lambda_C}{\gamma\beta_k} \quad (6.33)$$

Se as velocidades forem iguais na condição $\beta_k = \beta_0 = 1$, então a expressão simplifica para $f_B = \gamma f_C$ e $\lambda_B = \lambda_C/\gamma$, resultando em uma equação de onda homogênea e, portanto, imaterial. Esse é um caso especial que define a frequência fundamental pelo raio crítico em (4.112).

Se as velocidades forem não satisfazem a condição $\beta_k \neq \beta_0 = 1$, então a expressão resulta em uma onda não-homogênea que corresponde ao movimento de um corpo material, a relação de Broglie convencional, com $f_B = \gamma f_C$ e $\lambda_B = \lambda_C/\gamma\beta_k$. Interessante destacar que $\lambda_B f_B = c/\beta_k$.

Se as velocidades forem iguais na condição $\beta_k = \beta_0 \neq 1$, então a expressão resulta em uma onda homogênea, portanto imaterial. Apesar de a velocidade expressa não ser a velocidade correspondente a um corpo material, a relação entre comprimento e frequência de onda será $\lambda_B f_B = c$, definindo a velocidade de propagação. A equação descreverá a onda métrica imaterial de um corpo material com velocidade β_k . A condição do coeficiente β_k estar deslocada explica-se pela modulação de frequência por Doppler relativístico, o que é desenvolvido no restante do texto.

Qualquer outro caso $\beta_k = \beta_0 = 1$ expressa uma emissão livre com equivalência energia-massa pelo primeiro caso especial.

Os parâmetros da equação homogênea de onda métrica ajustam os efeitos cinemáticos para o deslocamento Doppler relativístico no momento da emissão, mas deixam de fora os efeitos métricos de sua propagação, o que tornará a onda evanescente.

Em consequência do equacionamento, faculta-se a escolha da representação ondulatória do corpo em substituição à sua contiguidade. O ponto material não se separa de sua adjacência imaterial, e a redundância permite abstrair em benefício do tratamento homogêneo. Em síntese, a ausência de uma superfície de interface do ponto material é substituída pela colisão convoluta com seu efeito métrico oscilatório. A representação faculta arbitragem dos casos em que apropriado, como na eletrodinâmica de partículas ou, em contraponto, colisão de corpos gravitacionais extensos.

6.2.1 Onda Estacionária

A frequência de Broglie ¹⁸⁸ pela velocidade de Sommerfeld $c\alpha$ ¹⁸⁹ é definida apenas para movimento orbital circular. Atrato métrico da frequência requer decomposição nos efeitos métricos e cinemáticos. O fator de velocidade em unidade natural, assume valores na faixa $0 < \alpha < 1$, e a equação (4.107) coloca a variável transformada no espaço kepleriano planificado. Para esse espaço transformado, seria esperado um fator de Lorentz similar ao do espaço de Minkowski $\gamma_{c\alpha} = 1/\sqrt{1 - \alpha^2}$ como uma medida de “equipolência lumínica” dos efeitos cinemáticos. Nessa heurística, a decomposição da modulação de frequência $\omega = \alpha\omega_0$ entre efeito cinemático e métrico seguiria a generalidade por uma forma análoga ao convencionalmente estabelecido, expandido para $\omega = \omega_0\gamma_{c\alpha}\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}$. ¹⁹⁰ Entretanto, por um critério energético, o que toma efeito é falta de linearidade na escala pela forma convoluta (progressão geométrica para exponencial) (4.111), e a relação é uma conveniência da onda estacionária.

Para referência, é interessante decompor o movimento circular nos termos análogos aos efeitos cinemáticos e gravitacionais por uma heurística que facilite comparação. Fazendo $\tilde{\gamma}_{c\alpha} = 1/\sqrt{\delta^{11}g_{11} - 1}$, o efeito cinemático pelo Doppler transversal da velocidade circular, o termo remanescente torna-se o fator que toma efeito de modulação métrica da frequência.

$$\frac{\omega}{\omega_0} \equiv \frac{\alpha^2}{\alpha} = \frac{(\sqrt{\delta^{11}g_{11} - 1})^2}{\sqrt{\delta^{11}g_{11} - 1}} = \tilde{\gamma}_{c\alpha}(\delta^{11}g_{11} - 1) \quad (6.34)$$

O contra-exemplo aponta para a necessidade de um critério energético. A heurística $\alpha^2 \equiv \delta^{11}g_{11} - 1$ vem por (4.108). Embora a relação seja válida para o movimento circular, é uma relação espúria pela generalidade, pois não satisfaz a natureza energética do fenômeno. Uma relação alternativa é obtida, observando que a equivalência $\alpha^2 \equiv x^1\partial_1g_{11}\delta^{11}$ também é válida no movimento circular. Pela decomposição proposta anteriormente, o fator cinemático tomaria a forma $\gamma_{c\alpha} \equiv 1/\sqrt{x^1\partial_1g_{11}\delta^{11}}$ (e a ausência explícita de uma velocidade seria justificada pelo determinismo entre velocidade e órbita circular concebido em (4.107)), enquanto o fator remanescente atende pelos efeitos exclusivamente métricos.

$$\alpha^2 \equiv x^1\partial_1g_{11}\delta^{11} \equiv \delta^{11}g_{11} - 1 \quad (6.35)$$

¹⁸⁸Ver nota 94.

¹⁸⁹O texto também se refere ao fator adimensional de velocidade em unidade natural como velocidade binormalizada. Ver nota 95.

¹⁹⁰Prosseguindo com $E = \gamma_\alpha m_0 c^0 c^0 \tilde{g}_{00} = \gamma_\alpha \hbar c \omega_0 c \delta^{00} \tilde{g}_{00}$, manifesta-se por uma curvatura, não pelo espaço plano pressuposto, nem por uma transformação consistente.

Ignorando-se a variação cinemática $\tilde{\gamma}_\alpha$ em (6.34), tem-se que $\Delta\omega = \omega_0\Delta g_{11}$, e uma boa aproximação é:

$$\Delta\omega = \omega_0\partial_1 g_{11}\delta^{11}\Delta x^1 \quad (6.36)$$

Entretanto, a despeito do gradiente, o valor principal de frequência $\omega/\omega_0 = (\delta^{11}g_{11} - 1)$ é incompatível com valores experimentais em campo gravitacional fraco, que estão na ordem de:

$$z = \frac{(\omega_0 - \omega)}{\omega} \approx (\delta^{11}g_{11} - 1) \quad (6.37)$$

A modulação ω/ω_0 se insere diretamente como termo métrico pela regressão ao termo diferenciado da métrica (primitivo). Em outras palavras, a modulação métrica de frequência espelha o termo diferenciado da métrica.

Essas equivalências na modulação de frequência em variação da métrica também são observadas como efeito energético.¹⁹¹

6.2.2 Modulação Métrica de Frequência

Seção precedente apresenta relações entre a modulação total de frequência, que se relaciona com a parcela diferenciável da métrica, e em dubiedade com seu gradiente. A coincidência é peculiar pela forma algébrica da métrica, mas taxas relacionadas, como (4.39), não são incomuns na forma abstrata da métrica.

A demonstração direta do gradiente da métrica pela sua relação com a modulação de frequência é feita pela variação de energia. A energia relativística $P^0 P_0 = E^2/c^2$ e sua frequência $K^0 K_0 = \omega_0^2$, considerando a equação homogênea.

Limite newtoniano, aplicado à (2.89a), simplifica a resolução do gradiente métrico por decomposição de efeitos: velocidade baixa do fator sub-lumínico cinemático $\gamma_v \rightarrow 1$ equivale ao arranque $v = 0$ e limita a dependência ao parâmetro posicional. Campo fraco $\gamma_r \rightarrow 1$: predomina o gradiente métrico em vez do valor métrico. Pela consideração a efeito isolado, o resultado do gradiente permite recomposição no equacionamento geral.

Como a situação progride por um contorno do envelope métrico. Variação percebida por desconsiderar os efeitos métricos dá a medida da métrica na posição.

A noção geral, parte da energia relativística $P^0 = E/c$ é “despendida” no autotransporte pela relação da energia com frequência $K^0 = \omega_0$ estar sujeita aos efeitos temporais da métrica. A frequência desvanece.¹⁹²

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{\partial E}{\partial x^0} \equiv c \dot{x}^k \frac{dP^0}{dx^k} \quad (6.38)$$

¹⁹¹Supondo que relacionar-se-ia energia pela variação de “pressão de radiação”, ter-se-ia $dW = -PdV - VdP$. Adiante é visto pela potência.

¹⁹² A perda de energia na atenuação da frequência (desvanecimento) em vez de amortecimento da amplitude (amortecimento).

A métrica não varia intrinsecamente no tempo, e a variação é induzida pelo deslocamento. Do termo temporal da geodésica:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{a} \cdot \vec{p} \quad (6.39a)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \vec{a} \cdot \vec{k} \quad (6.39b)$$

Ainda pela geodésica, $a = GM/r^2$:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{GM}{c} \frac{\omega}{r^2}$$

Substituindo $dr = c dt$, chega-se à expressão similar ao que seria o limite de (6.36).

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{GM}{c^2} \frac{\omega}{r^2} \quad (6.40)$$

A integral resolve para posição de emissão e absorção:

$$\omega_a = \omega_e \exp \left[-\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_a} \right) \right]$$

Ou na proporção:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\exp[-GM/(R_e c^2)]}{\exp[-GM/(r c^2)]}$$

Para $r \rightarrow \infty$, espaço plano (o que equivale também à razão pelo referencial do observador) a métrica da parte temporal torna-se a razão das frequências.

$$\frac{\omega_\infty}{\omega_0} = \exp \left(-\frac{GM}{c^2 R} \right) \quad (6.41)$$

A taxa de decaimento é a mesma, independentemente da frequência. Assim como a frequência é relacionada com o transporte de energia, a modulação é com a atenuação energética. Qualquer frequência de uma emissão está sujeita à modulação pela métrica. Por propriedade da derivação exponencial, o caso especial é quando a própria frequência, não somente o seu gradiente, está relacionada com a métrica, ou seja, é a ondulação métrica. Somente uma frequência segue $K^0 = \omega/c$ ao mesmo tempo que equivale a $K^0 = c g_{00}$ para o caso homogêneo. Onda métrica, ou autopropagação, sincronidade entre a atualização de seu efeito no espaço e a oscilação induzida pelo movimento do corpo fonte, como sugerido na sec. 4.4.6. Assim conclui-se:

$$g_{00} = \exp \left(-\frac{GM}{c^2 r} \right) \quad (6.42)$$

Nessa nova formulação métrica, as incongruências da seção precedente são eliminadas. A relação da órbita circular em (4.107) torna-se:

$$\alpha^2 = \frac{\partial_r g_{11}}{g_{11}} \quad (6.43)$$

Com isso, o ansatz da seção anterior:

$$\partial_r \left(\frac{c}{\omega} \right) = - \left(\frac{c}{\omega} \right) \left(\frac{GM}{c^2 r^2} \right) = - \left(\frac{c}{\omega r} \right) \alpha^2 \quad (6.44)$$

Também é interessante observar que, expandido na série de Taylor-Maclaurin, há uma boa aproximação entre a formulação geométrica e a formulação exponencial quando $x \gg k$.

$$\exp \left(\frac{k}{x} \right) \approx 1 + \frac{k}{x} \quad (6.45)$$

A aproximação explica a métrica geométrica (6.35) por uma equivalência fraca. Poucas definições para uma métrica normalizada dependem de uma forma funcional específica. Na definição (2.74), replicada abaixo, o lado esquerdo resulta em $e^U \partial_1 U$, tornando a fuga radial (ou gradiente entre órbitas circulares) definida por $\gamma^2|_{v_1} \equiv e^U$ para a condição de que $2\gamma\dot{\gamma} \equiv (v^1 \cdot \partial_1 U) e^U$, o que, com algumas simplificações $\gamma^4 g^{11} = g_{11}$, se equivale a (2.82).

$$\partial_1 g_{11} \equiv \delta_{11} \delta_{11} \gamma^2 \frac{f^1}{c^2} \quad (6.46)$$

Outro ponto é que preserva a definição para a velocidade de Sommerfeld (4.109), o que é relacionado ao anterior.

Além do que é exigido para normalidade, a métrica exponencial satisfaz outros requisitos, vistos a seguir.

6.2.3 Grupo Contínuo

Métrica normalizada é idealizada em um grupo contínuo que representa no espaço das velocidades. Empregando imaginários que satisfaçam o produto diedral, a forma exponencial possui mapeamento direto da rotação hiperbólica da velocidade. Essa mesma estrutura normaliza a decomposição base linearmente, diferenciável pela derivada covariante, o mesmo operador do grupo.

Seja o tensor gerador formado por parâmetros de acoplamento:

$$U_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}^2 \cdot GM/(c^2 r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}^2 \cdot GM/(c^2 r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{j}^2 \cdot 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{k}^2 \cdot 0 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

A métrica exponencial normalizada pode ser definida por:

$$g_{\mu\nu} = \exp(U_{\mu\nu}) \quad (6.48)$$

O destaque da expressão está na presença nos imaginários. Esses números são definidos pelas propriedades de simetria e ortogonalidade do operador diedral em (3.39). Embora dispensáveis nessa sentença, dá ciência da manipulação “hermitiana”. Definindo $\mathbf{1} = ijk = -1$, então $\mathbf{1}^2 = (ijk)^2 = 1$ e o conjugado $\mathbf{1}^* = (ijk)^* = (-i)(-j)(-k) = 1$, a matriz é decomponível em termos conjugados. A definição concerne à reciprocidade entre a componente temporal em contraparte das espaciais.

