

# Title: Determinación de distancias mediante redshift y la expansión del universo. Modelo de materia oscura para sistemas en rotación.

## Abstract

El potencial de las fuerzas de inercia es el efecto predominante para determinar el redshift de fotones extragalácticos. Dicho efecto determina, de manera precisa, la distancia al objeto si se conoce su velocidad radial.

**Autor:** Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.  
Ingeniero Industrial.

**Email:** enrique\_pinos@yahoo.es

Este proyecto precisa de financiación, no dude en contactar para apoyarlo.

Málaga, 30 de Enero de 2025 (revisado a 6 de Mayo de 2025)

## Table of Contents

Introducción.....	1
Modelización del redshift por fuerzas de inercia.....	2
Influencia de la excentricidad de órbita en el potencial.....	4
Datos del Strasbourg astronomical Data Center (CDS).....	9
Modelo de materia oscura para sistemas en rotación.....	12
Comentarios finales.....	19
Anexo I: Cálculo del flujo de trabajo de la aceleración de inercia.....	20
Obtención de la aceleración de inercia mediante cuaternios.....	21
Anexo II: Datos de rotación.....	23
Anexo III: Trazado de la curva de rotación.....	25
Anexo IV: Obtención y procesado de datos astronómicos del CDS.....	26
Anexo V: Compensación de rotaciones con cuaternios.....	28
Anexo VI: Escalado del potencial con datos de prueba.....	29
Supernovas Ia.....	29
Cefeidas.....	32
Referencias.....	34

## Introducción

El ‘principio de equivalencia’ de Einstein establece la equivalencia entre una aceleración y un potencial gravitatorio. Es la base para explicar los experimentos denominados de ‘rotor mossbauer’. En estos experimentos se dispone un disco plano con la capacidad de rotar sobre su eje a gran velocidad, y se sitúa en el eje un receptor y en la periferia del disco un emisor. El receptor usa el efecto mossbauer para detectar los fotones que envía el emisor; cuya frecuencia está controlada estrechamente. El sistema dispuesto como se ha indicado, puede medir el redshift entre emisor y

receptor, provocado por las fuerzas de inercia en el disco giratorio. Como el receptor sólo puede detectar una frecuencia específica, se recurre a imprimirle cierta velocidad; de modo que, mediante el efector doppler relativista, se compense el redshift de las fuerzas de inercia con un blueshift. Se señala este hecho para dejar bien claro que son efectos distintos, que hay que considerar independientemente.

En adelante denominaremos al redshift por fuerzas de inercia simplemente 'redshift de inercia'.

El principio del rotor mossbauer se aplica del mismo modo a la vía láctea; el disco es la propia galaxia, el receptor son nuestros instrumentos, y el emisor los objetos extragalácticos. Por no complicar la explicación vamos a tratar los objetos extragalácticos como puntuales (para no considerar su rotación).

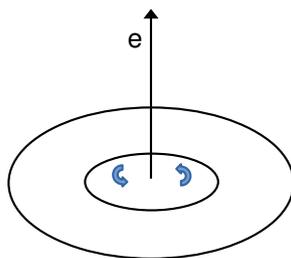
El efecto se identificó durante la realización del cálculo de la masa de los neutrinos en el evento SN1987A<sup>[6]</sup>, cuando se empleaban potenciales másicos para evaluar el redshift (entre la vía láctea y la gran nube de magallanes) y se comprobó que el valor que arrojaba era varios órdenes de magnitud inferior al redshift medido por los instrumentos.

Expondremos, además, un modelo de materia oscura basada en la fuerza de inercia, al menos para las curvas de rotación de galaxias. Obviamente no se descarta que no sea esta fuerza el único ingrediente de la materia oscura, pero en cuanto a la rotación de galaxias, parece ser crucial.

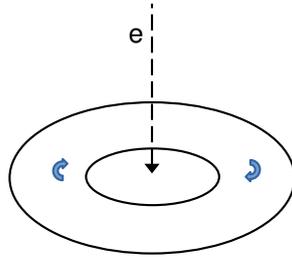
Por lo expuesto, se llega a la conclusión de que el universo no está en expansión y que la materia oscura, para sistemas en rotación, podría quedar explicada con la fuerza de inercia como componente principal.

