Para Além dos Reais Positivos: Dualidade e Simetria na Função Gama e Fatorial - Generalização do Produto de Progressões Aritméticas com Polos Contornados

ARTIGO ORIGINAL

LUÍS, Julinho Jorge

LUÍS, Julinho Jorge. Para Além dos Reais Positivos: Dualidade e Simetria na Função Gama e Fatorial -Generalização do Produto de Progressões Aritméticas com Polos Contornados

Resumo

A análise clássica das funções especiais, fundamentada na Função Gama de Euler, estabelece um paradigma de prolongamento analítico em que o domínio negativo é tratado via recorrência algébrica. Contudo, a persistência de polos meromórficos nos inteiros não positivos e o tratamento diferenciado em fatoriais múltiplos revelam uma oportunidade para o resgate do rigor integral. O objectivo deste trabalho é demonstrar que tais singularidades não são óbices isolados, mas a manifestação de um vector direccional específico. Através do método de regularização assimptótica em vizinhanças de polos de primeira ordem, utilizando o limite do quociente de expansões de Laurent, prova-se que a razão entre funções Gama produz valores finitos e unívocos. Como resultado principal, estabelece-se a fórmula fechada para o produto de progressões aritméticas em toda a recta real superando a necessidade de interrupções ad hoc e estendendo os princípios de integração ao domínio negativo. Para consolidar esta simetria, introduz-se a Função Gama Crescente (Γ) como o operador isométrico dual necessário para a completude analítica. O ponto zero identifica-se como o eixo de inversão entre regimes direccionais complementares, onde a estrutura dual proposta integra as propriedades meromórficas num quadro de simetria funcional superior, assegurando a representação analítica exacta do produto em ambos os sentidos de percurso.

Palavras-chave: Função Gama; Regularização de polos; Direccionalidade funcional; Produtos de termos em Progressão aritmética; Função Gama Crescente.

1. Introdução

A Função Gama de Euler, definida para Re(z) > 0 péla integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

constitui uma das extensões mais férteis do fatorial ao domínio complexo. A sua relação funcional $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, consolidada pelos trabalhos seminais de Euler e Weierstrass, permite o prolongamento analítico a todo o plano complexo, exceto nos inteiros não positivos, onde a função apresenta polos simples. Este mecanismo de extensão por recorrência é elegantemente eficaz e serve de alicerce a inúmeras aplicações em análise, teoria dos números e física matemática.

Contudo, a riqueza desta estrutura não esgota todas as direcções possíveis de propagação do produtório subjacente. A integral de Euler, com o seu núcleo e^{-t}, está intrinsecamente adaptada a descrever processos que decaem no infinito o que corresponde, no contexto de progressões aritméticas (PA), a um regime de razão r = -1 (fluxo centrífugo, ou de afastamento da origem). Quando se considera o regime oposto, de razão r = +1 (fluxo centrípeto, ou de aproximação à origem), a representação integral clássica perde a sua convergência natural. A extensão por recorrência, embora possível, gera valores que não decorrem diretamente de um suporte integral convergente, manifestando-se numa assimetria de magnitudes entre os semieixos positivo e negativo.

Estudos recentes sobre regularização de séries e funções especiais (Temme, 2015; Paris, 2020) têm sublinhado a dependência da convergência integral relativamente à direccionalidade do núcleo, bem como a necessidade de mecanismos de compensação em torno de singularidades. Investigações sobre generalizações da fórmula de Lerch e funções zeta de Barnes (Hu & Kim, 2021) evidenciam a relevância contemporânea da regularização de produtos infinitos. Paralelamente, trabalhos sobre extensões de fatoriais múltiplos (Vignat & Wakhare, 2021) sugerem que a orientação do produtório é uma variável essencial a considerar. Estas contribuições, contudo, mantêm-se no quadro de um único regime direccional, sem propor um operador integral complementar para o fluxo oposto.

Esta assimetria torna-se particularmente visível no tratamento clássico do duplo fatorial de argumentos negativos. Para os inteiros pares negativos (-2n) e ímpares negativos (-2n+1), a razão da progressão é rigorosamente a mesma (r = -2). Todavia, a literatura atribui-lhes tratamentos distintos: polos para os pares e valores finitos para os ímpares, obtidos por interrupção ad hoc do produtório na origem. Esta disparidade não configura um erro da teoria clássica que é internamente consistente no seu regime, mas aponta para uma oportunidade de completude: a de dispor de um operador integral cujo domínio natural de convergência seja o semieixo negativo.

Acresce que, enquanto as progressões geométricas admitem uma fórmula de produto fechada e contínua em todo o domínio real, o produto de termos de uma progressão aritmética,

$$P(n) = \prod_{j=1}^{n} (A \cdot j + B),$$

carece de uma expressão unificada válida no semieixo negativo. As ferramentas clássicas, confinadas ao regime r = -1, não suprem esta lacuna, e a literatura não regista uma fórmula geral que contemple a intersecção com o zero ou com regiões singulares sem recurso a manipulações pontuais.

O presente artigo propõe-se colmatar esta lacuna através da construção de uma estrutura dual. O objectivo não é corrigir a Função Gama de Euler cuja elegância e correcção no seu regime próprio são inquestionáveis, mas complementá-la com um operador isométrico cujo núcleo integral seja naturalmente convergente no semiplano esquerdo. Este operador, que designamos por Função Gama Crescente ($\bar{\Gamma}$), fornece o suporte integral em falta para o regime de razão r = +1.

A estratégia desenvolve-se em três etapas. Em primeiro lugar, demonstra-se que os polos meromórficos nos inteiros não positivos admitem uma regularização analítica rigorosa através do limite do quociente de expansões de Laurent, produzindo valores finitos e unívocos. Em segundo lugar, introduz-se a Função Gama Crescente, definida por um núcleo $e^{-\frac{1}{u}}$ cuja singularidade essencial na origem assegura a convergência para $Re(w) < 0$, e estabelece-se a sua relação de espelhamento com a Gama de Euler: $\bar{\Gamma}(-z) = -\Gamma(z)$. Finalmente, unificam-se estes resultados numa fórmula fechada para o produto de progressões aritméticas válida em toda a reta real, capaz de processar automaticamente a interseção com o zero e as regiões singulares.

Deste modo, o ponto zero revela-se não como um obstáculo, mas como o eixo natural de inversão entre dois regimes direccionais complementares. A estrutura dual proposta integra as singularidades meromórficas num quadro de simetria funcional, assegurando a representação analítica exacta do produto de progressões aritméticas em ambos os sentidos de percurso.

2. O Sistema Clássico e a Assimetria Direcional

2.1. O Fatorial Clássico e a Função Gama de Euler

O fatorial de um número inteiro não negativo n é definido pelo produtório

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k\,, n \in N_0$$

com a convenção $0! = 1$. Para $n \in \mathbb{Z}^-$, o produtório infinito associado diverge, pelo que a definição combinatória não atribui valores finitos a $n!$ para argumentos negativos, tornando indefinido.

A Função Gama de Euler,

$$\Gamma(z) = lim_{\varepsilon \to 0^+} lim_{b \to \infty} \int_{\varepsilon}^{b} t^{z-1} e^{-t} dt\,,\ \ Re(z) > 0$$

estende o fatorial ao domínio complexo através da identidade $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}_0$. A sua relação funcional $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ permite o prolongamento analítico a todo o plano complexo. Nos inteiros negativos e no zero ($z = 0, -1, -2, ...$), a função apresenta polos simples, que constituem a manifestação analítica da divergência do produtório subjacente

2.2. O Regime Decrescente ($r = -1$)

O fatorial clássico pode ser interpretado como o produto dos termos de uma progressão aritmética de razão $r = -1$

O produto dos primeiros n termos de uma PA é:

$$P(n) = \prod_{j=1}^{n} (A \cdot j + B)$$

No caso particular $A = 1, B = 0$, obtém-se:

$$P(n) = \prod_{j=1}^{n} j = n!$$

Esta progressão é decrescente: os termos afastam-se da origem. A Função Gama de Euler, com o núcleo e^{-t}, está intrinsecamente adaptada a este regime centrífugo, convergindo para $\mathrm{Re}(z) > 0$. O domínio natural deste operador é, portanto, o semieixo estritamente positivo.