A formulação de grupos de rotação hiperbólica (3.51) possui seu núcleo pela redução à forma diagonal.

$$\text{SL}(4, \mathbb{D}) = \left\{ g_{\mu\nu} \left| i, j, k \in [1, 3] : 0 < g_{00} = -\frac{1}{\det(g_{ij})} < 1 \right. \right\} \quad (6.49)$$

O grupo consiste nas formas bilineares que operam a rotação hiperbólica do tensor velocidade. Os elementos inversos $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 1$ são denotados na forma contravariante na caracterização ortogonal. A métrica de Minkowski está inclusa nesse grupo por necessidade de um elemento identidade, a despeito de sua realização mecânica apontada em 5.2.1. A participação como elemento mecanicamente neutro segue uma definição assintótica, evitando-se a dubiedade apontada em (4.217*). Uma definição estritamente cinética recai em um semi-grupo, sem identidade e sem inverso.

$$S = \left\{ g_{\mu\nu} \left| i, j, k \in [1, 3] : 0 < g_{00} = -\frac{1}{\det(g_{ij})} < 1; \delta^k \partial_k g_{00} \neq 0 \right. \right\} \quad (6.50)$$

Uma representação possível mapeia a atuação dessas formas bilineares no espaço tensorial das velocidades pela base normalizada segundo sec. 2.3.3. Consoante a isso, a base e seu dual possuem representação unitária (4.2) e referem-se à perspectiva tangente $\hat{e}_k = i\sqrt{\eta_{kk}}$ subentendida à perspectiva coordenada $\hat{e}_k = i\sqrt{g_{kk}}$ na operação $g_{kk} = \hat{e}_k \cdot \hat{e}_k$.¹⁹³

Outra representação é possível no espaço de Hilbert. Tomando a identidade de Lagrange de (4.93), $\langle \hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu \rangle, \langle \hat{\mathbf{e}}_\nu, \hat{\mathbf{e}}_\mu \rangle^2 = \det(g_{\mu\nu})$, o volume espaço-tempo $\Psi = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})}$ é o produto de rotações exponenciais em uma interpretação ondulatória. Como ilustração, considere uma composição métrica pela sua propagação da ondulatória parametrizada, em razão da simplificação algébrica, de forma homogênea:

$$\Psi(r, t_*) = e^{ikr - i\omega t_* - i\pi/2} = -i \quad (6.51)$$

As componentes espaciais mapeiam para número de onda do termo ikr , em contraposição à componente temporal à frequência angular em $i\omega t_*$. Como, por uma equação homogênea, a soma é nula, a constante de fase $i\pi/2$ é necessária apenas para se chegar ao sinal desejado do determinante unimodular $\Psi^2 = -1$

¹⁹³Elementos da base diedral formam um laço Moufang.

pela identidade de Euler. O subscrito em t_* refere-se ao emprego extrínseco do tempo.

Similar à onda progressiva, uma onda evanescente é obtida pelo respectivo expoente não-homogêneo.¹⁹⁴ Essa modalidade de onda coloca em evidência a necessidade de modulação de fase. Também, uma representação por uma equação na forma (6.51) não possuirá relevância prática se os parâmetros k e ω não possuírem uma definição funcional conhecida, como no caso estacionário da forma homogênea.

Os parâmetros k e ω não são peças soltas na forma não-homogênea. As relações sistêmicas dessa nova perspectiva evidenciam uma convergência de fatores que a forma homogênea permitia ignorar. O quadro estacionário é dominado pelas variáveis de espaço e tempo, e a descrição mecânica de $\Psi(r, t_*, \omega, k)|_{\omega=cte; k=cte}$ preocupa-se com o equacionamento pela simultaneidade de eventos. No quadro dinâmico, a descrição mecânica de $\Psi(r, t_*, \omega, k)|_{t_*=cte; r=cte}$ mantém a sincronicidade da resposta em frequência diante da modulação dessa para uma posição fixa.

O determinante da métrica, no domínio do espaço, é o elemento de volume espaço-tempo. Unitário, o determinante expressa a reciprocidade na decomposição entre espaço e tempo na coesão da velocidade limite. A correspondente ondulatória do domínio do tempo na decomposição conjugada de ondas espaço-tempo em relação ao evento.

No primeiro, domínio do espaço fundamenta-se na reciprocidade de relações estáticas (estacionárias); no segundo, domínio do tempo adequa-se a relações dinâmicas. Grupo contínuo abstrai essas peculiaridades para o categórico topológico, domínio do espaço para o domínio do tempo, pela forma que faculta uma representação mais apropriada para cada peculiaridade. Dualidade entre o ponto material ser representado pelo elemento de volume, todo-parte, passa a ser expressa na dualidade onda-partícula.

O retrato mecânico depende do quadro que se observa. A impossibilidade de uma panorâmica espacial é amenizada pelo enquadramento mais adequado do cenário dinâmico. Torna-se relevante a onda material e sua adjacência imaterial.

$$\Psi^2 = \bar{\psi} \cdot \psi \quad (6.52)$$

Nessa representação do grupo, o entendimento é que há invariância na composição entre onda material e o conjugado imaterial. Encontra respaldo na análise conceitual, identificando os elementos da noção de ação e reação. Também sintetiza propriedades sistêmicas, latência inercial e incerteza, pela defasagem intrínseca à operação.

Ação e reação expressam reciprocidade entre dois corpos; o mesmo é esperado na reciprocidade entre material e sua adjacência imaterial na abstração de um

¹⁹⁴ Métrica não varia intrinsecamente no tempo, somente extrinsecamente pelo movimento de sua fonte. Como a ondulação viaja à velocidade da luz, as relações de simultaneidade da distância espaço-tempo são sistemicamente equacionáveis pela inclusão da variável t_* , e a diferenciação pelo subscrito indica tratamento extrínseco que deve ser dispensado a essa variável nas operações de derivação.

Por essa mesma propriedade nas relações sistêmicas ao referenciar eventos no espaço-tempo, a parametrização atende a outras conveniências. O equacionamento métrico pelas variáveis no domínio do espaço parametriza o decaimento pelo tempo de propagação. No domínio do tempo, espaço de Hilbert, referência o decaimento por um parâmetro espacial.

dos corpos. Assim, embora na construção harmônica espere-se o paralelismo de fases, a mediação estímulo-resposta introduz retardo pela propagação no espaço-tempo. Além disso, a resposta em frequência, mecanismo massa-tempo, terá na massa um fator de latência. Esses dois elementos introduzem uma pequena discrepância na forma de incerteza.

Próxima seção expande para os rudimentos mecânicos.

6.2.4 Equação de Dirac

Consistente com ambos os princípios ondulatórios e relativísticos, também notável pela descrição de spin e previsão de antimatéria, a equação de Dirac[28] é uma aplicação no espaço-tempo de Minkowski. Uma variante estendida ao espaço curvo é demonstrável na métrica normalizada. A seção trata da adaptação pela exponencial e interpretação do equacionamento.

Conceitualmente, o original de Dirac é uma equação de campo por um potencial. Apesar de a falta de curvatura não caracterizar holonomia, a função lagrangiana é expressa em coordenadas generalizadas. Na interpretação no espaço curvo, possui consequência no momento magnético anômalo e Yukawa.

Duas vertentes são possíveis: uma na formulação pela correspondência ondulatória da forma pontual coordenada, outra abstrai diretamente a ondulatória na representação de grupo contínuo da métrica exponencial. Segue-se com a construção da primeira visão.

Na representação pelo domínio do espaço, um corpo de massa pontual é origem da coordenada métrica e a análise do movimento recai sobre um segundo corpo sujeito ao influenciado primeiro. Na configuração de dois corpos, a interação é recíproca. Presumindo que o equilíbrio dinâmico e ambos possuem ondulação intrínseca: a interação entre esses corpos pela exposição à onda métrica da contraparte. As quantidades descritivas das propriedades ondulatórias mensuráveis nesse cenário, de acordo com sec. 6.2.2, são a frequência e sua modulação.

A frequência possui decaimento com a distância, e sua evanescência¹⁹⁵ é expressa por:

$$\omega(r) = -c\partial_r \exp\left(-\frac{\omega_0 r}{c}\right) \quad (6.53)$$

A frequência por uma posição não varia intrinsecamente no tempo. Entretanto, a própria frequência flutua em razão da incerteza ondulatória de sua fonte. Essa variação extrínseca pode ser indicada por uma variável t_* ; o subscrito denotada a intenção extrínseca em uma reformulação abrangente.

$$\omega(t_*, r) = -c\partial_r \exp\left(-i\omega_0 t_* - \frac{\omega_0 r}{c}\right) \quad (6.54)$$

Variação extrínseca no tempo é presumida por derivada covariante temporal $\dot{\nabla}$ quando o termo introduzido é delimitado por uma relação sistêmica. Um balanço entre a variação espacial e temporal existe na formulação da equação de onda. Essa condição pode ser estabelecida pela modulação de frequência da onda métrica.

¹⁹⁵Ver nota 194.

$$\partial_r \omega(t_*, r) = -c \partial_{rr} \exp \left(-i\omega_0 t_* - \frac{\omega_0 r}{c} \right) \quad (6.55)$$

A evanescência da onda métrica está relacionada à atração por (6.40), caracterizando onda de atração.

$$c\omega \partial_r \left(\frac{c}{\omega} \right) = - \left(\frac{GM}{r^2} \right) \quad (6.56)$$

Conservação segue por teorema da divergência ou Lei de Gauß. É esperado que a onda métrica expresse a conservação da massa.

$$- \iiint \omega \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c^2}{\omega} \right) dV = \int \left(\frac{GM}{r^2} \right) 4\pi r^2 dr = 4\pi GM \quad (6.57)$$

E a relação se completa com (6.42).

$$g_{00}(r) = \exp \left(\frac{GM}{c^2 r_e} \right) \quad (6.58)$$

Na ausência de uma posição fixa do corpo, o espaço estará em constante mudança, algo que poderia ser descrito por $g_{00}(t_*, r)$. Na condição de seguir um padrão de repetição periódico, ou mesmo em baixa velocidade, não se incorrerá em erro significativo. Entretanto, quando o corpo fonte move-se significativamente, quer pela velocidade, quer pela distância, o referencial feito ele torna-se desatualizado. Isso inviabiliza sistemicamente que se retrace, extrinsecamente pelo espaço, a posição original do estímulo diante da inconstância do mesmo. A solução requer mudança de representação.

Substituindo $\tilde{\nabla} \rightarrow \partial$ em (4.224) e também $t_* \rightarrow t$ no tempo coordenado,¹⁹⁶ obtém-se uma elaboração abstrata homogênea $\Psi_H(t, r) = \exp(i\omega_0 t - i\omega_0 r/c)$ no espaço plano:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Psi_H(t, r) = 0 \quad (6.59)$$

Uma decomposição $g_{00} = \langle \hat{\mathbf{e}}_0, \hat{\mathbf{e}}_0 \rangle$ para uma métrica diagonal possui correspondente ondulatório pela identidade:

$$\partial_{xx} e^{kx} = \left(2\partial_x e^{kx/2} \right)^2 \quad (6.60)$$

Presumida a covariância entre sistemas de coordenadas, a expressão da forma geral para a representação de (6.58) a partir de $g_{00} = \Psi_{00}$ torna-se:

$$\Psi_{\mu\nu} = \hat{\psi}_\mu \cdot \hat{\psi}_\nu \quad (6.61)$$

¹⁹⁶O tempo t_* somente atua na variação coordenada e é sem participação na variação intrínseca da métrica. Ver nota 194.

A curvatura segue a determinação da massa; da mesma forma, a oscilação replica essa correlação. Pela contiguidade vista em (6.30b), a vinculação da oscilação da adjacência imaterial com a respectiva material é feita por $\Psi = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}$ em equivalência ao estado material do momento.

$$\det(g_{\sigma\rho}) \equiv -\frac{P^\mu P_\mu}{m^2 c^2} \quad (6.62)$$

A elaboração torna-se consistente com ondulatória por $\Psi^2 = \bar{\psi}\psi$, mas com advertência de que o resultado no equacionamento da onda imaterial métrica que se segue de (6.30b). A demonstração apropriada da continuidade somente é possível por uma elaboração lagrangiana, recaindo na formulação de uma equação de Dirac estendida ao espaço curvo.

Procedendo de maneira direta, o momento $P^\mu = \hbar_c K^\mu$ é proporcional ao tensor-onda e assume forma $K^\mu K_\mu = g^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi)(\partial_\nu\psi)$, na qual a ondulatória de Ψ segue (6.54). A mesma expressão, em similaridade a (6.61), também pode ser reescrita na forma de segunda ordem $K^\mu K_\mu = g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\psi$, com algum abuso. O equacionamento direto resulta na equação de segunda ordem:

$$\hbar_c^2 g^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi \cdot \partial_\nu\psi) - m^2 c^2 \bar{\psi} \cdot \psi = 0 \quad (6.63)$$

A limitação imposta pelo termo $\bar{\psi}\psi$ constante resulta em um equacionamento em que $\partial_{\mu\nu}\psi \propto \partial_\mu\psi \cdot \partial_\nu\psi$ e, por conseguinte, $\partial_{\mu\nu}\psi \propto g_{\mu\nu}$, ou seja, a variação de segunda ordem da ondulação é proporcional à métrica. A substituição pela segunda ordem também revela uma equação não-homogênea de onda, ou (6.30a).