## Modelización del redshift por fuerzas de inercia

Como se observa en la figura, consideramos que la galaxia (disco interior) rota sobre su eje 'e' respecto al resto del universo (disco exterior), dicho eje pasa por el centro galáctico (origen de referencia de distancias)



Cumpliendo con el principio de relatividad, es irrelevante si consideramos que la galaxia está estática y es el resto del universo el que rota entorno a nuestra galaxia o al revés. Considerarlo de esta manera explica la razón de que predominantemente veamos un redshift del resto de objetos del universo. En este escenario, no importa que no estemos situados en el eje de rotación; al considerar que no rotamos, el potencial de las fueras de inercia es nulo de nuestro lado. Señalar que lo que interesa para determinar correctamente el efecto, es el eje de rotación del sol (no el de la galaxia) a la velocidad de rotación del sol (no de la galaxia). Aunque lo vamos a ilustrar suponiendo que ambas velocidades coinciden.



En estas condiciones, el potencial de las fuerzas de inercia es<sup>[8]</sup>,

$$U = -\frac{w^2 r^2}{2},$$

donde 'w' es la velocidad de rotación en km/(s·kpc), 'r' es la distancia (mínima) al eje de rotación y 'c' la velocidad de la luz.

Y el redshift se calcula como,

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U}{c^2}\right) - 1,$$

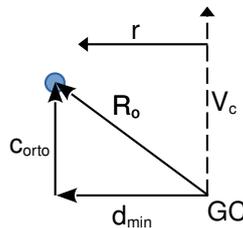
dando,

$$z = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{wr}{c}\right)^2\right) - 1,$$

La intención inicial del cálculo del redshift proviene de comprobar si en la propia expresión del redshift aparece o no la exponencial. Esto únicamente puede probarse en un test cosmológico. Ver la referencia [5] para la deducción de la expresión del redshift. En el caso de que la exponencial no formara parte de la ecuación tendríamos,

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{wr}{c}\right)^2.$$

Para calcular 'r' recurrimos al vector característico del plano de la galaxia; y construimos un triángulo rectángulo con la proyección del vector de posición el objeto a estudiar sobre el vector característico unitario (eso nos da un cateto) y el vector de posición del objeto a estudiar nos da la hipotenusa. El cateto restante es la distancia mínima.



GC: representa al centro galáctico, desde donde se calcula la posición al objeto de estudio.

En ecuaciones, si 'V<sub>c</sub>' es el vector característico del plano, y 'R<sub>o</sub>' el vector de posición del objeto a estudiar; proyectamos el vector de posición sobre el característico unitario 'V<sub>cu</sub>', eso nos da un cateto 'C<sub>orto</sub>',

$$\hat{V}_{cu} = \frac{\vec{V}_c}{\|\vec{V}_c\|},$$

$$c_{orto} = \hat{V}_{cu} \cdot \vec{R}_o.$$

La hipotenusa es el módulo del vector 'R<sub>o</sub>', por lo que la distancia mínima es,

$$d_{min} = \sqrt{\vec{R}_o \cdot \vec{R}_o - (\hat{V}_{cu} \cdot \vec{R}_o)^2}.$$

Esta distancia mínima es el valor de 'r' buscado.

Esta expresión la podemos reescribir sacando factor común el módulo de la distancia R<sub>o</sub>,

$$d_{min} = R_o \sqrt{\hat{R}_o \cdot \hat{R}_o - (\hat{V}_{cu} \cdot \hat{R}_o)^2}.$$

Para obtener la distancia R<sub>o</sub> desde el redshift, seguimos el proceso inverso; con el redshift calculamos r=dmin,

$$d_{min} = \frac{c \sqrt{2 \ln(z+1)}}{w}.$$

Y ese valor lo introducimos en la expresión del triángulo rectángulo; sacando la distancia al GC,

$$R_o = \frac{d_{min}}{\sqrt{\hat{R}_o \cdot \hat{R}_o - (\hat{V}_{cu} \cdot \hat{R}_o)^2}}.$$

## Influencia de la excentricidad de órbita en el potencial

Cuando la excentricidad (e) no es pequeña o el tiempo de tránsito del fotón es muy superior al período de rotación (T), el redshift calculado con el potencial es sólo una aproximación. Para e>0.01 o largos períodos de integración de la trayectoria del fotón con respecto a T, hay que hacer uso de la expresión general, ver referencia [5],

$$z = \exp\left(\frac{\Delta U - W_{FNC}}{c^2}\right) - 1,$$

que, sin potencial,

$$z = \exp\left(\frac{W_{FNC}}{c^2}\right) - 1.$$

El trabajo de las fuerzas de inercia lo vamos a calcular como el producto de la fuerza de inercia por la velocidad,

$$\frac{-dW_{FNC}}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{v},$$

o, cambiando el signo de lado de la igualdad,

$$\frac{dW_{FNC}}{dt} = \vec{a}_i \cdot \vec{v},$$

donde ahora sustituiremos directamente la aceleración de inercia (nótese que la expresión porta un signo menos que no es preciso en el caso de que se pudiera usar el potencial).