2.3. A Assimetria do Duplo Fatorial Negativo

Uma progressão aritmética de razão $r = -2$ gera duas sequências distintas: a dos pares e a dos ímpares. Para argumentos negativos, ambas partilham a mesma natureza centrífuga:

- Pares negativos: $-2, -4, -6, \ldots$
- Ímpares negativos: $-1, -3, -5, \ldots$

A aplicação da relação de recorrência clássica do duplo fatorial,

$$n!! = n \cdot (n-2)!!,$$

produz uma dicotomia. Para os pares negativos, a recorrência intersecta o zero, resultando numa singularidade. Para os ímpares negativos, o processo é interrompido na unidade, convencionando-se $(-1)!! = 1$, e atribuem-se valores finitos como $(-3)!! = -1$ e $(-5)!! = 1/3$.

Esta dicotomia não decorre de uma propriedade intrínseca das sequências — ambas partilham a mesma razão e a mesma natureza —, mas da aplicação de um único regime direcional a domínios onde ele não possui suporte integral direto.

2.4. A Oportunidade: Definir o Fatorial Negativo pela Razão de Polos

A existência de polos nos inteiros negativos não é um obstáculo, mas uma característica estrutural. A Função Gama de Euler codifica a divergência do produtório para $z \leq 0$ através das suas singularidades. Estes polos são entidades matemáticas legítimas, que podem ser submetidas a operações algébricas desde que os cancelamentos de divergências sejam controlados.

Em particular, a razão entre dois fatoriais de inteiros negativos,

$$\frac{(-a)!}{(-b)!}, a, b \in \mathbb{N},$$

embora composta por termos individualmente divergentes, admite um valor finito e unívoco. A Secção 3 estabelece o método de regularização que permite atribuir significado a tais quocientes, abrindo caminho para uma fórmula de produto unificada.

2.4.1. Comparação Metodológica com a Regularização de Hadamard

A regularização de produtos infinitos é um problema central na análise. A abordagem clássica de Hadamard (1894) consiste em eliminar os polos da Função Gama através de um produto canónico de Weierstrass, obtendo uma função inteira

$$H(z) = \Gamma(z)\, e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k},$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. Esta função satisfaz $H(z+1) = zH(z)$, mas fá-lo à custa de um fator exponencial corretor que obscurece a estrutura de recorrência simples do fatorial.

A presente abordagem difere conceptualmente do método de Hadamard. Enquanto Hadamard **elimina** as singularidades para obter uma função inteira, o presente trabalho **preserva os polos como entidades operacionais legítimas**. Não se remove a singularidade; opera-se com ela através da razão de resíduos de Laurent. Esta preservação mantém intacta a estrutura de recorrência $f(z+1) = zf(z)$ sem fatores corretores, e revela uma simetria direcional subjacente que o método de Hadamard não contempla.

A comparação entre as duas metodologias é retomada na Secção 6.6

2.5. A Importância da Direcção de Decaimento no Núcleo Integral

A convergência da integral de Euler depende do decaimento exponencial do núcleo e^{-t} no infinito. Como observa Temme (2015), a convergência de núcleos integrais é estritamente dependente da direção de decaimento assintótico. O núcleo e^{-t} é adequado para descrever processos que decaem no infinito, o que corresponde ao regime de razão r = -1 quando aplicado ao semieixo positivo.

Se se tentar utilizar o mesmo núcleo e^{-t} para descrever processos que crescem no semieixo negativo ou que envolvem a direção oposta (r = +1), a representação integral perde a sua convergência. Neste caso, a extensão analítica por recorrência produz polos e valores assimétricos que não decorrem diretamente da integral original. Estes polos não são uma anomalia, mas sim a indicação de que o núcleo utilizado não é adequado para aquele regime direcional.

2.5.1. O Domínio Negativo na Teoria Clássica: Fundamento e Oportunidade Estrutural

A extensão de operadores fatoriais ao domínio dos inteiros negativos é tratada de forma distinta pelas várias construções clássicas, como decorrência das suas definições originais. O fatorial combinatório é estritamente definido para $n \in \mathbb{N}_0$. Para argumentos negativos, o produtório associado diverge, não sendo atribuídos valores finitos por esta via. A Função Gama de Euler, cujas propriedades fundamentais são expostas em Whittaker & Watson (1927, Capítulo XII), codifica esta divergência através de polos simples nos inteiros negativos e no zero.

O duplo fatorial para argumentos negativos ilustra uma dicotomia decorrente da aplicação da recorrência clássica a um mesmo regime direcional. Para a razão $r = -2$, as sequências de pares negativos e de ímpares negativos partilham a mesma natureza centrífuga, mas recebem tratamentos distintos: singularidade para os pares, valores finitos para os ímpares. Esta discrepância não decorre de uma propriedade intrínseca das sequências, mas da aplicação de um regime fora do seu domínio de suporte integral.

O presente trabalho parte do princípio, estabelecido pela análise clássica, de que os polos da função Gama são entidades matemáticas legítimas, suscetíveis de operações de regularização. A contribuição aqui apresentada consiste em demonstrar que a razão entre fatoriais de inteiros negativos, embora composta por termos individualmente divergentes, admite um valor finito e unívoco. Este resultado constitui o fundamento para uma fórmula de produto unificada, que não requer expressões distintas para os regimes decrescente e crescente, mas uma única fórmula mediada pela regularização de quocientes meromórficos.

3. Regularização de Polos no Regime Decrescente ($r = -1$)

3.1. Natureza dos Polos no Fatorial Decrescente

No regime decrescente ($r = -1$), o fatorial de um inteiro positivo n é o produto finito

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Para argumentos negativos, o produtório infinito associado diverge. A Função Gama de Euler, que estende o fatorial ao domínio complexo, codifica esta divergência através de polos simples localizados nos inteiros negativos e no zero. Estes polos não são deficiências da função, mas a manifestação analítica da divergência do produtório subjacente.

3.2. Formulação do Problema

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $b > a$. Cada fatorial $(-a)!$ e $(-b)!$, isoladamente, corresponde a um polo da Função Gama — isto é, a uma forma indefinida. O presente tratamento não procura eliminar estas singularidades, mas demonstrar que o seu quociente admite um valor finito e unívoco.

Pretende-se, portanto, atribuir significado à razão

$$R = \frac{(-a)!}{(-b)!},$$

através da análise do comportamento assintótico em vizinhanças de polos de primeira ordem.

3.3. Método de Regularização

Através da fórmula de reflexão de Euler,

$$\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\Gamma(z)\sin(\pi z)},$$

a razão entre as extensões analíticas $\Gamma(1-a+\varepsilon)$ e $\Gamma(1-b+\varepsilon)$ escreve-se como

$$R = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma(b+\varepsilon)}{\Gamma(a+\varepsilon)} \cdot \frac{\sin(\pi(b+\varepsilon))}{\sin(\pi(a+\varepsilon))}.$$

A expansão em série de Taylor de primeira ordem da função $\sin(\pi k + \pi\varepsilon)$ em torno da origem, para $k \in \mathbb{Z}$, resulta em

$$\sin(\pi k + \pi\varepsilon) = \pi(-1)^k \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Substituindo as expansões para os argumentos a e b na razão de senos, obtém-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(\pi(b+\varepsilon))}{\sin(\pi(a+\varepsilon))} = (-1)^{b-a}.$$

Dada a continuidade da Função Gama no domínio dos inteiros positivos, a razão $\frac{\Gamma(b+\varepsilon)}{\Gamma(a+\varepsilon)}$ converge para $\frac{(b-1)!}{(a-1)!}$. A síntese destes resultados consolida a identidade de regularização:

$$\boxed{\frac{(-a)!}{(-b)!} = (-1)^{b-a} \cdot \frac{(b-1)!}{(a-1)!}}.$$

Esta identidade resolve a indeterminação pela razão dos resíduos da expansão de Laurent no ponto singular. Ambos os termos da razão são, isoladamente, formas indefinidas (polos); a regularização atribui significado ao seu quociente.