Adiantando-se ao resultado de Dirac, a variação de segunda ordem é proporcional à oscilação material, enquanto no equacionamento direto, a variação de segunda ordem da ondulação é proporcional à métrica. A interpretação feita, as expressões são distintas na forma, mas iguais no conteúdo: a oscilação imaterial da adjacência métrica espelha a oscilação do ponto material pela contiguidade vista em (6.30b).

A motivação da formulação lagrangiana é para “transporte paralelo”, no qual a invariância de ângulos relativos no transporte visa preservar ângulo de fase diante da modulação de frequências, condiciona $\psi\bar{\psi} = cte$, consequentemente $\partial_\mu(\psi\bar{\psi}) = 0$, concomitante continuidade. Segue que, da primitiva $mc(\bar{\psi}\psi)$, é possível a expansão:

$$-mc = \psi\partial_\mu(\bar{\psi}) + \bar{\psi}\partial_\mu(\psi) - mc\bar{\psi} \cdot \psi \quad (6.64)$$

A formulação lagrangiana deve fornecer subsídio para avaliar a ação estacionária entre a frequência e sua modulação. Da expressão anterior, obtém-se:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \cdot \partial_\mu(\psi) - mc\bar{\psi} \cdot \psi \quad (6.65)$$

A equação de Euler-Lagrange, no domínio do espaço, preocupa-se com continuidade pelo transporte paralelo. No domínio do tempo, continuidade da ressonância na modulação de frequência.

$$\hbar_c \hat{\psi}_\nu \partial^\nu \psi - mc \psi = 0 \quad (6.66)$$

Segue de Euler-Lagrange, em uma leitura direta, que a “força” de modulação da frequência é proporcional à frequência pela sua inércia.

Segue das propriedades algébricas a decomposição:

$$\left(\hbar_c \hat{\psi}_\mu \partial^\mu \psi + mc \psi \right) \left(\hbar_c \hat{\psi}_\nu \partial^\nu \psi - mc \psi \right) = 0 \quad (6.67)$$

Com isso, obtém-se a equação de segunda ordem:

$$\hbar_c^2 g^{\mu\nu} (\partial_\mu \psi \cdot \partial_\nu \psi) - m^2 c^2 \psi = 0 \quad (6.68)$$

Reiterando, se $\partial_{\mu\nu} \psi \propto \partial_\mu \psi \cdot \partial_\nu \psi$ e, por conseguinte, $\partial_{\mu\nu} \psi \propto g_{\mu\nu}$, é uma equação não-homogênea de onda.

A formulação lagrangiana descreve uma condição de onda estacionária, ou seja, conservativa. Assim como ocorre dissipação pelo transvio geodésico, expresso por (4.33), um similar ocorre na modalidade ondulatória. Duas qualidades de dissipação, de acordo com o ajuste de fase da periodicidade: emissões em um espectro discreto, emissões em um espectro contínuo. No primeiro, a existência de pontos de equilíbrio ocorre em intervalos discretos. Parte-se de um ponto de equilíbrio e chega-se a outro mediante emissão ou absorção.

Emissão por um contínuo inviabiliza a existência de pontos de equilíbrio: parte-se de um hipotético ponto de equilíbrio e a dissipação se prolonga continuamente até que alguma suposta condição externa promova o equilíbrio. Mecânica ondulatória contínua: entre as dificuldades de uma formulação mecânica para essa modalidade, conservação não é por estado de equilíbrio, mas por balanço entre termos. A despeito disso, ainda assim é preciso supor um estado de equilíbrio em que haveria conservação.

A equação (6.57) sugere regra de conservação. Assim como o determinante da métrica é elemento diferencial de volume, a função lagrangiana é um diferencial integrável em um volume de convolução. Uma formulação hamiltoniana por transformada de Legendre (4.208) revela $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$ homólogo ondulatório de (4.214), e a equação (6.68) é parelha com (4.212).

O giro intrínseco, associado a $\hat{\psi}_\nu$, é uma construção em forma abstrata da álgebra subjacente. A conceptualização mecânica e abordagem são elaboradas em trabalhos anteriores, e sua construção remonta ao que é fundamentado em 4.4.5. Exceto pelo entendimento de que simetria no espaço é uma abstração, a reciprocidade entre partículas¹⁹⁷ e uma caracterização mais extensa de anti-partículas foge ao propósito do texto.

Acoplamento oscilatório entre corpo e métrica é mediado pela parcela $K^\mu K^\mu$ cinética. Com atenção ao morfismo da forma tensorial, a ondulatória $\partial_{\mu\nu} \psi \propto \partial_\mu \psi \cdot \partial_\nu \psi$ sugere um termo $K_{\mu\mu}$ análogo à curvatura $R_{\mu\mu}$, o que é visto no acoplamento de Yukawa.

¹⁹⁷Ver texto que se segue na indicação da nota 144.

6.2.5 Acoplamento de Yukawa

A equação de Dirac analisa onda métrica em sua perspectiva dinâmica, ainda que em regime estacionário. Uma perspectiva estática concerne à formação do gradiente de modulação pela presença de massa.

Frequência natural de oscilação é a periodicidade com que uma intensidade de força produz alternância cíclica em torno de um ponto de equilíbrio para uma massa em razão de sua latência inercial. Em síntese, mecanismo massa-tempo do acoplamento por uma força. O perfil temporal de sincronidade ocorre em razão do tempo extrínseco, visto em 5.3, enquanto perfil espacial de sua modulação pelas condições métricas.

O tempo extrínseco é introduzido pela derivada covariante temporal $\dot{\nabla}$ e, pela ondulação métrica, realiza a condição de onda (6.51); a dinâmica ondulatória (6.54) é abstraída em $mc\bar{\psi} \cdot \psi$.

Na interação entre dois corpos, em que um seja abstraído pela métrica ou sua onda, a medida de tempo é sincronidade intrínseca. A modulação pelo decaimento (6.53) é o perfil espacial.

Posto em símbolos, em vez de $g_{00}(r, t_*) = e^{i\omega t - \omega r/c}$ de Dirac, a frequência natural obtida da exponencial $g_{00}(r) = e^{-\omega r/c}$.

Adaptando-se à intenção de Yukawa[112], a atração entre corpos no espaço é expressa por uma composição da equação de Helmholtz espacial. Na condição de variação estritamente radial, tem-se:

$$\nabla_{11}Y = \mu^2Y \quad (6.69)$$

Yukawa expressa o Laplaciano $\nabla^2 = \nabla_{11}$ em coordenadas esféricas não-normalizadas.

$$\frac{1}{x^1}\partial_{11}(x^1Y) = \mu^2Y \quad (6.70)$$

Para o contexto apresentado, uma modificação da equação de onda homogênea cuja variável sob derivação é independente do tempo. Essa condicionante é candidata a métrica exponencial normalizada ao *ansatz* na forma $g_{00} = \exp(\mu/r)_{00}$. Estudando a manipulação (6.56), regride a (6.35), em que $\alpha^2 \equiv x^1\partial_1g_{11}\delta^{11}$.¹⁹⁸ Acertando-se o sinal do exponencial dessa expressão, tem-se:

$$\partial_{11}(x^1Y) \equiv \partial_1(x^1x^1\partial_1g_{00}\delta^{00}) = \partial_1(\mu x^1g_{00}\delta^{00}) \quad (6.71)$$

Da relação prévia, chega-se a:

$$Y = x^1\partial_1g_{00}\delta^{00} \quad (6.72)$$

Em síntese, faz-se a equivalência $\exp(-\omega r/c)$ com $\exp(-\mu/rc^2)$ para a modulação da frequência, algo que também é dado por (6.56). Expressão de modulação $\omega = \mu/r^2c$ é alternativa para (6.53). Existe uma frequência evanescente $\omega(r)$, tal que:

¹⁹⁸Nesse ponto, mistura definições da métrica exponencial com a métrica não-exponencial $g_{00} = 1 + \mu/c^2r$. Justifica por que a não-exponencial atinge o mesmo valor.

$$\exp(-\omega r/c) \equiv \exp(-\mu/rc^2) \quad (6.73)$$

Em outra manipulação, a expressão recai, por (4.71c), no escalar de Ricci.

$$\begin{aligned} \delta^1 \partial_{11}(x^1 Y) &= 2x^1 \partial_1 g_{00} \delta^{00} + x^1 x^1 \partial_{11} g_{00} \delta^{00} \\ &= \delta^1 \frac{2\mu g_{00}}{x^1} + -\delta_{11} x^1 x^1 \mathcal{R} = -\frac{\mu^2 g_{00}}{x^1 x^1} \end{aligned} \quad (6.74)$$

O polinômio associado ao escalar de Ricci para métrica exponencial possui extremo em $r = -(2/3)\mu$, enquanto a métrica é monótona.

$$\mathcal{R} = \left(\frac{\mu^2}{r^3} + \frac{2\mu}{r^4} \right) g_{00} \delta^{00} \quad (6.75)$$

Generalizando, é interessante observar que $\partial_{11} Y = \mu^2 Y$ possui solução trivial para $Y = \exp(\pm \omega r)$ ou o conjugado $Y = -\exp(\pm i\omega r)$, tanto onda evanescente quanto progressiva.

O caso convencional de Yukawa está em resolver ω_0 . Um entendimento por $\partial_r(1/\omega)$ em (6.53) para uma elaboração (6.56).

$$Y_0 = \frac{\mu}{r} e^{-\omega_0 r/c} \quad (6.76)$$

Além de fatorar o parâmetro de acoplamento, apresentado em (6.47), obtém-se um valor de massa associado à frequência Compton ω_0 . Os parâmetros correlacionam atração e sua intensidade de alcance entre partículas com a existência de massa. A generalidade dessa noção se estende a uma variedade de partículas; o potencial de Yukawa é aplicável à mésons e à massa fermiônica.

O mecanismo massa-tempo, acoplamento métrico, possui frequência natural pela massa na relação de atração, teoriza sobre como a inércia do corpo satisfaz harmonicamente as relações de equilíbrio pela extrisicalidade temporal, apresentado na 4.4.5 e revisitado na sec. 5.3. Entretanto, essa perspectiva conservativa de massa não contempla a transmutação da massa fundamental. Ainda que calculável do caso estacionário, a mecânica oculta do balanceamento dinâmico é desconhecida. O elemento central dessa incógnita está nas interações mediadas por **neutrino** e suas oscilações, e é razoável considerar que não se enquadre em Yukawa, uma vez que não possui interação.

Nesse enquadramento, um roteiro de investigação proposto, para métrica normalizada, priorizaria entender o decaimento do múon e sua generalização para todos os léptons. Em seguida, uma confirmação no equacionamento pelo decaimento pión ou então do nêutron livre. O assunto não é oportuno no texto presente pela omissão do giro intrínseco em sua caracterização mecânica.

6.3 Métrica Extra-Hiperboloide e Hubble

A seção propõe um substituto de bastidor para a métrica de Minkowski, preterida em razão da incompatibilidade na conjuntura mecânica.

Ao reconstituir metricamente os efeitos do espaço na ausência de especificidade de um corpo, o objetivo prioritário da métrica normalizada na formulação extra-hiperbolóide é explicar o aparente movimento super-lumínico. Concomitante à proposta de evitar a discrepância com o invariante da luz, o formalismo descreve recessão intergaláctica.

A composição concilia a lacuna mecânica da métrica de Minkowski pelo ponto de inflexão 5.2.3 e reproduz estatisticamente as macro-variáveis da auto-organização 5.1.2, ainda que estática e circunscrita ao volume de controle, horizonte de espaço e janela de tempo descrita na sec. 5.3.

6.3.1 Apresentação Conceitual

Auto-organização e princípio de codeterminação; curvatura do espaço-tempo é resultado da dinâmica distribuição de matéria e encontra precedentes em Friedmann [35][36].

A mesma dinâmica que em Friedmann promove a curvatura do espaço, em Prigogine resulta na codeterminação e flecha do tempo. Entre a estrutura conservativa do espaço-tempo e a irreversibilidade de processos dissipativos, busca-se uma conciliação entre os autores.

As equações de Friedmann são derivadas diretamente das Equações de Campo da Relatividade Geral. Elas operam sob o princípio da covariância geral e da invariância de Lorentz local (microscópica): são simétricas no tempo. Prigogine depende crucialmente de uma escala macroscópica e de estados estatísticos de muitos corpos.

O fato de Friedmann não ter modelado microcolisões ou processos dissipativos não significa que eles não existam no universo; ele descreve a restrição estrutural dinâmica do universo conservativo e em conformidade local com Noether. Ondas gravitacionais ou formação de um corpo celeste são mecanismos dissipativos. Mesmo que sejam processos locais energeticamente balanceados, o saldo modifica a proporção material e imaterial.

Na compreensão de Prigogine, sistemas abertos criam ordem a partir do caos, mas eles precisam de um “cenário” e de condições de contorno físicas para fazê-lo. A métrica do espaço-tempo de Friedmann é esse cenário, porém em um instantâneo absoluto, imune a ser dissolvido em mera estatística de probabilidade.