Los detalles se encuentran en el Anexo I: Cálculo del flujo de trabajo de la aceleración de inercia. La expresión final es,

$$\frac{dW_{FNC}}{dt} = (x v_y - y v_x) \ddot{\theta} + (x v_x + y v_y) \dot{\theta}^2 + (x^2 + y^2) \dot{\theta} \ddot{\theta}.$$

Para evaluar la ecuación diferencial necesitamos los datos de la trayectoria de rotación del objeto. Se han resumido las ecuaciones en el Anexo II: Datos de rotación. Los datos son,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= k(1 + e \cos(\omega t))^2, \\ \ddot{\theta} &= -2k e \omega \sin(\omega t)(1 + e \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

Para integrar la ecuación diferencial en el caso de un fotón que se acerca al objeto en rotación, vamos a integrar desde el punto en que se realiza la medida ( $x=y=0$ ) donde el trabajo es cero y nos vamos a alejar del objeto en rotación en línea recta (como lo haría un fotón idealmente). Por lo dicho, las condiciones iniciales quedan,

$$t=0, x=ct, y=0, v_x=c, v_y=0.$$

Y la ecuación diferencial se convierte en,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{W_{FNC}}{c^2} \right) = t \dot{\theta}^2 + t^2 \dot{\theta} \ddot{\theta},$$