3.4. Propriedades Imediatas

Proposição 1 (Identidade em Pontos Singulares). Para todo $a \in \mathbb{Z}^+$,

$$\frac{(-a)!}{(-a)!} = 1.$$

Demonstração. Resulta diretamente da identidade de regularização com $b = a$: $(-1)^0 \cdot (a-1)!/(a-1)! = 1$.

Proposição 2 (Razão entre Valor Finito e Forma Indefinida). Para $a \in \mathbb{N}_0$ e $b \in \mathbb{Z}^+$,

$$\frac{a!}{(-b)!} = 0.$$

Demonstração. $\Gamma(a + 1 + \varepsilon)$ converge para a constante finita $a!$, enquanto $|\ \Gamma(1 - b + \varepsilon)\ | \to \infty$ como singularidade de primeira ordem. O quociente converge para zero.

4. O Fatorial Crescente e a Função Gama Crescente

A Secção 3 estabeleceu o tratamento de polos no regime decrescente ($r = -1$). A presente secção introduz o operador dual que rege o regime crescente ($r = +1$), cujo domínio natural de convergência é o semieixo estritamente negativo. Este operador — a Função Gama Crescente — é dotado de representação integral própria e de uma relação de simetria funcional com a Função Gama de Euler.

4.1. O Fatorial Crescente Discreto

Definição 1 (Fatorial Crescente). Para $n \in \mathbb{N}$, define-se o fatorial crescente de argumento negativo $-n$ pelo produtório finito

$$!\,(-n) = \prod_{k=0}^{n-1}(-n + k) = (-n)(-n + 1) \cdots (-1) = (-1)^n n!.$$

O símbolo $!\,(-n)$ designa exclusivamente este operador. Distingue-se do subfatorial (que conta desarranjos) e do símbolo de Pochhammer $(a)_n = a(a + 1) \cdots (a + n - 1)$, que representa um fatorial crescente generalizado a partir de um argumento arbitrário. O presente operador, $!\,(-n)$, é uma função dos inteiros negativos para os inteiros, definida pela progressão aritmética de razão $r = +1$ que parte de $-n$ e termina em -1.

Proposição 1 (Recorrência). Para $n \in \mathbb{N}$, $!\,(-n) = -n \cdot !\,(-n + 1)$.

Proposição 2 (Relação com o fatorial decrescente). Para $n \in \mathbb{N}$, $!\,(-n) = (-1)^n n!$.

Para $n \in \mathbb{Z}^+$ (argumento positivo), o produtório infinito associado ao regime crescente diverge. A extensão analítica natural apresentará polos nos inteiros positivos, de forma simétrica ao comportamento da Função Gama de Euler nos inteiros negativos.

4.2. Definição da Função Gama Crescente

A existência de um regime direcional oposto ao de Euler, com propriedades simétricas, requer uma representação integral cujo núcleo convirja naturalmente no semiplano esquerdo. A transformação $t \mapsto 1/u$, que constitui um mapeamento involutivo do eixo real positivo permutando a origem e o ponto no infinito, é análoga à transformação de variável utilizada na teoria das funções de Bessel para relacionar soluções em torno de zero e do infinito (Watson, 1922; Whittaker & Watson, 1927). Sob esta transformação, o núcleo de Euler e^{-t} converte-se em $e^{-1/u}$, cuja singularidade essencial na origem suprime qualquer divergência polinomial no limite inferior de integração.

4.2.1. Origem do Sinal Negativo: Inversão de Limites na Integral Imprópria

A definição da Função Gama Crescente decorre da aplicação da transformação de inversão $t = 1/u$ à representação integral de Euler. O sinal negativo que figura na definição não é uma imposição arbitrária, mas uma consequência directa dos princípios de integração imprópria e da inversão dos limites de integração.

Parte-se da integral de Euler para $\mathrm{Re}(z) > 0$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Introduz-se a mudança de variável $t = 1/u$. O diferencial transforma-se como $dt = -du/u^2$. Os limites de integração invertem-se: quando $t \to 0^+$, $u \to +\infty$; quando $t \to +\infty$, $u \to 0^+$. Obtém-se:

$$\Gamma(z) = \int_{+\infty}^{0} \left(\frac{1}{u}\right)^{z-1} e^{-\frac{1}{u}} \left(-\frac{du}{u^2}\right).$$

Reorganizando os factores:

$$\Gamma(z) = \int_{+\infty}^{0} u^{-z+1} \cdot u^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{u}} \cdot (-du) = \int_{+\infty}^{0} u^{-z-1}\, e^{-\frac{1}{u}} \cdot (-du).$$

O sinal negativo do diferencial $-$du pode ser extraído para fora do integral:

$$\Gamma(z) = -\int_{+\infty}^{0} u^{-z-1}\, e^{-\frac{1}{u}}\, du.$$

Agora, inverte-se a ordem dos limites de integração. A inversão dos limites de um integral definido introduz um sinal negativo adicional:

$$-\int_{+\infty}^{0} u^{-z-1}\, e^{-\frac{1}{u}}\, du = +\int_0^\infty u^{-z-1}\, e^{-\frac{1}{u}}\, du.$$

Portanto,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{-z-1}\, e^{-\frac{1}{u}}\, du.$$

Substituindo z por um argumento w tal que $-z = w$, ou seja, $z = -w$, obtém-se:

$$\Gamma(-w) = \int_0^\infty u^{w-1}\, e^{-\frac{1}{u}}\, du.$$

Isolando o integral que define a Função Gama Crescente:

$$\int_0^\infty u^{w-1}\, e^{-\frac{1}{u}}\, du = \Gamma(-w).$$

Através da relação de simetria (a estabelecer axiomaticamente ou por continuação), prova-se que $\Gamma(-w) = -\bar{\Gamma}(w)$. A definição

$$\bar{\Gamma}(w) = -\int_0^\infty u^{w-1}\, e^{-\frac{1}{u}}\, du$$

é, portanto, a escolha que preserva a consistência com a transformação de Euler e com a relação $\bar{\Gamma}(-z) = -\Gamma(z)$. O sinal negativo em frente do integral compensa exactamente o sinal que emergiria da relação de simetria, garantindo que a Função Gama Crescente e a Função Gama de Euler sejam operadores isométricos e mutuamente complementares.

Definição 2 (Função Gama Crescente). Para $\mathrm{Re}(w) < 0$, define-se $\bar{\Gamma}(w) = -\int_0^\infty u^{w-1}\, e^{-\frac{1}{u}} du.$

Teorema 1 (Recorrência Funcional). Para $\mathrm{Re}(w) < 0$, $\bar{\Gamma}(w+1) = -\frac{\bar{\Gamma}(w)}{w+1}$.

Demonstração. Aplicando integração por partes ao integral definidor, o termo de fronteira anula-se nos dois limites, e o integral remanescente é precisamente $-\bar{\Gamma}(w)$.

Teorema 2 (Relação de Simetria). Para $z > 0$, $\bar{\Gamma}(-z) = -\Gamma(z)$.

Demonstração. Aplicando a mudança de variável $u = 1/t$ ao integral de $\bar{\Gamma}(-z)$ e invertendo os limites, obtém-se a integral de Euler $\Gamma(z)$. O sinal negativo na definição de $\bar{\Gamma}$ assegura a consistência da identidade.

Proposição 3 (Valores em Inteiros Negativos). Para $n \in \mathbb{N}$, $\bar{\Gamma}(-n+1) = (-1)^n n!$.

Proposição 4 (Localização dos Polos). $\bar{\Gamma}(w)$ admite extensão meromórfica a $\mathbb{C}$ com polos simples em $w \in \{0,1,2,\dots\}$, simétricos aos de $\Gamma(z)$.

4.3. Dualidade Funcional

A tabela seguinte sintetiza a dualidade entre os dois operadores que regem os dois regimes direcionais.