O formalismo normalizado, no que seja similar a Friedmann, opera sobre uma restrição estrutural dinâmica; apesar disso, também apresenta condições dissipativas explícitas.

A irreversibilidade do tempo é fenômeno holístico, e a entropia é conceito macroscópico emergente. Essas formas não reducionistas vêm de interações subjacentes, descritas por macrovariáveis. A forma analítica (micro), como a de Friedmann, opera em um nível de idealização que ignora a flecha do tempo; sintética (macro) de Prigogine.

A abordagem de relações sistêmicas que possuem um discriminante característico na forma de macrovariáveis evita a armadilha do trilema de Münchhausen. Linearizar recai em regressão infinita intratável, enquanto princípio axiomático postula que o estado geral das coisas necessita de condições de contorno apropriadas, como um horizonte de espaço e uma janela de tempo. A autossimilaridade é definição circular, mas o entendimento que é sintomático de fenômeno holístico pode ser resolvido em sua escala macro.

A assimetria temporal não precisa estar escrita nas leis microscópicas da gravidade para ser real. Ela emerge como uma restrição global do sistema. A expansão do espaço-tempo de Friedmann impõe uma condição de contorno dinâmica para todo o universo. Como o espaço está mudando de tamanho, os sistemas de partículas dentro dele nunca conseguem atingir um equilíbrio termodinâmico estático definitivo. É a própria expansão geométrica que força o universo a ser um sistema aberto longe do equilíbrio, criando o gradiente necessário para que as estruturas de Prigogine (galáxias, vida, fractais) surjam e se organizem.

6.3.2 Estrutura Cosmológica

Pela motivação conceitual, a abordagem é conciliar continuidade da rotação hiperbólica com distribuição dinâmica.

Ponto de inflexão é uma proposição de expansão ou contração. Em continuidade à proposta iniciada em 5.2.3, ponderar sobre a fundamentação mecânica.

O formalismo normalizado, em razão de reciprocidade,¹⁹⁹ carece de uma álgebra de métrica. A resolução de múltiplos corpos é feita pela resultante de força. Em seu equilíbrio, e em condições de serem suficientemente fracos, possibilita composição por equivalência métrica, como em (4.173c). A conjuntura propicia a formulação da representação métrica por um “casco cosmológico”. Nesse quadro, as grandes distâncias cosmológicas não produzem atração significativa por um corpo individual, e, em conjunto, a simetria por direções antipodais possui resultante neutra.

Localmente, a resultante nula e sua vizinhança são desprezíveis, ainda assim, relevantes para definição de uma condição de inflexão necessária para a normalidade. Em outra exigência métrica, essa aditividade deve ser delimitada por um volume de controle da distribuição material.

A definição é intrínseca de cada posição, e a situação, embora conveniente, é contestável em uma inspeção inicial. Escolhido um ponto, a inserção em um casco produz uma vizinhança que, na ausência da atração sustentada pelo próprio corpo, virtualmente é propensa a repelir, dado estar fora do ponto de equilíbrio, enquanto cada ponto enxerga o outro em situação equivalente. A contradição é que seria uma clara violação do princípio clássico em que se apoia; entretanto, a representação é para manifestação em uma escala total do espaço-tempo em conjunção com os efeitos ignorados pela clássica.

A despeito do fato de a gravitação ser primariamente atrativa, o invariante da rotação hiperbólica pode induzir uma reação contrária, como a ação de vis-redux na fig. 2a, observada na reciprocidade métrica em escala local. O modelo dá conta dos efeitos relevantes entre dois corpos isolados, e a questão em aberto é sobre a descoberta dos efeitos induzidos pela interação de vários corpos. Ainda motivado por vis-redux, o *perpetuum mobile* na oscilação natural dos corpos seria candidato para interações secundárias que manifestam dissonância na harmonização de sua ondulatória. Um fundamento mais refinado: campo próximo, campo distante pelo seu desacoplamento harmônico. Ainda que não falem hipóteses para um mecanismo, o foco do presente restringe-se à constatação e mensuração do fenômeno.

¹⁹⁹Movimento relativístico entre dois corpos exclui o terceiro. Triangulação entre métricas não é direta.

6.3.3 Modelo Extra-Hiperboloide

No espaço-tempo de Minkowski, as variáveis do movimento podem ser representadas em unidades naturais, com isso, funcionalmente mapeáveis em unidades hiperbólicas. Seguindo a assinatura $(-, +, +, +)$ e considerando apenas uma das direções espaciais, a identidade hiperbólica sobre a hipérbole unitária:

$$-1 = \cosh^2(u) \begin{bmatrix} 1 \\ \tanh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tanh(u) \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

Segue dessa identidade, aqui denominada primeira identidade hiperbólica, a equivalência ao invariante de velocidade em unidade natural por correspondência paramétrica ao ângulo hiperbólico.

$$\beta_0 = \tanh(u) \quad (6.78a)$$

$$\gamma = \cosh(u) \quad (6.78b)$$

$$\beta_1 = \tanh(u) \quad (6.78c)$$

$$\gamma\beta_1 = \sinh(u) \quad (6.78d)$$

O argumento funcional, ângulo hiperbólico, faz correspondência pela equivalência parâmetro funcional ao Doppler relativístico longitudinal.

$$u(z) = \arctan(\beta) = \ln \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right) = \ln \left(\frac{f_s}{f_r} \right) \quad (6.79)$$

O deslocamento de frequência devido ao Doppler relativístico longitudinal permite aferir a velocidade por uma frequência de emissão conhecida $z = f_s/f_r$.

$$\beta_1 = \tanh[\ln(z)] = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad (6.80)$$

Por essa expressão:

$$(z = 1) \implies (\beta_1 = 0) \quad (6.81a)$$

$$(z \rightarrow 0) \implies (\beta_1 \rightarrow -1) \quad (6.81b)$$

No contexto da relatividade restrita, diversas variantes de modelos de movimento hiperbólico foram propostas no estudo de referenciais acelerados. Entre eles, o destaque vai para Rindler[90], aqui entendido no surgimento de um horizonte por condições do gradiente de velocidade; e Born[5], pela condição de continuidade do espaço próprio.

Nesses modelos, assim como na métrica holonômica, a aplicação é cinemática e a abordagem é feita por coordenadas. Consequentemente, a forma bilinear não possui a unimodularidade para compor uma métrica normalizada, além do exposto X.

Por outro lado, a abordagem normalizada de aceleração por existência e continuidade da rotação hiperbólica, vista em 3.2.2, requer um escalar de curvatura não nulo, visto em 3.2. A parte crítica é mapear um espaço em variáveis

espaciais e sua continuidade. Visto na sec. 4.4.3, a normalidade métrica é um imperativo categórico topológico; cabe a escolha de uma representação capaz de satisfazê-la.

Uma segunda composição de identidades hiperbólicas, ou forma extra, satisfaz invariante de rotação hiperbólica entre as componentes temporal e espaciais do tensor velocidade.

$$1 = \cosh^2(u) \begin{bmatrix} 1 \\ \tanh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tanh^2(u) & 0 \\ 0 & \coth^2(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tanh(u) \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

Duas novas variáveis sistêmicas, em acréscimo à (6.78a), são introduzidas pelo tensor métrico.

$$g^{00} = -\tanh^2(u) \quad (6.83a)$$

$$g^{11} = \coth^2(u) \quad 200 \quad (6.83b)$$

$$\beta^1 = \coth(u) \quad (6.83c)$$

Do exposto anteriormente, o deslocamento de frequências é promovido pelo efeito da velocidade. Porém, o mesmo efeito também é obtido pela métrica. Cabe ressaltar que, diferente dos casos relativísticos anteriores, o resultado não é obtido na combinação por superposição: ou se considera um, ou outro.

Dado o contexto, torna-se oportuno formalizar a origem da métrica de distribuição dinâmica da matéria. Pela admissibilidade, conjectura-se que tenha por base a dissonância harmônica no comportamento ondulatório individual de cada corpo material relativo à perda de acoplamento pela latência em campo distante que, por efeito coletivo, emerge em recessão. Os corpos tornam-se energeticamente distantes uns dos outros. Pela qualidade métrica de distorcer o espaço, o aumento da energia necessária para alcançar outro se manifesta com a distância. De outra maneira, uma perda de energia, em que não há uma forma convencional de emissão, a dissipação é entropica pela energia da organização do espaço.

O importante na explanação está no entendimento que não há um campo de velocidade convencional, como ocorreria em um fluido estacionário. A ausência de vinculação também pode ser explicada, como efeito estatístico da distribuição dinâmica.

A descrição inicial possui uma ambiguidade interessante: ou a frequência é equacionada por Doppler, como seria no espaço plano, portanto dependente da velocidade; ou a modulação ocorre ao longo da curvatura temporal do espaço, portanto dependente da posição. A despeito da dualidade, ambas as formas são proveitosas em expressões.

O ângulo hiperbólico da métrica é elaborado para formulação de coordenada espacial por onda evanescente. Segue de (6.53), as frequências de emissão $\omega_s = 2\pi f_s$ e absorção $\omega_r = 2\pi f_r$ são relacionadas por:

$$\omega_r = -c\partial_r \exp(-\omega_s r/c) \quad (6.84)$$

²⁰⁰O uso de covariantes (β_0 ; β_1), no lugar das contravariantes (β^0 ; β^1), especifica medidas em “verdadeira grandeza” por congruência com unidades utilizadas pelo observador.

Fazendo $-u = -\omega_* r/c$, e tomando que $-u(z) = \ln(z) = \operatorname{arctanh}(\sqrt{-g_{00}})$, tem-se:

$$\frac{\omega_r}{\omega_s} = \exp(-\omega_s r/c) = \exp(-u) \quad (6.85)$$

$$\exp(-\omega_* r/c) = \exp(-u) \quad (6.86)$$

Em uma inspeção inicial, a especificidade da frequência não é necessária, somente o decaimento. Todas as frequências decaem à mesma taxa, não havendo, portanto, frequência preferencial. Assim como a aceleração independe de massa acelerada, há uma regra de proporcionalidade. Portanto, essa frequência obtida pela métrica, embora coincida com o fator de deslocamento do Doppler por velocidade, não se trata de uma frequência extrínseca como a da emissão cinemática, mas de uma frequência intrínseca, como nos casos em que expressão é proposta.

A variável espacial satisfaz a continuidade métrica da rotação hiperbólica do tensor velocidade pela trivialidade da dimensão espacial. Entretanto, quando se considera mais de um corpo, uma distância com origem comum no ponto central resultaria, considerando a distribuição dos corpos, no desencontro da modulação entre velocidade e posição. Sendo assim, a coordenada não é um mapeamento que unifica posições por um ponto central; trata-se da distância com relação ao horizonte relativístico. Uma medida do quanto deve ser percorrido para alcançar a posição superlumínica.

Nesse referencial, a distância é especificada com auxílio de um raio reverso r^* , medido em sentido contrário de r e a partir do ponto R_u , que marca o horizonte. Assim, $r^* = (R_u - r)$ e a variável auxiliar podem assumir valores positivos ou negativos, necessário para investigar posições superlumínicas. Nessas condições, enquanto β_1 e velocidade por coordenada, $r = c\tau$ é medida em espaço próprio. Nos parâmetros sistêmicos, observa-se o quadro geral:

$$(z \rightarrow 1; \beta_1 = 0_1) \quad \implies \quad (u \rightarrow 0; g^{00} \rightarrow 0^{00}; r = 0) \quad (6.87a)$$

$$(z \rightarrow 0; \beta_1 = 1_1) \quad \implies \quad (u \rightarrow \infty; -g^{00} \rightarrow 1^{00}; r = \infty) \quad (6.87b)$$

As velocidades podem ser expressas por sua dependência temporal $r = c\tau$. Assim, $\gamma(\dot{x}_0; \dot{x}_1)$.

$$\gamma c_0 = c \cosh\left(\frac{\omega_*}{c} c\tau\right) \delta_0 \quad (6.88a)$$

$$\gamma v_1 = c \sinh\left(\frac{\omega_*}{c} c\tau\right) \delta_1 \quad (6.88b)$$

A integral de $dx_\mu/d\tau = \gamma v_\mu$ fornece as variáveis coordenadas $(x_0; x_1)$.

$$ct_0 = \frac{1}{\omega_*/c} \sinh\left(\frac{\omega_*}{c} c\tau\right) \delta_0 \quad (6.89a)$$

$$x_1 = \frac{1}{\omega_*/c} \cosh\left(\frac{\omega_*}{c} c\tau\right) \delta_1 \quad (6.89b)$$

O cálculo involuto do parâmetro métrico é: ²⁰¹

$$\begin{aligned} t &= \int dt = \int \frac{1}{\sqrt{-g_{00}\delta^{00}}} d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega_*} \ln \left| \cosh \left(\frac{\omega_*}{c} \tau \right) \right| + C_1 \approx t + C_1 \end{aligned} \quad 202 \quad (6.90)$$

O tempo involuto, sub-múltiplo de $1/\omega_*$, é ligeiramente menor que o tempo paramétrico, resultando em uma velocidade maior. Com o efeito dessa aberração involuta, a posição estará deslocada com relação ao que se apresenta parametricamente, e a defasagem pode ser entendida como uma certa *incerteza*. O espaço curvo é “acelerado”, em que a falta de linearidade impede o uso da transformação de Lorentz.