si definimos,

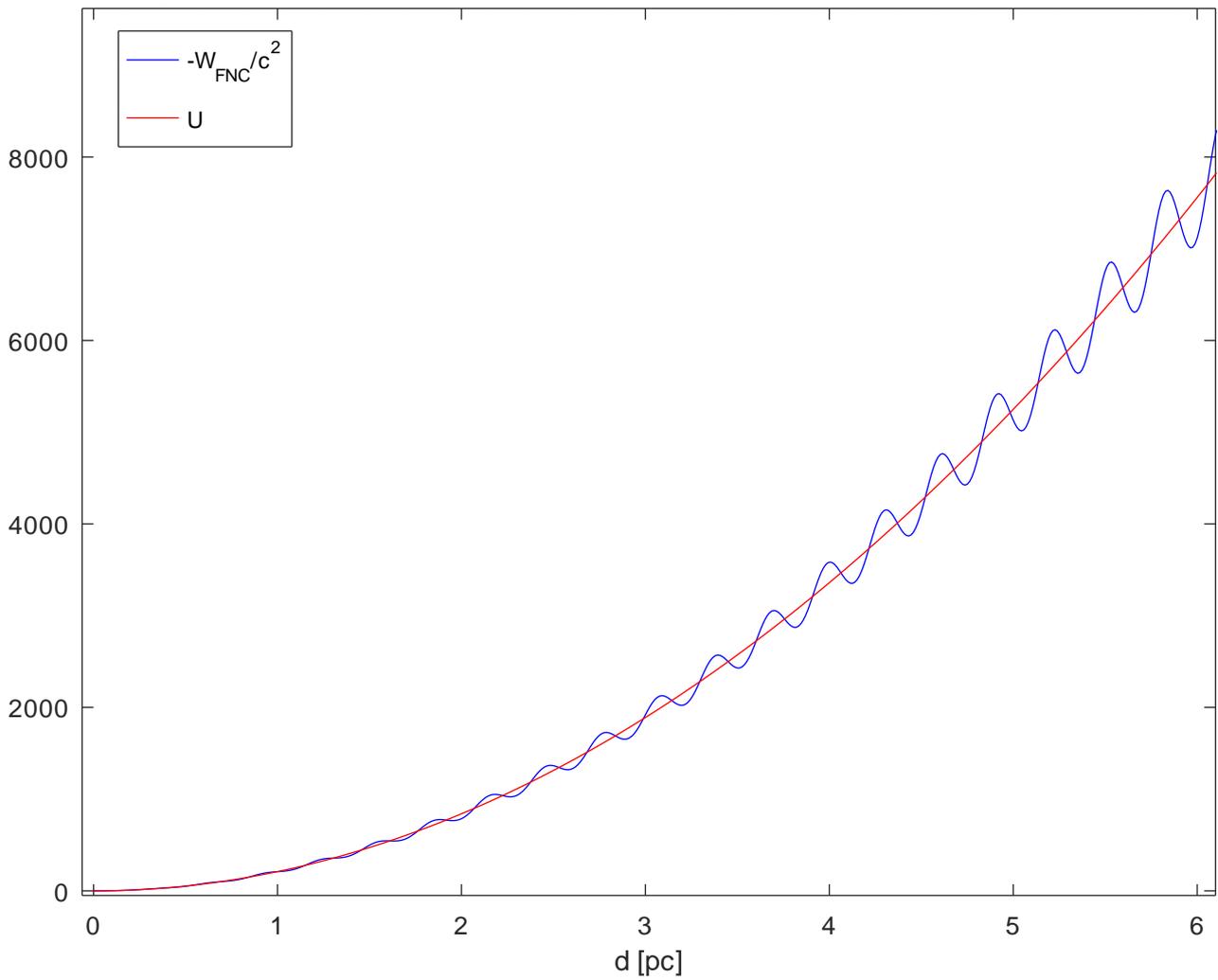
$$Q = \frac{W_{FNC}}{c^2},$$

queda,

$$\frac{dQ}{dt} = t \dot{\theta} (t \ddot{\theta} + \dot{\theta}).$$

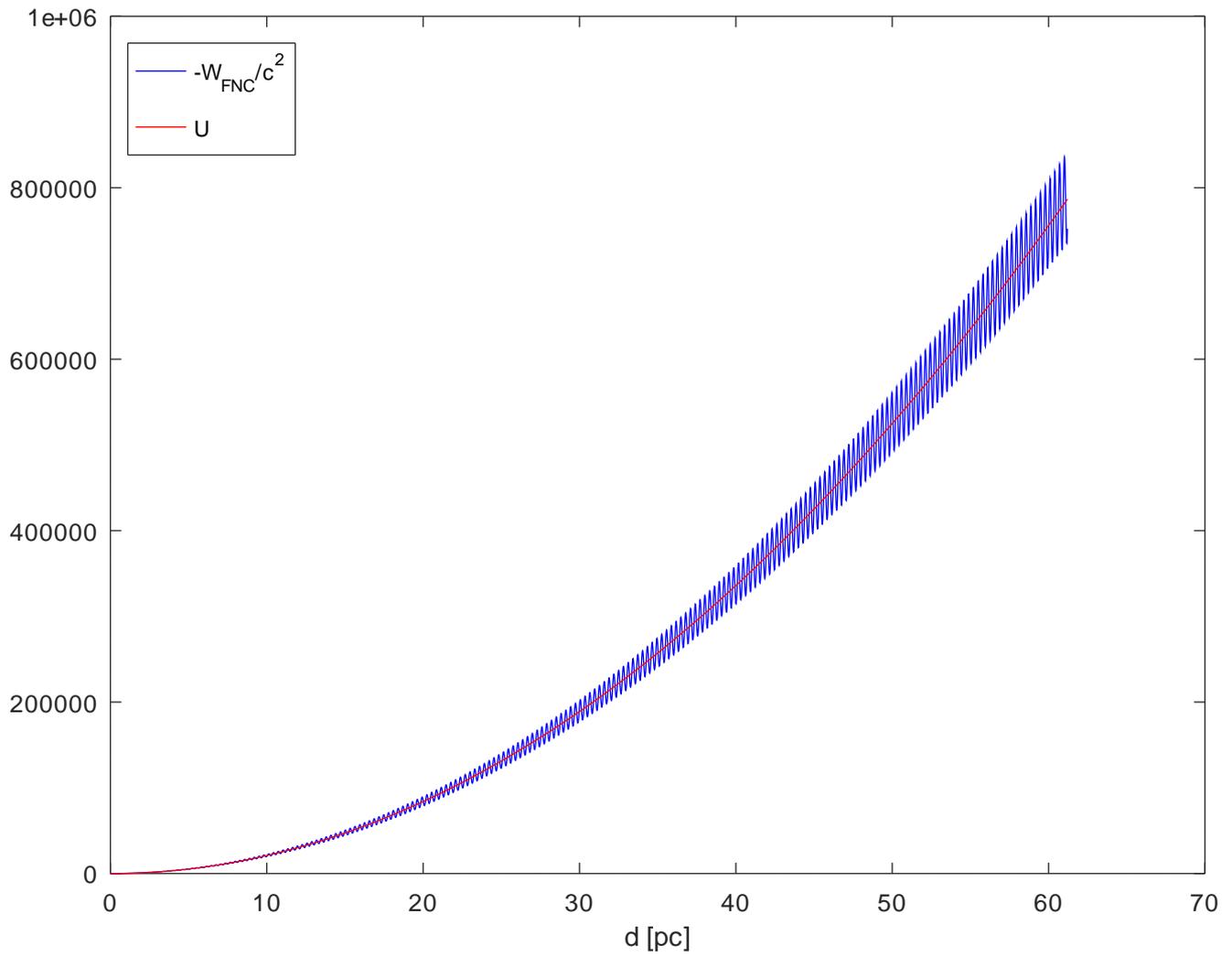
Vamos a dar los resultados de la integración en dos casos, con excentricidad alta (sistema sol-centro galáctico) y con excentricidad baja (sistema tierra-sol).