Propriedade	$\Gamma(z)$ (Euler)	$\bar{\Gamma}(w)$ (Crescente)
Representação integral	$\int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t} dt$	$-\int_0^\infty u^{w-1}\, e^{-1/u} du$
Domínio de convergência	$\mathrm{Re}(z) > 0$	$\mathrm{Re}(w) < 0$
Regime direcional	$r = -1$ (decrescente)	$r = +1$ (crescente)
Polos	$z = 0, -1, -2, \dots$	$w = 0,1,2,\dots$

Propriedade	$\Gamma(z)$ (Euler)	$\bar{\Gamma}(w)$ (Crescente)
Relação de simetria	—	$\bar{\Gamma}(-z) = -\Gamma(z)$
Valores em inteiros	$\Gamma(n+1) = n!$	$\bar{\Gamma}(-n+1) = (-1)^n n!$

Os polos de cada função localizam-se precisamente no domínio de convergência da outra. O ponto $z = 0$ (ou $w = 0$) constitui a única singularidade comum a ambos os operadores, atuando como eixo de inversão entre os dois regimes direcionais.

4.3.3. Regularização da Razão no Regime Crescente via Expansão de Taylor

Sejam $a, b \in \mathbb{N}_0$ com $b > a$. Ambos $!(a)$ e $!(b)$ são formas indefinidas — polos da Função Gama Crescente — correspondendo a $\bar{\Gamma}(a+1)$ e $\bar{\Gamma}(b+1)$. A razão regulariza-se através da expansão de Taylor de primeira ordem em vizinhanças dos polos.

4.3.3.1. Representação e Aplicação da Fórmula de Reflexão

Introduzindo um deslocamento infinitesimal $\varepsilon > 0$ e aplicando a relação de simetria $\bar{\Gamma}(-z) = -\Gamma(z)$:

$$\frac{!(a)}{!(b)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\bar{\Gamma}(a+1+\varepsilon)}{\bar{\Gamma}(b+1+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Gamma(-a-\varepsilon)}{\Gamma(-b-\varepsilon)}.$$

Pela fórmula de reflexão de Euler $\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\Gamma(z)\sin(\pi z)}$, obtém-se:

$$\frac{!(a)}{!(b)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Gamma(b+1+\varepsilon)}{\Gamma(a+1+\varepsilon)} \cdot \frac{\sin(\pi(b+1+\varepsilon))}{\sin(\pi(a+1+\varepsilon))}.$$

4.3.3.2. Expansão de Taylor

Para $k \in \mathbb{Z}$, a expansão de Taylor de $\sin(\pi k + \delta)$ em torno de $\delta = 0$ é:

$$\sin(\pi k + \delta) = \pi(-1)^k \cdot \delta + O(\delta^2).$$

Com $k = a+1, b+1$ e $\delta = \pi\varepsilon$:

$$\frac{\sin(\pi(b+1+\varepsilon))}{\sin(\pi(a+1+\varepsilon))} = \frac{\pi(-1)^{b+1}\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{\pi(-1)^{a+1}\varepsilon + O(\varepsilon^2)} \to (-1)^{b-a}.$$

A continuidade da Função Gama no domínio positivo garante:

$$\frac{\Gamma(b+1+\varepsilon)}{\Gamma(a+1+\varepsilon)} \to \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+1)}.$$

Substituindo $\Gamma(b+1) = (-1)^{b+1} \cdot \frac{!(-b-1)}{b+1}$ e a expressão análoga para $\Gamma(a+1)$ no resultado intermédio $\frac{!(a)}{!(b)} = (-1)^{b-a} \cdot \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+1)}$, e simplificando as potências de (-1), obtém-se a identidade de regularização no regime crescente, expressa exclusivamente em termos de fatoriais crescentes:

$$\boxed{\frac{!(a)}{!(b)} = (-1)^{b-a} \cdot \frac{!(-b-1)}{!(-a-1)}}.$$

4.4. Unicidade e o Problema de Bohr-Mollerup para o Semi-plano Esquerdo

No semi-plano direito, o Teorema de Bohr-Mollerup (Whittaker & Watson, 1927, Capítulo XII) estabelece que a Função Gama de Euler é a única função $f(z)$ que satisfaz:

1. $f(1) = 1$,
2. $f(z+1) = zf(z)$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$,
3. $\ln\, f(z)$ é convexa para $z > 0$.

A questão análoga para o semi-plano esquerdo coloca-se naturalmente: é a Função Gama Crescente a única função que satisfaz as condições correspondentes? Esta questão é aqui formalizada como um problema em aberto.

Problema 1 (Bohr-Mollerup para o Espaço Inverso). *Determinar se a Função Gama Crescente* $\bar{\Gamma}(w)$*, definida pelo integral*

$$\bar{\Gamma}(w) = -\int_0^\infty u^{w-1}\, e^{-1/u} du, \mathrm{Re}(w) < 0,$$

é a única função holomorfa no semi-plano $\mathrm{Re}(w) < 0$ *que satisfaz:*

1. $\bar{\Gamma}(0) = -1$ *(polo simples)*,
2. $\bar{\Gamma}(w+1) = -\frac{\bar{\Gamma}(w)}{w+1}$ para $\mathrm{Re}(w) < 0$,
3. *uma condição de convexidade logarítmica no argumento inverso* $1/w$*.*

A condição (iii) é uma adaptação natural da log-convexidade clássica ao domínio negativo, onde a transformação $w \mapsto 1/w$ permuta os papéis da origem e do infinito, em consonância com o mapeamento geométrico que fundamenta a Função Gama Crescente (Secção 2.6.2).

A resolução deste problema — no sentido de demonstrar que $\bar{\Gamma}(w)$ é a única solução, ou de identificar outras soluções admissíveis — constituiria um avanço significativo na teoria das funções especiais e consolidaria a posição da Função Gama Crescente como um objeto canónico da análise.

4.5. Exemplo de Cálculo Explícito: $\bar{\Gamma}\left(-\frac{3}{2}\right)$ via Integração por Partes Sucessiva

A definição integral e a relação de recorrência permitem o cálculo explícito de valores da Função Gama Crescente. Apresenta-se de seguida o cálculo completo de $\bar{\Gamma}\left(-\frac{3}{2}\right)$ pelo método de integração por partes sucessiva.

4.5.1. Definição do Problema

Parte-se da Definição 2 para $w = -3/2$:

$$\bar{\Gamma}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\int_0^\infty u^{-3/2-1}\, e^{-1/u} du = -\int_0^\infty u^{-5/2}\, e^{-1/u} du.$$

Define-se $I = \int_0^\infty u^{-5/2}\, e^{-1/u} du$. O objetivo é calcular I e, em seguida, obter $\bar{\Gamma}(-3/2) = -I$.

4.5.2. Primeira Integração por Partes

Escolhe-se $U = e^{-1/u}$ e $dV = u^{-5/2}du$.

Cálculo de V:

$$V = \int u^{-5/2}du = \frac{u^{-5/2+1}}{-5/2+1} = \frac{u^{-3/2}}{-3/2} = -\frac{2}{3}u^{-3/2}.$$

Cálculo de dU:

$$dU = \frac{d}{du}\left(e^{-1/u}\right)du = e^{-1/u} \cdot \frac{1}{u^2}du.$$

Aplicando a fórmula de integração por partes $\int UdV = UV - \int VdU$:

$$\begin{aligned} I \quad &= \left[e^{-1/u} \cdot [-\frac{2}{3}u^{-3/2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{2}{3}u^{-3/2}\right) \cdot \left(\frac{1}{u^2}e^{-1/u}\right)du \\ &= \left[-\frac{2}{3}u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{u}}\right]_0^\infty + \frac{2}{3}\int_0^\infty u^{-3/2} \cdot u^{-2} \cdot e^{-1/u}du \\ &= \left[-\frac{2}{3}u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{u}}\right]_0^\infty + \frac{2}{3}\int_0^\infty u^{-7/2}\, e^{-1/u}du. \end{aligned}$$

Análise do termo de fronteira:

- Quando $u \to \infty$: $u^{-3/2} \to 0$ e $e^{-1/u} \to 1$. O produto tende para 0.
- Quando $u \to 0^+$: $e^{-1/u}$ tende para 0 mais rapidamente do que qualquer potência de u diverge. O limite é 0.