A expressão apresenta a latência do tempo, a transformação do tempo que ocorre no intervalo de tempo que se desloca. O significado físico é mais facilmente compreendido quando expresso no domínio da frequência. O andamento do tempo, contagem de ciclo de uma frequência, deve estar em sincronia com a frequência temporal da posição métrica; de outra forma, haveria perda de simultaneidade. A defasagem temporal é salientada no cálculo pela ausência de métrica, em que se teria $t(f) = \int dt = \int d(1/f)$.

Com isso, x será sub-múltiplo do comprimento c/ω_* .

$$x = \frac{c}{\omega_*} \ln \left| \cosh \left(\frac{\omega_*}{c} c\tau \right) \right| + C_1 \approx ct + C_1 \quad (6.91)$$

A aproximação das expressões de x e t involutos para uma reta identidade é tanto melhor quanto maior for o tempo próprio, simplificando a inspeção em longas distâncias. Como a razão entre eles não se modifica, não há a moderação métrica de velocidade observada na razão homóloga entre as variáveis de (6.89a). O efeito de aberração involuta da velocidade cinemática pelo acoplamento temporal da métrica é mais prevalente em “campo distante” cumulativamente do que em “campo próximo”, afetando a medida do deslocamento z .

A especificidade da frequência é resolvida na substituição $H = \omega_*$ para o parâmetro de Hubble. A relação com a velocidade na posição métrica é obtida na substituição $c = v^k/\beta^k$. A expressão da posição involuta torna-se:

$$x = \frac{1}{H} v^k \ln \left[2 \cosh \left(\frac{Hr}{c} \right) \right] \tanh \left(\frac{Hr}{c} \right) \delta_k \quad (6.92)$$

A aberração na velocidade é posta em evidência ao isolar a velocidade na expressão:

$$v_k \cong \frac{Hx}{\ln \left[2 \cosh \left(\frac{Hr}{c} \right) \right]} \approx c \tanh \left(\frac{\omega_*}{c} c\tau \right) \quad (6.93)$$

²⁰¹Involução de r no parâmetro funcional $g_{\mu\nu}(r)$ com relação à sua integral $r = c \int dt$, dada em (4.84). Também é associado à defasagem posição-momento. Ver texto que remete à nota 97, e também sec. 4.4.5 e sec. 4.4.6.

²⁰²Uma boa aproximação para x grande: $x \approx \ln |\cosh(x)| + \ln(2)$, ou seja, uma boa substituição é $C_1 = x_0 + \ln(2)$.

Reformular a congruência das velocidades $\delta_k v^k(x, r) = v(x)$ para a definição de um campo de velocidades resulta na lei de Hubble.

$$x = \frac{1}{H} v(x) \quad (6.94)$$

Nessa forma, tomando que o tempo é infinito por (5.43), não possui restrição de velocidade. O significado físico da velocidade superlumínica é a perda da causalidade; com isso, deixa de ser equacionável pelo tensor normalizado. A delimitação natural de um volume de controle para (4.164) também encontra concordância com o horizonte de espaço 5.1.2 e a janela de tempo 5.3. Ainda que espaço e tempo não sejam finitos, o alcance da causalidade promovida pela métrica o é. Uma representação superlumínica apropriada será obtida no mapeamento por coordenadas e horizonte de Rinder.

Em consequência dos pressupostos apresentados, deve-se esperar uma variabilidade nas medidas do mapeamento pela interação de três fatores: o primeiro, as coordenadas são tomadas por referência à distância da superlumínica, o raio reverso. Segundo, segue uma lei de distribuição dinâmica, não um campo de velocidades rígido. Por fim, tem por base o deslocamento Doppler longitudinal. Ainda que o modelo ignore a velocidade peculiar, o efeito pode estar presente pela interação com corpos da vizinidade ou algum evento passado.

$$\frac{f_s}{f_r} = \gamma(1 + \beta \cos \theta_r) \quad (6.95)$$

Os valores atuais para a constante de Hubble variam de acordo com a técnica apropriada à população amostral. A medição “primordial”, pela radiação cósmica de fundo com referência indireta na regressão pelo modelo preditivo da taxa de expansão, fornece um valor para $H = 67.4 \pm 0.5$ (km/s)/Mpc, cerca de $2.184 \pm 0.016 \times 10^{-18}$ (1/s) em unidade do sistema internacional. (Missão planck). A medição de campo “tardio”, medida direta extrapolada da escada cósmica por escala de distâncias extragaláticas, fornece um valor de $H = 74.03 \pm 1,42$ (km/s)/Mpc, cerca de $2.3991 \pm 0.04602 \times 10^{-18}$ (1/s) no sistema internacional de unidades. (JWST)

Por coincidência numérica, um valor de referência rápida para a medida no SI pode ser dado por:

$$\frac{\log(\varphi)}{299792458^2} = 2.3253 \times 10^{-18} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (6.96)$$

O valor é intermediário entre as duas categorias de medição e, nas unidades convencionalmente adotadas na medição, é 71.7512 (km/s)/Mpc. Reiterando que o valor não deriva de qualquer expressão, um outro valor próximo, seguindo a mesma heurística, seria $\ln(\varphi)/(2c^2) = 2.6771$ resultando 82.6067 (km/s)/Mpc. Em ambos os casos, as unidades dimensionais são incompatíveis com o experimento observacional.

Métrica normalizada não varia intrinsecamente no tempo; extrinsecamente trata do transporte dos corpos. Nesse caso, porém, o transporte decorre no tempo e afeta todos, o que, por codeterminação, redefine a métrica. Apesar

disso, o contraditório vem de 5.1.2, com o modelo evolutivo de Onsager não abordando evolução para além da tendência de “arranque”. Uma concepção de evolução viria por autossimilaridade, em que uma escala característica, por ser uma taxa de evolução invariante, permitiria retroceder ou progredir nas macro-variáveis do sistema.

6.3.4 Coordenadas e Horizonte de Rindler

A adaptação das coordenadas de Rindler sistematiza as linhas-universo de referenciais acelerados de tal feito que concordem com o mesmo horizonte.

Considera-se, por analogia, a perspectiva de acompanhar a linha-universo $(\tilde{ct}, \tilde{x})$ de observadores em seu movimento “acelerado”. Ainda que o movimento não gere aceleração intrínseca (não-inercial), extrinsecamente o sistema de coordenadas móveis não possui velocidade constante, e os formalismos se rendem ao mesmo de ser não-covariante.

Os referenciais movem-se com aceleração própria pela equivalência $c^2/a_\star \equiv c/\omega_\star$. Prosseguindo de (6.88a) e (6.89a), *mutatis mutandis*, as coordenadas de posição generalizada $\tilde{x}$ e coordenada de tempo generalizada $\tilde{t}$ descrevem a perspectiva de um observador sob aceleração constante $a_\star$. A condição de movimento faz surgir um horizonte de Rindler em R_u para cada observador $\tilde{t}$. Admitindo que:

$$\tilde{ct} = \frac{1}{\omega/c} \operatorname{arctanh} \left(\frac{ct}{x} \right) \quad (6.97a)$$

$$\tilde{x} = \sqrt{x^2 - c^2 t^2} \quad (6.97b)$$

O tempo $\tilde{t}$ denota a linha de simultaneidade do observador móvel.²⁰³ O domínio da função de arco hiperbólico limita a velocidade. Linha-universo $\tilde{x}$, por (6.97b), é a distância própria (pela origem), considerando a aceleração e o tempo (dilatado pela métrica/aceleração da linha-mundo), enquanto o tempo próprio é expresso por $\tau = (\tilde{x}a_\star/c^2)\tilde{t}$.

O referencial $(\tilde{ct}, \tilde{x})$ é acelerado; assim como não é possível transformação de Lorentz na transformação anterior, o mesmo acontece na inversa. A transformação é obtida de (6.89a), na substituição $\tilde{x} = c/H$.

$$ct = \tilde{x} \sinh \left(\frac{H}{c} \tilde{ct} \right) \quad (6.98a)$$

$$x = \tilde{x} \cosh \left(\frac{H}{c} \tilde{ct} \right) \quad (6.98b)$$

Prosseguindo de (6.97b), a substituição de $x = ct + x_0$ é obtida por (6.91). Com isso, a posição do referencial móvel em dependência à sua linha de simultaneidade temporal torna-se:

$$\tilde{x}^2 = x^2 - (ct)^2 = (ct - x_0)^2 - (ct)^2 \implies \tilde{x} = x_0 \exp \left(\frac{H}{c} \tilde{ct} \right) \quad (6.99)$$

²⁰³Distâncias $\tilde{x}$ pela unidade de medida dos observadores acelerados que compartilham o mesmo horizonte de Rindler. Tempo $\tilde{t}$ pela linha de simultaneidade para o respectivo observador.

A velocidade nas unidades de espaço e tempo do referencial móvel é:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = c \frac{x_0}{R_u} \exp\left(\frac{a_\star}{c^2} c\tilde{t}\right) \quad (6.100)$$

A condição superlumínica é obtida de duas maneiras. Dependendo da escolha de x_0 , o referencial já desenvolve a velocidade em excesso. No caso contrário, ainda assim a velocidade cresce indefinidamente; em algum instante irá superar o marco relativístico.

As transformações entre sistemas de coordenadas ilustram a interpretação de covariância apresentada na sec. 2.8. O fato de as transformações, tanto temporalmente entre (6.97a) e (6.98a) quanto espacialmente entre (6.97b) e (6.98b), não serem lineares correlaciona-se com o fato de serem não-covariantes diante da preservação de normalidade na forma $h_{\mu\nu} = J_\mu^m J_\nu^n g_{mn}$. Embora a expressão de energia não seja conhecida, o efeito na forma de aceleração o é, e o processo é conhecido pela descrição ganho energético presumido da aceleração.

A aceleração em si segue o transvio geodésico 4.33, embora a variação de energia não se converta em emissão/absorção propriamente dita. Esse desbalanço encontra explicação na autopropagação da onda métrica da sec. 6.2, se considerar que os corpos conservam energia por uma onda estacionária refletida entre eles em “campo próximo”, e que em “campo distante” o tempo de propagação inviabiliza o laço de estímulo-resposta entre as interações até desvanecer por completo na alienação da causalidade. Porém, devido à natureza particular da explanação, não se demonstra como a distribuição de matéria que motiva o desenvolvimento contribui no mecanismo ondulatório dessa interferência destrutiva para além do que já é expresso na indução da métrica de estado.

6.3.5 Grupo Extra-Hiperboloide

O modelo extra-hiperboloide, apesar de ser um grupo, não é contemplado pela sec. 6.2.3. A seção traz o encaminhamento desse adicional pela forma exponencial.

Dadas as identidades:

$$\ln |\tanh(ax/2)| = -\operatorname{arccoth}(\cosh(ax)) = -\operatorname{arctanh}(\operatorname{sech}(ax)) \quad (6.101a)$$

$$\ln |\tanh(ax/2)| = -\ln |\coth(ax/2)| \quad (6.101b)$$

$$\ln |\coth(ax/2)| = \operatorname{arccoth}(\cosh(ax)) = \operatorname{arctanh}(\operatorname{sech}(ax)) \quad (6.101c)$$

Torna-se adequado substituir as componentes métricas de (6.82) pelas expressões:

$$-\tanh^2(z) = e^{-i\pi} \exp(-2 \operatorname{arctanh}(\operatorname{sech}(2z))) \quad (6.102a)$$

$$\coth^2(z) = e^{-2i\pi} \exp(2 \operatorname{arccoth}(\cosh(2z))) \quad (6.102b)$$

Chega-se ao mapa exponencial homólogo a (6.48):

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \exp[-2 \operatorname{arctanh}(\operatorname{sech}(2z)) - i\pi] & 0 \\ 0 & \exp[2 \operatorname{arccoth}(\cosh(2z)) - 2i\pi] \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

7 Considerações Finais

A exposição apresenta o tensor métrico normalizado como um formalismo geral para interações elementares. A forma comum é obtida na complementação, ao metrificar as interações eletrodinâmicas de partículas elementares e por representar propriedades ondulatórias gravitacionais.

Em síntese, o desenvolvimento é estruturado na apresentação e na gradação de assuntos inter-relacionados. Inicia pela especificação do formalismo tensorial, abordando desde os rudimentos-base coordenada até a formulação de conexões calculo necessários na resolução da continuidade por torção; em seguida, no enquadramento de uma mecanismo dissipativa e com efeitos anisotrópicos, trata da consolidação do espaço pela condição de continuidade da rotação hiperbólica. Também envolve efeitos dinâmicos, aberração, anomalias e natureza ondulatória devido à simultaneidade de eventos. Prossegue-se com a síntese da curvatura pela inter-relação entre os fenômenos na análise dos mecanismos causa e efeito. A conciliação conceitual é obtida ao recepcionar a mecânica vigente pela admissão de novos processos. A consolidação é encaminhada na produção de representação de métrica diversas.

Natureza comum do espaço é possibilitada pela resolução da continuidade diante da torção, o que é proporcionado na elevação da abstração ao categórico topológico. A intensidade dinâmica de modificação do espaço-tempo determina se o parâmetro predominante na interação será o espaço ou o tempo. Ambas as categorias topológicas, geometrizável ou ondulatória, têm em comum o imperativo de satisfazer o invariante de velocidade.

A métrica normalizada propõe um refinamento teórico que endossa as teorias experimentalmente comprovadas, ainda que não o faça sem descartar interpretações teóricas vigentes. Abrange um espectro de fenômenos e processos da escala atômica à cosmológica.

7.1 Síntese Conceitual

Ao longo do texto, introduzem-se implicitamente conceitos em proveito da denominação convencionalmente estabelecida para a forma. Um enquadramento apropriado expõe como todos estão inter-relacionados na coesão sistêmica. Em tempo, apresenta-se a síntese desse quadro sistêmico.

Métrica normalizada é uma forma bilinear cinemática, um operador diádico para representação pontual dos corpos. Em uma leitura simples, tem função homóloga ao operador quântico de momento $(m^{-1}\hat{\mathbf{p}})^2$, mas sobre operandos diferentes na composição da operação entre dois elementos. Corresponde a uma operação de evolução hiperbólica do espaço de momento em uma representação espacial do corpo.

Unitariamente, opera sobre a velocidade em coordenada espacial v^μ , mapeando para a coordenada cinética local v_μ , passando da intensidade coordenada para a intensidade real por um fator de calibre do espaço-tempo, pelo ajuste de calibre, dilatação temporal e contração espacial. O fator gama aplica efeito cinemático e a velocidade da luz é obtida pela média geométrica $c^2 = \gamma^2 V^\mu V_\mu$.

O caráter normalizado indica que opera intrinsecamente, em contraste com a extrinsecidade da holonomia. Estabelece a escala de velocidade que deverá ser satisfeita por uma representação do espaço. Além do acoplamento métrico, espaço como estrutura organizadora da matéria surge da continuidade e conexão

observadas no tensor de curvatura, quando na função descritor do espaço topológico acompanhado do tensor- energia. Os símbolos de Christoffel relacionam-se à anisotropia que a métrica introduz no espaço da velocidade.

A normalidade manifesta reações induzidas pela métrica, ou equacionamento derivado dela, para preservação da continuidade do invariante de rotação hiperbólica. Moderação da intensidade por γ_r , moderação da direção por vis-redux. Em condições extremas, torna-se dissipativo, quer por processo de emissão, quando na iminência do excesso de energia comportada para o invariante; quer na expansão entrópica do espaço pela desconexão de ação desprovida de reação.

Covariância, na forma normalizada, é a transformação entre condições energéticas bem definidas. A mudança de estado inercial é acompanhada da evolução energética oriunda da força de reação mediante emissão/absorção. Não é esperado que se conheça transformação covariante por motivação puramente coordenada sem que se conheça a transformação de energia envolvida no processo.

Dinâmica oscilatória é evidenciada na ressonância entre corpos. A formulação relativística como um todo é apropriada ao equacionamento de onda. Uma distinção qualitativa entre os tipos de onda que se superpõem é necessária. Onda basal de acoplamento, atração entre os corpos. Constitui o estado vibracional permanente por emissão corpórea em ressonância com a vizinhança. Em conjunto, flutuações basais são estocásticas e constituem o estado fundamental do espaço-tempo. Ondas de amplitude orbital são perturbações métricas transientes de amplitude coerente. Uma terceira qualidade: ondas métricas de acoplamento ressonante em que uma componente radiante vibracional efetivamente se desacopla da fonte, por desarmonia com o transiente, para realizar o transporte radiante de energia. Esta última corresponde ao excesso liberado na preservação do invariante hiperbólico.

As diversas partes cooperam entre si na preservação do invariante de velocidade.

7.2 Recapitulação

Seguindo a proposta de que coordenadas não devem possuir significado físico, a sec. 2 faz considerações sobre as consequências cinemáticas do movimento da base, resultando na eliminação de dependências implícitas de simetrias holonômicas no acoplamento entre base e variáveis paramétricas.

Restrições holonômicas empregam simetria na simplificação de forças reduzíveis por variáveis circulares, sec. 2.1. Embora proveitoso em forças mapeáveis por posição, forças dependentes da velocidade devem atentar a condições relativísticas. Entre as peculiaridades que cada simetria introduz, sistema esférico, sec. 2.2 é de interesse da simetria central.

Parametrização na representação da mobilidade da base também possui relação com a linearidade das transformações na configuração de variáveis que formatam as simetrias, 2.3.

Para uma base com independência paramétrica, é necessária a separação entre os efeitos paramétricos autorreferenciais na mobilidade da base (implícitos) e a representação por identidades de operações vetoriais. Obtém-se base por transformação ortogonal, 2.3.1 e 2.3.2. Essa base normalizada possui velocidade com homogeneidade dimensional e transformações lineares 2.3.3. Nesse sistema, a velocidade é expressa por **coordenadas isométricas** 2.4.

Uma vez que as expressões da velocidade e da base estejam determinadas, é possível escrever o invariante de Lorentz com o tensor métrico dado pela forma bilinear da base.

A definição métrica é consequente em como a curvatura intrínseca do espaço-tempo irá se manifestar. Espacialmente, a atração por uma resultante direcional é coerente com uma única direção espacial e, junto a essa restrição, a normalidade métrica é resolvida por uma componente de variação temporal. Na sec. 2.5: caracterização em duas curvaturas principais, símbolos de Christoffel e formulação funcional da métrica. particularidade métrica não varia intrinsecamente no tempo.

O cálculo tensorial exige uma derivada direcional que preserve a covariância das expressões. Sec. 2.6 apresenta derivada covariante-paramétrica capaz de representar o isomorfismo na mobilidade da base, resolvendo as questões de dependência paramétrica por transformação ortonormal.

Obtenção da geodésica pela expansão da derivada covariante na métrica normalizada, sec.2.7.1, explora o acoplamento entre os termos espaciais e temporais; essa complementariedade é explorada na simplificação da equação geodésica. A sec. 2.7.1 apresenta a decomposição da equação geodésica e reagrupamento de termos pelas relações funcionais implícitas pela apresentação do elemento de volume e cruzamento no jogo de índices.

A sec. 2.7.2 trata do acoplamento temporal, uma vez que a métrica não varia intrinsecamente no tempo e sua variação extrínseca pela derivada covariante. Nessa abordagem, a extrinsicalidade do tempo torna-se uma questão sistêmica e de simultaneidade. A conformidade do transporte paralelo e ortogonalidade tensorial invariante de velocidade do novo operador é analisada na sec. 2.7.3, pela formulação mecânica da expressão de Euler-Lagrange na perspectiva da derivada covariante temporal.

Prosseguindo na simplificação geodésica, a sec. 2.7.4 propõe a substituição de símbolos por expressões de significado mecânico que explorem as peculiaridades da direção cardinal espacial.

A definição de ortogonalidade e sua continuidade no transporte paralelo, na 2.7.5, estabelece critério para o balanceamento direcional e equacionamento entre os termos, permitindo a reformulação, na sec. 2.7.6, da resultante geodésica que faz explícita a distinção entre os efeitos intrínsecos à posição e aqueles induzidos pela velocidade, tanto em direção quanto em magnitude.

Em síntese da base normalizada, a sec. 2.8 faz a ponderação sobre significados e transformações, que não se limita a coordenadas e é mais relevante quando correlata a variações energéticas, enquanto a sec. 2.9 arremata ortonormalidade de transformações isométricas e peculiaridade covariante do símbolo de Christoffel. Conciliação de Covariância e Energia com a base móvel e Ortonormalidade.

A proposição de covariância da base normalizada é posta em prática ao longo da sec. 3 pela demonstração de covariância na transformação entre sistemas de coordenadas, o que é obtido por representação por identidades de operações tensoriais. O critério é revelador, e a resolução preliminar da sec. 3.1 pelo reagrupamento de índices expõe conflito entre simetria e comutação.

A resolução do impasse inicia-se na formulação de critério da sec. 3.2 pela proposição de uma dinâmica hiperbólica e sua formulação a partir de instantâneos da métrica de Minkowski. Além disso, ao longo da transformação cartesiana e condizente com o equacionamento, é apresentada mudança de conceitual:

base atende à isometria cinemática da rotação hiperbólica e concordância com a invariância do volume espaço-tempo.

A decomposição em da base operações de projeção e rejeição complementares à identidade é apresentada na sec. 3.2.1. Nessa segunda decomposição da base, há necessidade de reformulação das operações e da reconstituição da transformação de Lorentz pela identidade das operações de projeção e rejeição da sec. 3.2.1 é caracterizada por rotação hiperbólica entre as direções cardinais, operando a contração espacial da diretriz em contraparte à dilatação temporal.

A sec. 3.2.3, estabelece que o critério de preservação da isometria do elemento de volume espaço-tempo é satisfeito na proposição de um novo operador de produto interno e que atenda à resolução do conflito de simetrias. A sec. 3.2.4 apresenta a forma cartesiana do tensor normalizado e concilia sua característica métrica como operador bilinear de grupo contínuo.

A sec. 3.3 confronta as transformações ortonormais de coordenadas isométricas com a aplicação mecânica, o que aponta a necessidade de novos critérios de continuidade coordenada para a nova formulação. A sec. 3.4 elabora sobre especificidades dos símbolos de Christoffel na forma normalizada e sua decomposição em operações espaciais, bem como o significado mecânico anisotrópico de desvio intrínseco induzido pela velocidade.

O desenvolvimento prévio apresenta solução à transformação entre sistemas de coordenadas, mas a abordagem inesperada deixa em aberto a consistência das representações que se possam fazer por ela. A sec. 4 investiga conexão e continuidade da proposta normalizada, e expõe consequências mecânicas diretas e sistêmicas da estrutura do espaço-tempo. A premissa principal é a mudança categórica da natureza intrínseca que fundamenta o tensor métrico. A seção inicia-se pela contextualização e definições preliminares, e segmenta-se ao final na elaboração de curvatura 4.4, sua ação 4.5 e a resolução de torção 4.6.

Conceitualmente, o principal diferencial da proposta normalizada é esquivar-se da holonomia desde a definição da base. No desenvolvimento histórico, a sistematização mecânica fundamenta-se geometricamente em propriedades intrínsecas do espaço, o que é brevemente visto em 4.1. Em proveito desse valioso legado, é necessário reformular as definições intrínsecas, evitando-se holonomia.

Representação holonômica possui limitações incontornáveis na representação intrínseca por coordenada. Simetrias e escolha do sistema de coordenadas inadvertidamente introduzem holonomia, dada a necessidade de simetria e comutação do respectivo discriminante, exposto em 4.2.1. Por outro lado, velocidade relativística deve ser independente do espaço e, ainda que implícito, holonômica introduz essa dependência. A sec. 4.2.2 cogita as questões inerentes à manipulação simbólica, e a sec. 4.2.3 estuda a conveniência de promover a variável cinemática: trocam-se três problemas (dependência, falta de homogeneidade dimensional e isometria) por um único, continuidade.

A sec. 4.3 formula continuidade pela variável cinemática no modelo de rotação hiperbólica. A representação por transporte paralelo no espaço coordenado, o caminho de equilíbrio inercial, é expandida para abranger o transvio com referência ao mesmo equilíbrio inercial. As duas questões do cálculo tensorial resultam na formulação do tensor de curvatura. Compatibilidade, na sec. 4.3.1, versa sobre manipulação simbólica no transporte paralelo pela operação diferencial do cálculo analítico.

Sec. 4.3.2 aprofunda-se no significado mecânico de continuidade em deslocamentos mecânicos conservativo e não-conservativo. A previsão de emissão,

reação induzida por desvio e rebalanceamento são resultantes das fórmulas de balanço e dissipação dadas nos critérios de ortogonalidade do transporte paralelo e quantificação do deslocamento mecânico das condições de movimento.

A sec. 4.4 sintetiza as relações de balanço energético em um discriminante de continuidade por variações de segunda ordem das relações hiperbólicas. A sec. 4.4.1 trata da conjugação da recíproca entre espaço e tempo em variações de ordem superior consolidadas na sec. 4.4.2 com o desenvolvimento tensorial para um escalar representativo da continuidade. A previsão de propagação e autotransporte, bem como emissão no desvio geodésico, são elementos decorrentes dessa definição de curvatura e de sua ação.

As sub-seções seguintes buscam resolução da representação no espaço. A sec. 4.4.3 discorre sobre continuidade no espaço coordenado e escolha topológica sob análise funcional. O mapeamento faz contingência sobre anomalias, aberrações e necessidade de delimitação de variáveis de contorno do espaço. Também apresentam-se elaborações de formalismos tensoriais. A sec. 4.4.4 referenciais canônicos para resolução do equacionamento geodésico no espaço em caso extremo de atração de simetria central. Equilíbrio de dois corpos é analisado na sec. 4.4.5. A manifestação de aberrações e anomalias é acompanhada de auto-oscilação. A sistematização da complexidade dinâmica é obtida por formulação ondulatória pelos referenciais canônicos e frequência natural. Segue, conseqüentemente, a necessidade de distinção e identificação de elementos materiais e imateriais na composição sistêmica. A sec. 4.4.6 discorre sobre significado mecânico e interpretações pela dinâmica ondulatória. A representação pontual é projeção de um ponto de contato da resultante observável pelo acoplamento ondulatório intrínseco.