Portanto, o termo de fronteira anula-se, e obtém-se:

$$I = \frac{2}{3}\int_0^\infty u^{-7/2}\, e^{-1/u}du. (1)$$

4.5.3. Segunda Integração por Partes

Define-se $I_1 = \int_0^\infty u^{-7/2}\, e^{-1/u}du$. Aplica-se novamente a integração por partes com $U = e^{-1/u}$ e $dV = u^{-7/2}du$.

Cálculo de V:

$$V = \int u^{-7/2}du = \frac{u^{-7/2+1}}{-7/2+1} = \frac{u^{-5/2}}{-5/2} = -\frac{2}{5}u^{-5/2}.$$

$dU = \frac{1}{u^2}e^{-1/u}du$ (como anteriormente).

Aplicando a fórmula:

$$\begin{aligned} I_1 \quad &= \left[e^{-1/u} \cdot (-\frac{2}{5}u^{-\frac{5}{2}})\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{2}{5}u^{-5/2}\right) \cdot \left(\frac{1}{u^2}e^{-1/u}\right)du \\ &= \left[-\frac{2}{5}u^{-\frac{5}{2}}e^{-\frac{1}{u}}\right]_0^\infty + \frac{2}{5}\int_0^\infty u^{-5/2} \cdot u^{-2} \cdot e^{-1/u}du \\ &= 0 + \frac{2}{5}\int_0^\infty u^{-9/2}\, e^{-1/u}du. \end{aligned}$$

O termo de fronteira anula-se pelas mesmas razões que no passo anterior. Portanto:

$$I_1 = \frac{2}{5}\int_0^\infty u^{-9/2}\, e^{-1/u} du. (2)$$

4.5.4. Substituição e Reconhecimento do Padrão

Substituindo (2) em (1):

$$I = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\int_0^\infty u^{-9/2}\, e^{-1/u} du = \frac{4}{15}\int_0^\infty u^{-9/2}\, e^{-1/u} du.$$

Após n integrações por partes sucessivas, emerge o padrão:

$$I = \frac{2^n}{(2n+1)!!}\int_0^\infty u^{-(2n+5)/2}\, e^{-1/u} du,$$

onde o duplo fatorial ímpar é definido por $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)$.

4.5.5. Relação com a Integral Conhecida

Utiliza-se a identidade geral $\int_0^\infty u^{-a}\, e^{-1/u} du = \Gamma(a-1)$, válida para $a > 1$.

Com $a = \frac{2n+5}{2}$, tem-se:

$$\int_0^\infty u^{-(2n+5)/2}\, e^{-1/u} du = \Gamma\left(\frac{2n+5}{2} - 1\right) = \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right).$$

Assim:

$$I = \frac{2^n}{(2n+1)!!}\cdot\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right).$$

4.5.6. Expressão do Duplo Fatorial via Fórmula de Produto

Aplica-se a fórmula de produto de progressões aritméticas desenvolvida neste trabalho. Para a progressão aritmética dos primeiros $n+1$ números ímpares $1,3,5,\ldots,2n+1$, com parâmetros $A = 2$, $B = 1$ e $m = B/A = 1/2$, a fórmula $P(n) = A^n \cdot \Gamma(n+m+1)/\Gamma(m+1)$ fornece:

$$(2n+1)!! = 2^{n+1}\cdot\frac{\Gamma\left((n+1) + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = 2^{n+1}\cdot\frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Como $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, obtém-se:

$$(2n+1)!! = 2^{n+1}\cdot\frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{2^{n+2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right).$$

4.5.7. Conclusão do Cálculo de I

Substituindo a expressão de $(2n+1)!!$ na fórmula de I:

$$I = \frac{2^n}{\frac{2^{n+2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{2^n}{2^{n+2}}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\pi}\cdot 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Verificação dos fatores: $2^n/2^{n+2} = 1/4$. Portanto: $I = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{1} \dots$
Recalculando com precisão:

$$(2n+1)!! = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) \cdot 2 = \frac{2^{n+2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right).$$

$$I = \frac{2^n}{\frac{2^{n+2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \frac{2^n}{2^{n+2}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \cdot 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Portanto:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.5.8. Valor Final de $\bar{\Gamma}(-3/2)$

$$\bar{\Gamma}\left(-\frac{3}{2}\right) = -I = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.5.9. Verificação da Relação de Simetria

A Função Gama de Euler no ponto $z = 3/2$ vale $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Logo:

$$\bar{\Gamma}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\Gamma\left(\frac{3}{2}\right),$$

verificando numericamente o Teorema 2. A relação $\bar{\Gamma}(-z) = -\Gamma(z)$ é, portanto, confirmada por cálculo direto a partir da definição integral.

4.6. Cálculo de $\bar{\Gamma}(-1/2)$

Pela Definição 2, para $w = -1/2$:

$$\bar{\Gamma}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\int_0^\infty u^{-1/2-1}\, e^{-1/u} du = -\int_0^\infty u^{-3/2}\, e^{-1/u} du.$$

Define-se $J = \int_0^\infty u^{-3/2}\, e^{-1/u} du$, donde $\bar{\Gamma}(-1/2) = -J$.

Integração por partes. Com $U = e^{-1/u}$ e $dV = u^{-3/2} du$, obtém-se:

$$V = \int u^{-3/2} du = \frac{u^{-1/2}}{-1/2} = -2u^{-1/2}, dU = \frac{1}{u^2} e^{-1/u} du.$$

$$J \quad = \left[-2u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{u}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-2\, u^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{u^2} e^{-\frac{1}{u}} du + 0 + 2\int_0^\infty u^{-5/2}\, e^{-1/u} du.$$

O termo de fronteira anula-se pelo comportamento assintótico do núcleo $e^{-1/u}$.

Reconhecimento da integral. Comparando com o cálculo da Secção 4.5, a integral resultante é precisamente o dobro de $I = \int_0^\infty u^{-5/2}\, e^{-1/u} du$. Pelo resultado estabelecido em 4.5.7, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Logo:

$$J = 2 \cdot I = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Valor final.

$$\bar{\Gamma}\left(-\frac{1}{2}\right) = -J = -\sqrt{\pi}.$$

Verificação da relação de simetria. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Portanto:

$$\bar{\Gamma}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi} = -\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

confirmando novamente o Teorema 2.

Secção 5 — Fórmula de Produto de Progressões Aritméticas

5.1. Duas Fórmulas, Dois Regimes

Considere-se uma progressão aritmética de termo geral $a_j = Aj + B$, com $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $B \in \mathbb{R}$, sobre um domínio de n termos ($j = 1, \dots, n$). O produto é

$$P(n) = \prod_{j=1}^{n} (Aj + B).$$

Extraindo a razão A e introduzindo a constante de translação $m = B/A$, obtém-se

$$P(n) = A^n \prod_{j=1}^{n} (j + m).$$

Regime decrescente ($r < 0$). Quando $A < 0$, a progressão é decrescente. A Função Gama de Euler fornece a representação integral adequada. A fórmula de produto é

$$\boxed{P_{\text{dec}}(n) = A^n \cdot \frac{\Gamma(n + m + 1)}{\Gamma(m + 1)}.}$$

Esta fórmula é válida directamente para $m \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{Z}^+$. Para $m \in \mathbb{Z}^-$, a expressão envolve formas indefinidas (polos da Função Gama), exigindo regularização.

Regime crescente ($r > 0$). Quando $A > 0$, a progressão é crescente. A Função Gama Crescente, definida na Secção 4, fornece a representação integral adequada. A fórmula de produto correspondente é

$$\boxed{P_{\text{cre}}(n) = A^n \cdot \frac{\bar{\Gamma}(n + m + 1)}{\bar{\Gamma}(m + 1)}.}$$

Esta fórmula é válida directamente para $m \in \mathbb{R}^- \cup \mathbb{Z}^-$. Para $m \in \mathbb{Z}^+$, a expressão envolve formas indefinidas (polos da Função Gama Crescente), exigindo regularização.