O aprofundamento do comportamento imaterial, propagação e autotransporte culmina na revisão dos precedentes históricos da sec. 4.5. A sec. 4.5.1 elabora sobre as peculiaridades da autopropagação imaterial, com destaque na velocidade constante, portanto aceleração nula, e variação de energia mesmo na ausência de força pela dependência da frequência.

A codeterminação sistêmica entre material e imaterial em um sistema de partículas é vista na sec. 4.5.2 em quatro segmentos, o primeiro que descreve a parte material como resultante da atração propagada de uma organização sistêmica estacionária. A parte imaterial, segundo segmento, estabelece em equivalência à primeira por externalização por representação pontual da resultante de massa, em representação reduzida. O terceiro segmento aprofunda na composição interna da distribuição de massa em equilíbrio de um sistema de partículas. O quarto segmento, delimitação do contorno, significado físico da representação.

A proposição de uma natureza comum no acoplamento ondulatório métrico e generalidade de onda independente da natureza é apresentada na sec. 4.5.3. Postula-se que a compositividade de resultante por superposição ondulatória é demonstrável em sistema de partículas até o fundamental elementar trazido na fórmula de Rydberg.

O formalismo da ação de Hilbert para normalidade e sua interpretação como propagação imaterial em velocidade constante é visto em 4.5.4, seguido da formulação energética para o corpo material, em 4.5.5, seguido de uma breve argumentação sobre simetria e conservação.

A quarta seção finaliza em 4.6 com a resolução de torção na representação da continuidade cartesiana holonômica. Torção é uma característica da representação holonômica, e a demonstração consiste no reverso do desenvolvimento

precedente. Em 4.6.1, evidencia-se a arbitrariedade na escolha da representação e conformidade do elemento de linha com respeito à indefinição do diferencial no limite. A sec. 4.6.2 ressalta como superfícies orientadas evitam ambiguidade (e anisotropia) e a conformidade do operador de segunda ordem na representação explícita por imaginários e operabilidade de propriedades intrínsecas de superfícies. A sec. 4.6.3 apresenta uma proposta de representação cartesiana holonômica.

A sec. 5 apresenta elementos sistêmicos consequentes do fundamento normalizado; na sec. 5.1, pondera sobre como o condicionante de rotação hiperbólica estabelece, mesmo diante da arbitrariedade na escolha da representação, convergência sistêmica. A regularidade, independentemente de parâmetros externos, é consequência da condição de estabilidade intrínseca. Em 5.1.1, correlaciona cardinalidade de dimensões e direções orientadas com natureza relacional na distinção de corpos de uma distribuição por um critério de ortogonalidade. A sec. 5.1.2 elabora sobre estrutura do espaço-tempo por auto-organização e codeterminação e suas limitações tangíveis ao modelo evolutivo em um sistema de partículas.

A métrica normalizada presume inércia intrínseca na continuidade da rotação hiperbólica, mas deixa omissa a condição basal em que ocorra na ausência de massa. A sec. 5.2 trata da metrificação de condições de neutralidade mecânica. O significado mecânico (ou falta dele) é apresentado na sec. 5.2.1. A sec. 5.2.2 analisa a ausência de propriedades intrínsecas do vácuo, a importação pelo transporte e externalização nesse meio solenoidal. A sec. 5.2.3 propõe a composição do panorama cosmológico que concilie a propriedade intrínseca com referenciais inerciais extrínsecos.

Tempo é um parâmetro extrínseco na métrica normalizada, e a sec. 5.3 analisa sua externalidade e conclui na resultante que cada observador obtém da convergência sistêmica por consequência da dinâmica de codeterminação e autossimilaridade.

A sec. 6 apresenta formulações métricas por condições estruturais peculiares. A sec. 6.1 estuda o equilíbrio de uma distribuição de massa compacta assimétrica em razão da rotação. Em vez da dinâmica tensor-energia, o equilíbrio estático da deformação é diretamente metrificável. A sec. 6.1.1 contempla a forma oblata de superfícies equimétricas, deformação da simetria esférica, e a sec. 6.1.2 prossegue com a proposta de uma formulação métrica adequada ao potencial na convergência do limite newtoniano. Sec. 6.1.3 analisa o equilíbrio hidrostático e sua extrapolação à relativística.

A sec. 6.2 apresenta formulação exponencial da métrica. O tratamento ondulatório homogêneo entre o material e o imaterial adequa a dinâmica oscilatória à natureza comum, e a sec. 6.2.1 apresenta modulação de frequência de uma emissão em condição estacionária. A sec. 6.2.2 analisa autopropagação e modulação de onda métrica em razão ao seu próprio valor. A sec. 6.2.3 apresenta formalismos da generalidade ondulatória. Na sec. 6.2.4, dedução da equação de Dirac por consideração ao transporte paralelo e consequente preservação da conjugação de fase na dinâmica do processo de modulação. Na sec. 6.2.5, equação não-homogênea e a formação de curvatura em presença material pela perspectiva ondulatória.

A sec. 6.3 formula métrica para representação em condição de neutralidade em macroescala de uma distribuição. A sustentação conceitual é apresentada na sec. 6.3.1, que versa sobre efeitos emergentes da auto-organização e code-

terminação, enquanto a 6.3.2 discursa sobre mecanismos internos de natureza ondulatória.

Pressupondo a formatação métrica adequada à distribuição, a sec. 6.3.3 elabora sobre o efeito de Doppler relativístico nas condições métricas. A aberração relativística no acoplamento resulta em distâncias defasa a variáveis coordenadas de uma forma peculiar, em correspondência à Lei de Hubble. A seção se encerra com ponderação sobre a variabilidade estatística inerente ao modelo.

A propensão a condição superlumínica do movimento é analisada na sec. 6.3.4, e o mapeamento por referenciais acelerados e horizonte conclui na consequente perda da causalidade. A sec. 6.3.5 apresenta o formalismo de grupo respectivo.

7.3 Conclusão

O tensor métrico normalizado constitui-se de uma modalidade mecânica lagrangiana com extensão para dissipação. Equaciona, pelo espaço de velocidades, o invariante que uma representação do espaço de posições deve satisfazer.

Espaço-tempo possui representação distinta consoante o domínio de suas variáveis. Geometrizável no domínio do espaço, ou ondulatória no domínio do tempo.

A aplicação métrica é específica para interações fundamentais em que haja reciprocidade entre corpos que possam ser considerados pontuais e de massa constante. A forma pelo tensor energia estende-se a um sistema de partículas.

Fundamentado no balanço de momento, opera sobre equilíbrio dinâmico e a natureza dissipativa não garante a conservação. Ainda que o marco conservativo seja contingente, é base para simplificar a complexidade introduzida pelo balanço dinâmico.

O formalismo comum descreve fenômenos eletrodinâmicos de partícula, uma vez admitida a metrificação do mesmo, e fenômenos gravitacionais, uma vez admitida a natureza ondulatória dessa.

Relevância da proposta está no formalismo comum entre as duas interações expressivas da física. O proveito está no intercâmbio do mesmo fundamento observado em escalas e naturezas distintas.

A correspondência não se restringe às relações cruzadas. No equacionamento das respectivas naturezas, ainda que introduza a complexidade necessária na investigação de minúcias de mecanismos e processos, o formalismo não se afasta da correspondência com formulações convencionais, compartilhando a mesma notação.

Embora seja indiscutível a relevância do precedente histórico e de suas formulações originais, o princípio da navalha de Occam nos ensina que a proximidade da verdade costuma caminhar com a parcimônia. Ao desanuviar o modelo de camadas acessórias, a simplificação aqui adotada resgata o núcleo fundamental do fenômeno físico. Longe de ser um recuo metodológico, essa escolha valida-se por oferecer a descrição mais direta, elegante e operacional da realidade.

Por fim, ainda que surjam divergências conceituais, a compatibilização é em benefício de uma consolidação harmônica.

8 Referências

Referências

- [1] Akademie der Wissenschaften in Göttingen and Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig and Bayerische Akademie der Wissenschaften and Österreichische Akademie der Wissenschaften. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. 1–6, 1898–1933.
- [2] Aleksandr Aleksandrovich Andronov, Aleksandr Adol'fovich Vitt, and Semen Emmanuilovich Khaikin. *Theory of Oscillators*. A-W series in advanced physics. Pergamon Press, 1966.
<https://archive.org/details/a.-a.-andronov-aa.-vitt-s.-e.-khaikin-theory-of-oscillators-1966/>.
- [3] Cayley Arthur. On the theory of linear transformations. *Cambridge Mathematical Journal*, IV(XXIV):193–209, mai 1845.
doi:10.1017/CBO9780511703676.014,
RCIN 143171 (AA), (AA), (AA) S2CID 53902328, Zbl 0099.00101.
- [4] Valentin Bargmann. Relativity. *Reviews of Modern Physics*, 29(2):161, 1957.
doi:10.1103/RevModPhys.29.161,
Bibcode:1957RvMP...29..161B.
- [5] Max Born. Die theorie des starren elektrons in der kinematik des relativitätsprinzips. *Annalen der Physik*, 335(11):1–56, 1909.
doi:10.1002/andp.19093351102,
(AA), (AA), Bibcode:1909AnP...335....1B, S2CID 123059897.
- [6] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
ISBN 978-0-8176-3490-2
Zbl 0752.53001.
- [7] Manfredo Perdigão do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications, 2016.
ISBN 978-0-1321-2589-5,
Zbl 1352.53002.
- [8] Sean Michael Carroll. Lecture notes on general relativity, 1997.
doi:arXiv:gr-qc/9712019.
- [9] Sean Michael Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
ISBN 978-11-084-8839-6.
- [10] Élie Cartan. Sur certaines expressions différentielles et le problème de pfaff. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 16, pages 239–332, 1899.
doi:10.24033/asens.467.

- [11] Élie Cartan. Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. *Comptes Rendus, Académie des Sciences de Paris Paris*, 174:593–595, 1922.
JFM 48.0854.02,
BNF.Gallica (AA).
- [12] Élie Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 40:325–412, 1923.
doi:10.24033/asens.751
S2CID 118843803, EuDML 81417 .
- [13] Élie Cartan. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (Suite). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 41:1–25, 1924.
doi:10.24033/asens.753,
JFM 51.0581.01, EuDML 81425.
- [14] Elie Cartan. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 42:17–88, 1925.
doi:10.24033/asens.761
JFM 51.0582.01, EuDML 81430.
- [15] Élie Cartan. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés. *Acta mathematica*, 48(1):1–42, 1926.
doi:10.1007/BF02629755,
(AA).
- [16] Elie Cartan. La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, traitées par la méthode du repere mobile. leçons professées à la sorbonne. *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, 1951.
- [17] Jorge Cervantes-Cota, Salvador Galindo-Uribarri, and George Smoot. A brief history of gravitational waves. *Universe*, 2(3):22, September 2016.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1609.09400>.
- [18] James Michael Chappell, Azhar Iqbal, John Gideon Hartnett, and Derek Abbott. The vector algebra war: A historical perspective. *IEEE Access*, 4:1997–2004, 2016.
doi:10.48550/arXiv.1509.00501.
- [19] Elwin Bruno Christoffel. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70:46–70, 1869.
doi:10.1515/crll.1869.70.46,
EuDML 148073, JFM 02.0128.03, (AA) (AA).
- [20] William Kingdon Clifford. On the hypotheses which lie at the bases of geometry (Bernhard Riemann's inaugural lecture). *Nature*, 8(183):14–17, 1873.

- [21] William Kingdon Clifford. On the space-theory of matter. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2:157–158, 1876.
- [22] William Kingdon Clifford. Applications of grassmann’s extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, 1(4):350–358, 1878.
- [23] William Kingdon Clifford. *Elements of Dynamic: An Introduction to the Study of Motion and Rest in Solid and Fluid Bodies. Kinematic*. MacMillan and Company, 1878.
- [24] Douglas Cline. *Variational principles in classical mechanics*. University of Rochester River Campus Librarie, 2017.
- [25] Tony Crilly. The rise of cayley’s invariant theory (1841–1862). *Historia Mathematica*, 13(3):241–254, 1986.
- [26] Tony Crilly. The decline of cayley’s invariant theory (1863–1895). *Historia Mathematica*, 15(4):332–347, 1988.
- [27] Louis de Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta*. Theses, Migration - université en cours d’affectation, November 1924.
<https://theses.hal.science/tel-00006807>.
- [28] Paul Adrien Maurice Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, volume=117, number=778, pages=610–624, year=1928, publisher=The Royal Society London, note=<https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>.
- [29] A. Einstein, R. Schulmann, A.J. Kox, M. Janssen, and J. Illy. *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 8: The Berlin Years: Correspondence, 1914-1918*. The Collected Papers of Albert Einstein. Princeton University Press, 1998.
ISBN 9780691048499
(AA).
- [30] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik, IV. Folge*, 17:891–921, 1905.
doi:10.1002/andp.19053221004
JFM 36.0920.02, BNF, (AA), (AA).
- [31] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik, IV. Folge*, 49:769–822, 1916.
doi:10.1002/andp.19163540702,
JFM 46.1293.01, Bibcode:1916AnP...354..769E, (AA), (AA) (AA).
- [32] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie *Annalen der Physik*, 49. *Reprinted in English translation in The Principle of Relativity.(1952) Dover Publications Inc, New York*, 1916.
http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1916_49_769-822.pdf.

- [33] Albert Einstein. Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus. *Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 217–221, 1928.
JFM 54.0942.04, BHL (AA).
- [34] Marco Ferraris, Mauro Francaviglia, and Cesare Reina. Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 “Palatini’s method” discovered by Einstein in 1925. *General relativity and gravitation*, 14:243–254, 1982.
doi:10.1007/BF00756060,
Zbl 0541.49019.
- [35] Alexander Friedmann. Über die krümmung des raumes. *Z. Phys.*, 10:377–386, 1922.
doi:10.1007/BF01332580.
- [36] Alexander Friedmann. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 21(1):326–332, 1924.
doi:10.1007/BF01328280.
- [37] Salvador Galindo-Uribarri and Jorge Luis Cervantes-Cota. Clifford’s attempt to test his gravitation hypothesis, 2018.
doi:10.48550/arXiv.1807.09230.
- [38] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas (in Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores)*. Typis Dieterichianis, Göttingen, 1828.
- [39] Sophie Germain. Mémoire sur la courbure des surfaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 7:1–29, 1831.
doi:10.1515/crll.1831.7.1
EuDML 146720, GDZ GDZPPN002137887, ERAM: 007.0252c, (AA) .
- [40] Leonor Godinho and José Natário. *An introduction to Riemannian geometry. With applications to mechanics and relativity*. Universitext. Cham: Springer, 2014.
doi:10.1007/978-3-319-08666-8,
ISBN 978-3-319-08666-8, Zbl 1306.53001.
- [41] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical mechanics*. 3rd. Addison Wesley, 2002.
- [42] Grassmann, Hermann. *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, volume 1. O. Wigand, 1844.
<https://books.google.com/books?id=bKgAAAAAAAJ>.
- [43] Pavel Grinfeld. *Introduction to tensor analysis and the calculus of moving surfaces*. Springer, jan 2013.
doi:10.1007/978-1-4614-7867-6,
ISBN 978-1-4614-7867-6, Zbl 1300.53001.

- [44] Jacques Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton university bulletin*, pages 49–52, 1902.
- [45] William Rowan Hamilton. Ii. on Quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine*, 25(163):10–13, 1844.
- [46] William Rowan Hamilton. Lxxviii. on quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine*, 25(168):489–495, 1844.
- [47] Friedrich Wilhelm Hehl. Note on the torsion tensor. *Physics Today*, 60(3):16–16, 03 2007.
doi:10.1063/1.2718743.
- [48] Werner Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, 33(1):879–893, December 1925.
- [49] David Hilbert. Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1915:vol. 3 pp. 395–407., November 1915.
EuDML 58946, JFM 45.1111.01
- [50] David Hilbert. Die Grundlagen der Physik. (Zweite Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 53–76, 1917.
EuDML 58973, JFM 46.1298.01
- [51] Alejandro Jenkins. Self-oscillation. *Physics Reports*, 525(2):167–222, April 2013.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1109.6640>.
- [52] Roy P Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, 11(5):237, 1963.
- [53] Gustav Kirchhoff. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1850(40):51–88, 1850.
doi:10.1515/crll.1850.40.51
ERAM 040.1086cj, (AA) .
- [54] Felix Klein. Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, 1917:469–482, 1917.
JFM 46.1299.01, EuDML 59004, GDZ.
- [55] Felix Klein. Über die Differentialgesetze für Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918:171–189, 1918.
JFM 48.0012.03, EuDML 59022, GDZ.
- [56] Felix Klein. Über die integralform der erhaltungsgesetze und die theorie der räumlich- geschlossenen welt. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*,

- 1918:394–423, 1918.
JFM 46.1308.01, EuDML 59034, GDZ.
- [57] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. I*, volume 15 of *Intersci. Tracts Pure Appl. Math.* Interscience Publishers, New York, NY, 1963.
ISBN 978-0-471-15733-5,
Zbl 0119.37502.
- [58] Sergei Kopeikin, Michael Efroimsky, and George Kaplan. *Relativistic celestial mechanics of the solar system*. John Wiley & Sons, 09 2011.
doi:10.1002/9783527634569,
ISBN 978-3-527-40856-6, Zbl 1233.70002.
- [59] Yoshiki Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, volume 19 of *Springer Ser. Synergetics*. Springer, Cham, 1984.
doi:10.1007/978-3-642-69689-3,
Zbl 0558.76051.
- [60] Cornelius Lanczos. The variational principles of mechanics, 1st ed, 1949.
- [61] Pierre-Simon de Laplace. *Traité de mécanique céleste, Tome IV. Livre X: Sur différens points relatifs au système du monde. Chapitre VII: Sur les altérations que le mouvement des planètes et des comètes peut éprouver par la résistance des milieux qu’elles traversent et par la transmission successive de la pesanteur*. 1802.
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77592z/f348>.
- [62] Evgeny Mikhailovich Lifshitz Lev Davidovich Landau. *Statistical Physics*, volume 5. Butterworth-Heinemann, 1980.
ISBN 978-0-7506-3372-7.
- [63] Evgeny Mikhailovich Lifshitz Lev Davidovich Landau. *The Classical Theory of Fields*, volume 2. Butterworth-Heinemann, 1988.
ISBN 978-0-7506-2768-9 Zbl 0665.70004.
- [64] Memoria di Tullio Levi-Civita. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 42(1):173–204, 1916.
doi:10.1007/BF03014898,
JFM 46.1125.02, (AA).
- [65] Hendrik Antoon Lorentz. *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*, volume 25. EJ Brill, 1892.
(AA), (AA) (AA), (AA).
- [66] Masud Mansuripur. An exact derivation of the thomas precession rate using the lorentz transformation. In Henri-Jean M. Drouhin, Jean-Eric Wegrowe, and Manijeh Razeghi, editors, *Spintronics XIII*, page 135. SPIE, August 2020.
doi:10.48550/arXiv.2009.05393.

- [67] James Clerk Maxwell. VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (155):459–512, 1865.
<https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008>.
- [68] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1, 2. Clarendon press, 1873.
JFM 05.0556.01
Vol. 1, Vol. 2,.
- [69] Sergio de Azevedo Melo. Espectro atômico pela eletrometrificação do espaço e natureza quântica do movimento. 2025.
doi:10.5281/zenodo.14920935,
zenodo: 14994615.
- [70] Sergio de Azevedo Melo. Processo de decaimento orbital pelo desvio da trajetória geodésica no tensor métrico regular normalizado. 2025.
doi:10.5281/zenodo.14920935,
zenodo: 14920935.
- [71] Sergio de Azevedo Melo. Tensor métrico regular para campo gravitacional relativístico. 2025.
doi:10.5281/zenodo.14750315,
zenodo: 14750315.
- [72] Sergio de Azevedo Melo. Transcrição mecânica da geodésica canônica do tensor métrico regular. 2025.
doi:10.5281/zenodo.14838459,
zenodo: 14838459.
- [73] Jean-Baptiste Marie Charles Meusnier. Mémoire sur la courbure des surfaces. *Mem des savan étrangers*, 10(1776):477–510, 1785.
(AA).
- [74] Hermann Minkowski. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1908:53–111, 1908.
doi:10.1007/BF01455871
JFM 41.0948.03, EuDML 58707, GDZ.
- [75] Hermann Minkowski. Raum und Zeit. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 18:75–88, 1909.
JFM 40.0094.01, EuDML 145167, Bibcode:1909JDMaV..18...75M, GDZ
(AA) JFM 40.0745.02, JFM 41.0099.14.
- [76] Emmy Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, page 235–257, 1918.
JFM 46.0770.01, EuDML 59024, GDZ (AA) (AA).
- [77] John Daniel Norton. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on Progress in Physics*,

- 56(7):791–858, jul 1993.
doi:10.1088/0034-4885/56/7/001
(AA).
- [78] John Daniel Norton. *Mach’s principle: from Newton’s bucket to quantum gravity*, volume 6. Springer Science & Business Media, 1995.
doi:10.1007/978-94-017-3327-4_27 (AA).
- [79] Lars Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. i. *Physical review*, 37(4):405, 1931.
doi:10.1103/physrev.37.405,
(AA).
- [80] Julius Robert Oppenheimer and George Michael Volkoff. On Massive Neutron Cores. *Physical Review*, 55(4):374–381, February 1939.
doi:10.1103/PhysRev.55.374.
- [81] Edward Ott and Thomas M. Antonsen. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(3), 2008.
- [82] Attilio Palatini. Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di hamilton. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 43(1):203–212, 1919.
doi:10.1007/BF03014670,
JFM 47.0698.02, (AA).
- [83] Karl Pearson. The grammar of science. *Nature*, 46(1185):247–247, 1892.
- [84] Jules Henri Poincaré. Sur la dynamique de l’électron. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 21:129–176, 1906.
doi:10.1007/BF03013466
(AA) (AA).
- [85] Ilya Prigogine. Irreversibility as a symmetry-breaking process. *Nature*, 246(5428):67–71, 1973.
doi:10.1038/246067a0.
- [86] Ilya Prigogine, Fernand Mayné, Christophe George, and Michel De Haan. Microscopic theory of irreversible processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(10):4152–4156, 1977.
doi:10.1073/pnas.74.10.4152,
(AA), (AA).
- [87] MMG Ricci and Tullio Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54(1):125–201, March 1900.
doi:10.1007/BF01454201,
JFM 31.0297.01, EuDML 157997, GDZ (AA).
- [88] Bernhard Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Mitgetheilt durch R. Dedekind). *Abhandlungen der Königlich-Preussischen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 13:133–152, 1868.
JFM 01.0022.02, EuDML 135760, GDZ.

- [89] Bernhard Riemann. Anhang iii. Naturphilosophie: Gravitation und Licht. In Heinrich Weber and Richard Dedekind, editors, *Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, pages 502–508. B. G. Teubner, Leipzig, 1876.
- [90] W Rindler. Hyperbolic motion in curved space time. *Physical Review*, 119(6):2082, 1960.
doi:10.1103/PhysRev.119.2082.
- [91] Olinde Rodrigues. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendants des causes qui peuvent les produire. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5:380–440, 1844.
- [92] David E. Rowe. Emmy Noether on energy conservation in general relativity, 2019.
doi:10.48550/arXiv.1912.03269.
- [93] Nicholas Sama. Some comments on a relativistic frequency-shift experiment of champeney and moon. *American Journal of Physics*, 37(8):832–833, 1969.
- [94] Karl Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 189–196, 1916.
JFM 46.1296.02, Bibcode:1916SPAW.....189S, (AA).
- [95] Maurice Solovine. *Albert Einstein: Lettres à Maurice Solovine*. Gauthier-Villars, Paris, 1956.
- [96] Steven H. Strogatz and Renato E. Mirollo. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators. *J. Stat. Phys.*, 63(3-4):613–635, 1991.
- [97] Steven Henry Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Non-linear Phenomena*, 143(1-4):1–20, 2000.
doi:10.1016/S0167-2789(00)00094-4,
Zbl 0983.34022, (AA).
- [98] John William Strutt. Some general theorems relating to vibrations. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 4:357–368, 1873.
- [99] James Joseph Sylvester. On the general theory of associated algebraical forms. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, iv:289–293, 1851.
Zbl 1372.01102, (AA), (AA).
- [100] Dirk van Dalen. A bibliography of L.E.J. Brouwer. In *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007) The Cerisy Conference*, pages 343–390. Springer, 2008.
doi:10.1007/978-3-7643-8653-5_22,
(AA).

- [101] Max Von Laue. *Die relativitätstheorie Zweiter Band : Die Allgemeine Relativitätstheorie Und Einsteins Lehre Von Der Schwerkraft*, volume 2. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1921 and 1923. (AA).
- [102] John Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics: New edition*, volume 53. Princeton university press, 2018.
- [103] John VonNeumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Verlag von Julius Springer, 1932.
- [104] John Warren. *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*. J. Smith, Cambridge, 1828.
- [105] Eric Wolfgang Weisstein. “Alias Transformation.” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. URL.
- [106] Eric Wolfgang Weisstein. “Harmonic Addition Theorem..” From MathWorld–A Wolfram Web Resource. URL.
- [107] Hermann Klaus Hugo Weyl. Gravitation und elektrizität. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 26:465–478, 1918.
doi:10.1007/978-3-663-19510-8_11,
JFM 46.1300.01, Bibcode:1918SPAW.....465W, (AA).
- [108] Hermann Klaus Hugo Weyl. Reine Infinitesimalgeometrie. *Mathematische Zeitschrift*, 2:384–411, 1918.
doi:10.1007/BF01199420
JFM 46.1301.01, EuDML 167492, (AA).
- [109] Hermann Klaus Hugo Weyl. *Raum· Zeit· Materie: Vorlesungen über Allgemeine Relativitätstheori*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1919.
doi:10.1007/978-3-662-43111-5,
ISBN 978-3-662-42829-0, JFM 47.0775.01.
- [110] Hermann Klaus Hugo Weyl. Elektron und gravitation. I. *Zeitschrift für Physik*, 56:330–352, 1929.
doi:10.1007/BF01339504,
JFM 55.0513.04, S2CID 122995592, Bibcode: 1929ZPhy...56..330W, (AA)
- [111] Hermann Klaus Hugo Weyl. Cartan on groups and differential geometry. 1938.
(AA), (AA).
- [112] Hideki Yukawa. On the interaction of elementary particles. i. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 17:48–57, 1935. (AA).