Limitação. Nenhuma das duas fórmulas é, por si só, válida em toda a reta real. Cada uma está confinada ao seu regime direcional próprio. A intersecção com o zero ou a presença de polos requer um tratamento adicional.

5.2. A Razão de Polos como Mecanismo de Unificação

A regularização de polos, estabelecida nas Secções 3 e 4, permite tratar quocientes de formas indefinidas como valores finitos e unívocos. Este mecanismo é a chave para uma fórmula única.

Identidades de Regularização.

$$\frac{(-a)!}{(-b)!} = (-1)^{b-a} \cdot \frac{(b-1)!}{(a-1)!}, a, b \in \mathbb{N},\ b > a.$$
$$\frac{!\,(a)}{!\,(b)} = (-1)^{b-a} \cdot \frac{!\,(-b-1)}{!\,(-a-1)}, a, b \in \mathbb{N}_0,\ b > a.$$

Estas identidades permitem que qualquer razão de polos — decrescentes ou crescentes — seja expressa como uma razão de valores finitos, com um factor de paridade $(-1)^{b-a}$.

5.3. Fórmula Unificada

Utilizando a regularização de polos, a fórmula

$$\boxed{P(n) = A^n \cdot \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(m+1)}}$$

torna-se válida em **todo o domínio real**, para qualquer valor de $m \in \mathbb{R}$ e qualquer razão $A \neq 0$, desde que a razão de funções Gama seja interpretada através da regularização estabelecida quando ocorrem formas indefinidas.

Com efeito:

- Para $m \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{Z}^+$, a fórmula aplica-se directamente (regime decrescente).
- Para $m \in \mathbb{Z}^-$, a razão $\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(m+1)}$ é uma razão de polos, regularizada pela identidade da Secção 3.
- Para $m \in \mathbb{R}^-$, a conversão ao regime crescente e a regularização correspondente garantem a validade.

A mesma fórmula unificada aplica-se a qualquer progressão aritmética, independentemente da razão $r = A$:

- **Fatorial simples ($r = -1$):** $A = 1, B = 0 \Rightarrow P(n) = n!$.
- **Duplo fatorial ($r = -2$):** $A = 2, B = 0 \Rightarrow P(n) = 2^n \cdot n!$.
- **Triplo fatorial ($r = -3$):** $A = 3, B = 0 \Rightarrow P(n) = 3^n \cdot n!$.
- **Fatorial crescente ($r = +1$):** $A = 1, B = 0 \Rightarrow P(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)}$ no regime decrescente, ou a expressão correspondente no regime crescente.

Em todos os casos, a presença de polos é controlada pela regularização, que unifica o tratamento sem necessidade de duas fórmulas distintas.

5.4. Prova por Indução

A validade da fórmula unificada para todo $n \in \mathbb{N}$ é estabelecida por indução matemática.

Base ($n = 1$). $P(1) = A \cdot 1 + B = A(1+m)$. A fórmula fornece $P(1) = A^1 \cdot \frac{\Gamma(2+m)}{\Gamma(m+1)} = A(m+1)$. Verifica-se.

Passo indutivo. Assume-se $P(k) = A^k \cdot \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)}$. Para $n = k + 1$:

$$P(k+1) = P(k) \cdot [A(k+1) + B] = A^k \cdot \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)} \cdot A(k+1+m).$$

Pela propriedade recursiva $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, tem-se $(k+1+m) \cdot \Gamma(k+m+1) = \Gamma(k+m+2)$. Logo,

$$P(k+1) = A^{k+1} \cdot \frac{\Gamma(k+m+2)}{\Gamma(m+1)},$$

completando a prova. A fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, independentemente do domínio de m, desde que a razão de funções Gama seja interpretada conforme a regularização estabelecida.

5.5. Comparação com Métodos de Regularização Clássicos

A regularização de produtos infinitos é um problema central na análise. A função Gama de Hadamard, definida por

$$H(z) = \Gamma(z)\, e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k},$$

é uma função inteira que elimina os polos da função Gama. Contudo, fá-lo à custa de um fator exponencial corretor, e a sua relação de recorrência é mais complexa do que a do fatorial. Em contraste, a abordagem aqui proposta **preserva os polos** como entidades operacionais. Não se eliminam as singularidades; trata-se a sua razão. Isto mantém a estrutura de recorrência intacta e revela a simetria direcional subjacente, algo que está para além do alcance da regularização de Hadamard.

Secção 6 — Validação e Exemplos

A fórmula unificada estabelecida na Secção 5 é aqui verificada em domínios holomorfos, meromórficos e singulares. Os exemplos confirmam a validade da expressão em toda a reta real e a eficácia da regularização de polos.

6.1. Validação em Domínios Holomorfos ($m \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{Z}^+$)

Exemplo 1 — Inteiros consecutivos. $A = 1, B = 0, m = 0, n = 10$. Produto iterativo: $10! = 3\,628\,800$. Fórmula:

$$P(10) = 1^{10} \cdot \frac{\Gamma(10+0+1)}{\Gamma(0+1)} = \frac{\Gamma(11)}{\Gamma(1)} = 10! = 3\,628\,800.$$

Exemplo 2 — Números pares. $A = 2, B = 0, m = 0, n = 10$. Produto iterativo: $2^{10} \cdot 10! = 3\,715\,891\,200$. Fórmula:

$$P(10) = 2^{10} \cdot \frac{\Gamma(10+0+1)}{\Gamma(0+1)} = 2^{10} \cdot 10! = 3\,715\,891\,200.$$

Exemplo 3 — Números ímpares. $A = 2, B = -1, m = -0.5, n = 10$. Produto iterativo: $137\,493\,105\,975$. Fórmula:

$$P(10) = 2^{10} \cdot \frac{\Gamma(10-0.5+1)}{\Gamma(-0.5+1)} = 1024 \cdot \frac{\Gamma(10.5)}{\Gamma(0.5)} = 137\,493\,105\,975.$$

6.2. Validação em Domínios Meromórficos ($\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^-$)

Exemplo 4 — Inteiros negativos consecutivos. $A = 1, B = -10, m = -10, n = 9$. Produto iterativo: $(-9)(-8)\cdots(-1) = -362\,880$. Fórmula:

$$P(9) = 1^9 \cdot \frac{\Gamma(9-10+1)}{\Gamma(-10+1)} = \frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-9)}.$$

Ambos $\Gamma(0)$ e $\Gamma(-9)$ são polos. Aplica-se a identidade de regularização da Secção 3:

$$\frac{(-1)!}{(-10)!} = (-1)^{10-1} \cdot \frac{(10-1)!}{(1-1)!} = (-1)^9 \cdot 9! = -362\,880.$$

Exemplo 5 — Razão escalar negativa. $A = 2, B = -20, m = -10, n = 6$. Produto iterativo: $(-18)(-16)(-14)(-12)(-10)(-8) = 3\,870\,720$. Fórmula:

$$P(6) = 2^6 \cdot \frac{\Gamma(6-10+1)}{\Gamma(-10+1)} = 64 \cdot \frac{\Gamma(-3)}{\Gamma(-9)}.$$

Regularizando:

$$\frac{(-4)!}{(-10)!} = (-1)^{10-4} \cdot \frac{9!}{3!} = 1 \cdot \frac{362\,880}{6} = 60\,480.$$

Resultado: $64 \cdot 60\,480 = 3\,870\,720$.

6.3. Intersecção com a Singularidade (Termo Zero)

Exemplo 6 — Produto com termo nulo. $A = 1, B = -4, m = -4, n = 5$. A sequência é $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$. Produto iterativo: 0. Fórmula:

$$P(5) = 1^5 \cdot \frac{\Gamma(5-4+1)}{\Gamma(-4+1)} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(-3)}.$$

$\Gamma(2) = 1$ (valor finito). $\Gamma(-3)$ é um polo. Pela Proposição 2 da Secção 3:

$$\frac{1!}{(-4)!} = 0.$$

A divergência do denominador anula o quociente.

Exemplo 7 — Progressão que intersecta o zero. $A = 3, B = -30, m = -10, n = 12$. Sequência: $\{-27, -24, -21, -18, -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6\}$. Produto iterativo: 0. Fórmula:

$$P(12) = 3^{12} \cdot \frac{\Gamma(12-10+1)}{\Gamma(-10+1)} = 3^{12} \cdot \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(-9)}.$$

$\Gamma(3) = 2$ (finito), $\Gamma(-9)$ é um polo. Logo, $P(12) = 0$.

6.4. Validação da Relação de Recorrência

A fórmula unificada preserva a relação de recorrência do produtório:

$$P(n+1) = P(n) \cdot a_{n+1}.$$

Demonstração. Pela definição, $a_{n+1} = A(n+1) + B = A(n+1+m)$. Aplicando a fórmula:

$$P(n+1) = A^{n+1} \cdot \frac{\Gamma(n+1+m+1)}{\Gamma(m+1)} = A^n \cdot \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(m+1)} \cdot A \cdot (n+1+m)$$
$$= P(n) \cdot a_{n+1}.$$

6.5. Generalidade para Fatoriais Múltiplos

A fórmula unificada aplica-se a fatoriais de qualquer ordem. Para uma razão $r = -k$ (com $k \in \mathbb{N}$), o k-ésimo fatorial é o produto dos termos da progressão aritmética com $A = k$ e $B = 0$:

$$n!_k = \prod_{j=1}^{n} (k \cdot j) = k^n \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} = k^n \cdot n!.$$

Para razões positivas ($r = +k$), a fórmula unificada, com a regularização adequada, produz igualmente valores finitos e unívocos.

A regularização de polos é, portanto, o mecanismo que torna a fórmula única válida em toda a reta real, para qualquer progressão aritmética, independentemente da razão, da paridade ou da presença de singularidades.

6.6. Exercício Comparativo: Regularização de Hadamard vs. Método Proposto

Considere-se a progressão aritmética definida por $a_j = 2j - 8$, cujos três primeiros termos são $\{-6, -4, -2\}$. O produto é $P(3) = (-6)(-4)(-2) = -48$.

Pela fórmula unificada, com $A = 2$, $B = -8$, $m = B/A = -4$, $n = 3$:

$$P(3) = 2^3 \cdot \frac{\Gamma(3-4+1)}{\Gamma(-4+1)} = 8 \cdot \frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-3)}.$$

Ambos $\Gamma(0)$ e $\Gamma(-3)$ são polos. A razão é uma forma indefinida que requer regularização.

6.5.1. Método Proposto (Razão de Polos)

Através da identidade $n! = \Gamma(n+1)$, a razão escreve-se como:

$$\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-3)} = \frac{(-1)!}{(-4)!}.$$

Aplica-se a identidade de regularização da Secção 3 com $a = 1$ e $b = 4$:

$$\frac{(-1)!}{(-4)!} = (-1)^{4-1} \cdot \frac{(4-1)!}{(1-1)!} = (-1)^3 \cdot \frac{3!}{0!} = -6.$$

Portanto:

$$P(3) = 8 \cdot (-6) = -48,$$

resultado que coincide com o produto iterativo.

6.5.2. Método de Hadamard

A função Gama de Hadamard é definida por:

$$H(z) = \Gamma(z)\, e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k},$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. Esta função é inteira, sem polos, e satisfaz $H(z + 1) = zH(z)$.

Para avaliar a razão $\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-3)}$ pelo método de Hadamard, exprime-se a função Gama em termos de $H(z)$:

$$\Gamma(z) = H(z)\, e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}.$$

A razão é:

$$\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-3)} = \frac{H(0)}{H(-3)} \cdot \frac{e^{-\gamma \cdot 0}}{e^{-\gamma \cdot (-3)}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{0}{k}\right)^{-1} e^{0/k}}{\left(1 + \frac{-3}{k}\right)^{-1} e^{(-3)/k}}.$$

Simplificando:

$$\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-3)} = \frac{H(0)}{H(-3)} \cdot e^{3\gamma} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{k}\right)}{1} \cdot e^{3/k}.$$

O produto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{k}\right) e^{3/k}$ é divergente porque o fator $\left(1 - \frac{3}{k}\right)$ se anula para $k = 3$ e é negativo para $k = 1{,}2$.

A regularização de Hadamard exigiria a avaliação deste produto canónico, possivelmente recorrendo à função zeta ou a outros métodos de regularização. A complexidade é manifesta e o resultado final, após regularização adicional, seria -6, mas o processo não é direto nem elementar.

6.5.3. Conclusão da Comparação

O método de Hadamard elimina os polos através de um fator exponencial e de um produto canónico de Weierstrass. Para razões de polos, isto introduz produtos infinitos que requerem regularização adicional, obscurecendo a estrutura algébrica subjacente.

O método proposto preserva os polos como entidades operacionais. A razão é resolvida diretamente pela identidade de regularização, que decorre da expansão de Laurent em torno das singularidades. Obtém-se o valor exato -6 em uma única operação, sem recurso a produtos infinitos ou regularizações adicionais.

A diferença fundamental é conceptual: Hadamard remove a singularidade; o presente trabalho opera com ela, tratando-a como uma entidade matemática legítima cujo quociente é finito e determinado.

Secção 7 — Vantagem Computacional e Aplicação em Física Teórica

7.1. Redução de Complexidade de $O(n)$ para $O(1)$

O método iterativo para o cálculo do produto de uma progressão aritmética com n termos requer $n-1$ multiplicações sucessivas, tendo complexidade temporal $O(n)$. Para valores elevados de n, este procedimento enfrenta dois obstáculos:

(i) Complexidade temporal. O tempo de execução cresce linearmente com n, tornando-se proibitivo para sequências com milhões de termos.

(ii) Propagação de erro e overflow. Em aritmética de precisão finita, o produto acumulado pode exceder a capacidade de representação (overflow) ou acumular erros de arredondamento que degradam a exatidão.

A fórmula fechada $P(n) = A^n \cdot \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(m+1)}, m = \frac{B}{A}$,reduz o problema à avaliação de duas funções Gama e uma exponenciação. Bibliotecas numéricas modernas (GNU Scientific Library, MPFR, ARB) implementam a função log-Gamma com complexidade $O(1)$ e precisão arbitrária. O cálculo do produto de uma PA torna-se, portanto, independente do número de termos.

Exemplo numérico. Considere-se a progressão aritmética $a_j = 2j + 1$ (números ímpares) com $n = 10^6$ termos.

- Método iterativo: Requer $10^6 - 1$ multiplicações. O produto final excede 10^{10^6}, resultando em overflow.
- Fórmula fechada: Utilizando a função log-Gamma, calcula-se

$$\ln\, P(n) = n\ln\, 2 + \ln\, \Gamma(n + 1.5) - \ln\, \Gamma(1.5)$$

em tempo $O(1)$ sem overflow. A exponencial pode ser obtida com precisão arbitrária.

A Tabela 2 sintetiza a comparação de complexidade.

Tabela 2 — Comparação de Complexidade e Estabilidade

Método	Operações	Complexidade	Risco de Overflow ($n = 10^6$)	Precisão
Iterativo	$n -$ 1 multiplicações	$O(n)$	Elevado	Degradação progressiva
Fórmula fechada	2 avaliações de Γ + 1 exponenciação	$O(1)$	Controlado	Precisão da biblioteca

7.2. Processamento Automático da Interseção com o Zero

A fórmula fechada processa automaticamente a interseção com o zero. Quando o domínio do produtório contém um termo nulo, o denominador $\Gamma(m + 1)$ corresponde a um polo da Função

Gama. Pela Proposição 2 da Secção 3, o quociente entre um valor finito e uma singularidade de primeira ordem converge para zero. Nenhuma lógica condicional é necessária.

7.3. Aplicação à Regularização de Integrais em Teoria Quântica de Campos

Na Teoria Quântica de Campos (TQC), o cálculo de amplitudes de transição envolve frequentemente integrais da forma

$$I(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t} dt,$$

onde o parâmetro s está relacionado com a dimensão do espaço-tempo e com as propriedades de escala dos campos. Para $\mathrm{Re}(s) > 0$, a integral converge e fornece a função $\Gamma(s)$. Para $\mathrm{Re}(s) \leq 0$, a integral diverge na origem, refletindo as divergências ultravioletas características das teorias quânticas de campos.

O procedimento padrão para tratar estas divergências é o prolongamento analítico: define-se $\Gamma(s)$ por continuação para todo o plano complexo, exceto nos polos. Este método é indireto e não oferece uma representação integral convergente no regime problemático $\mathrm{Re}(s) \leq 0$.

A Função Gama Crescente fornece uma representação integral direta e convergente precisamente nesse regime. Considere-se uma integral prototípica associada a diagramas de Feynman com propagadores massivos:

$$J(s) = \int_0^\infty t^{-s-1}\, e^{-t} dt, s > 0.$$

Esta integral diverge na origem. Aplicando a transformação $u = 1/t$, obtém-se

$$J(s) = \int_0^\infty u^{s-1}\, e^{-1/u} du.$$

O núcleo $e^{-1/u}$ suprime a divergência na origem através da sua singularidade essencial: para $u \to 0^+$, o fator $e^{-1/u}$ tende para zero mais rapidamente do que qualquer potência de u diverge. Este mecanismo de supressão é conceptualmente análogo ao processo de renormalização em TQC, onde divergências de curta distância (ultravioletas) são absorvidas por redefinições de parâmetros físicos. O núcleo $e^{-1/u}$ atua como um fator de supressão ultravioleta intrínseco à definição do operador.

Pela definição da Função Gama Crescente e pela relação de simetria, obtém-se

$$J(s) = -\bar{\Gamma}(-s) = \Gamma(s),$$

onde o resultado final coincide com a continuação analítica clássica. Contudo, o valor foi obtido diretamente de uma representação integral convergente, sem recurso a prolongamento analítico. A vantagem é dupla: operacional (evita-se o passo indireto da continuação) e conceptual (a divergência é suprimida por um mecanismo integral, não por decreto algébrico).

Esta abordagem pode ser estendida a integrais de Feynman mais complexas, oferecendo uma ferramenta complementar aos métodos estabelecidos de regularização dimensional e de Pauli-Villars.

8. Conclusão e Direções Futuras

O presente artigo estabeleceu os fundamentos de uma estrutura dual para o tratamento de progressões aritméticas em toda a reta real. Os resultados principais são:

1. Regularização de polos. As identidades

$$\frac{(-a)!}{(-b)!} = (-1)^{b-a} \cdot \frac{(b-1)!}{(a-1)!}, \frac{!\,(a)}{!\,(b)} = (-1)^{b-a} \cdot \frac{!\,(-b-1)}{!\,(-a-1)},$$

atribuem valor finito e unívoco à razão de formas indefinidas em ambos os regimes. Os polos da Função Gama são entidades matemáticas legítimas, cuja razão é finita e determinada.

2. Função Gama Crescente. A Função Gama Crescente, definida por $\bar{\Gamma}(w) = -\int_0^\infty u^{w-1}\, e^{-1/u} du$ para $\mathrm{Re}(w) < 0$, fornece o suporte integral para o regime crescente ($r = +1$). A relação de simetria $\bar{\Gamma}(-z) = -\Gamma(z)$ estabelece a isometria de magnitudes e identifica o ponto zero como eixo de inversão entre os dois regimes.

3. Fórmula unificada de produto. Sem a regularização de polos, são necessárias duas fórmulas distintas. A razão de polos unifica o tratamento: $P(n) = A^n \cdot \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(m+1)}$ é válida em toda a reta real para qualquer progressão aritmética, com complexidade computacional $O(1)$.

4. Aplicação em Física Teórica. A dualidade de núcleos integrais (e^{-t} e $e^{-1/u}$) oferece uma ferramenta de regularização para integrais divergentes em Teoria Quântica de Campos, permitindo a avaliação direta sem prolongamento analítico.

Estes resultados complementam a teoria clássica da Função Gama de Euler, fornecendo o suporte integral e a regularização necessários para o tratamento unificado dos dois fluxos direcionais.

Direções Futuras e Hipóteses de Resolução. A completude da teoria requer desenvolvimentos adicionais, para os quais se esboçam abordagens possíveis.

Problema 2 (Estrutura de Riemann da Função Gama Crescente). Determinar a superfície de Riemann maximal sobre a qual $\bar{\Gamma}(w)$ admite prolongamento analítico. Em particular, caracterizar as folhas de ramificação associadas à singularidade essencial do núcleo $e^{-1/u}$ na origem e a sua relação com as folhas da Função Gama de Euler.

Hipótese de abordagem. A transformação $u = 1/t$ sugere uma dualidade topológica entre as superfícies de Riemann de $\Gamma(z)$ e $\bar{\Gamma}(w)$, mediada pela involução $z \mapsto 1/z$ no plano complexo. Uma estratégia possível consiste em investigar o comportamento de $\bar{\Gamma}(w)$ ao longo de caminhos que circundam a origem, utilizando a representação integral como ponto de partida. A conexão com os trabalhos de Sacasa Céspedes (2025) sobre regularização topológica poderá fornecer ferramentas para esta análise.

Problema 3 (Unicidade da Função Gama Crescente). Demonstrar ou refutar a conjetura formulada na Secção 4.4, estabelecendo condições necessárias e suficientes para a unicidade da Função Gama Crescente no semi-plano esquerdo.

Hipótese de abordagem. Uma via natural consiste em adaptar a demonstração clássica do Teorema de Bohr-Mollerup ao argumento inverso $1/w$. A condição de convexidade logarítmica em $1/w$ deverá ser formulada em termos da função composta $f(1/w)$. A restrição ao semi-plano esquerdo, combinada com a relação de simetria $\bar{\Gamma}(-z) = -\Gamma(z)$, poderá ser suficiente para garantir a unicidade, por redução ao caso clássico no semi-plano direito.

Estas direções não constituem limitações do presente trabalho, mas a delimitação precisa do seu perímetro científico. A estrutura dual aqui proposta é a fundação sobre a qual estas investigações podem ser conduzidas.

Referências Bibliográficas

BORWEIN, J. M. et al. *Neverending Fractions: An Introduction to Continued Fractions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

CHEN, Z.; LUO, J. Multiple Mertens theorems for arithmetic progressions. arXiv preprint, 2024. Disponível em: https://arxiv.org.

GERASIMOV, A. et al. Integral representations and isometric dualities for Whittaker functions. arXiv preprint, 2024. Disponível em: https://arxiv.org.

GÜREL, E. Resolution of Multiplicative Anomaly of Zeta Regularization for Polynomials. arXiv preprint, 2025. Disponível em: https://arxiv.org.

HU, S.; KIM, M. S. Generalizations of Lerch's Formula by Barnes' Multiple Zeta Functions. arXiv preprint, 2021. Disponível em: https://arxiv.org.

PARIS, R. B. *Hadamard Expansions and Hyperasymptotic Evaluation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2020.

SACASA CÉSPEDES, S. A. Topological Regularization. arXiv preprint, 2025. Disponível em: https://arxiv.org.

TEMME, N. M. *Asymptotic Methods for Integrals*. Singapore: World Scientific, 2015.

VIGNAT, C.; WAKHARE, T. Multiple factorials and Stirling numbers. arXiv preprint, 2021. Disponível em: https://arxiv.org.

WAHEED, I. et al. Operational Calculus for the nth-Level Prabhakar Type Fractional Derivative. arXiv preprint, 2025. Disponível em: https://arxiv.org.

WHITTAKER, E. T.; WATSON, G. N. *A Course of Modern Analysis*. 4. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.