Para excentricidad baja, a 6 parsécs (pc),



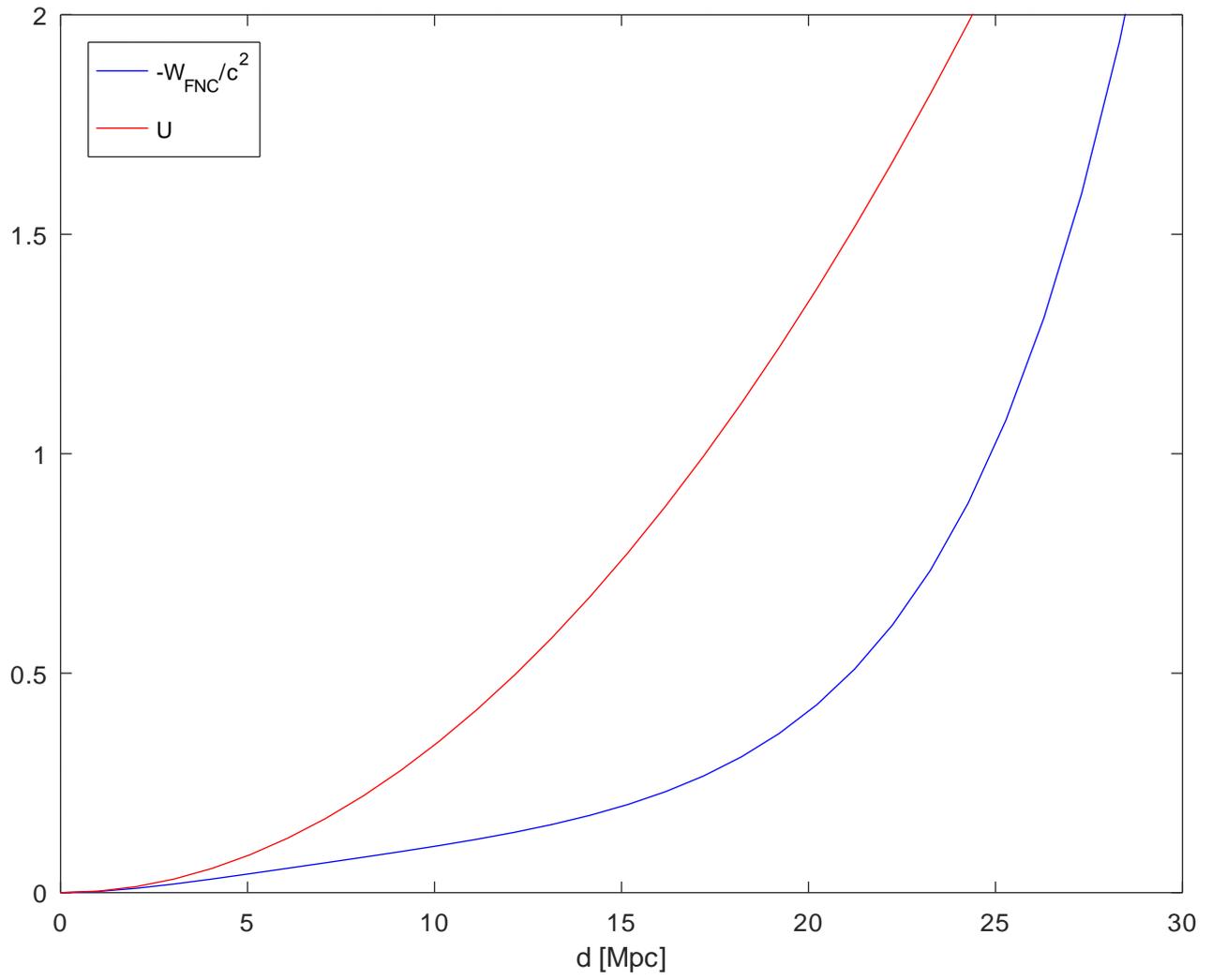
La leyenda del gráfico muestra  $-W_{FNC}$  para recordar al lector que no es un trabajo al uso, esto es, fuerza por velocidad integrada sobre el tiempo; en su lugar es una aceleración (de inercia) por la velocidad, integrada sobre el tiempo.

Mientras que a 60 pc,

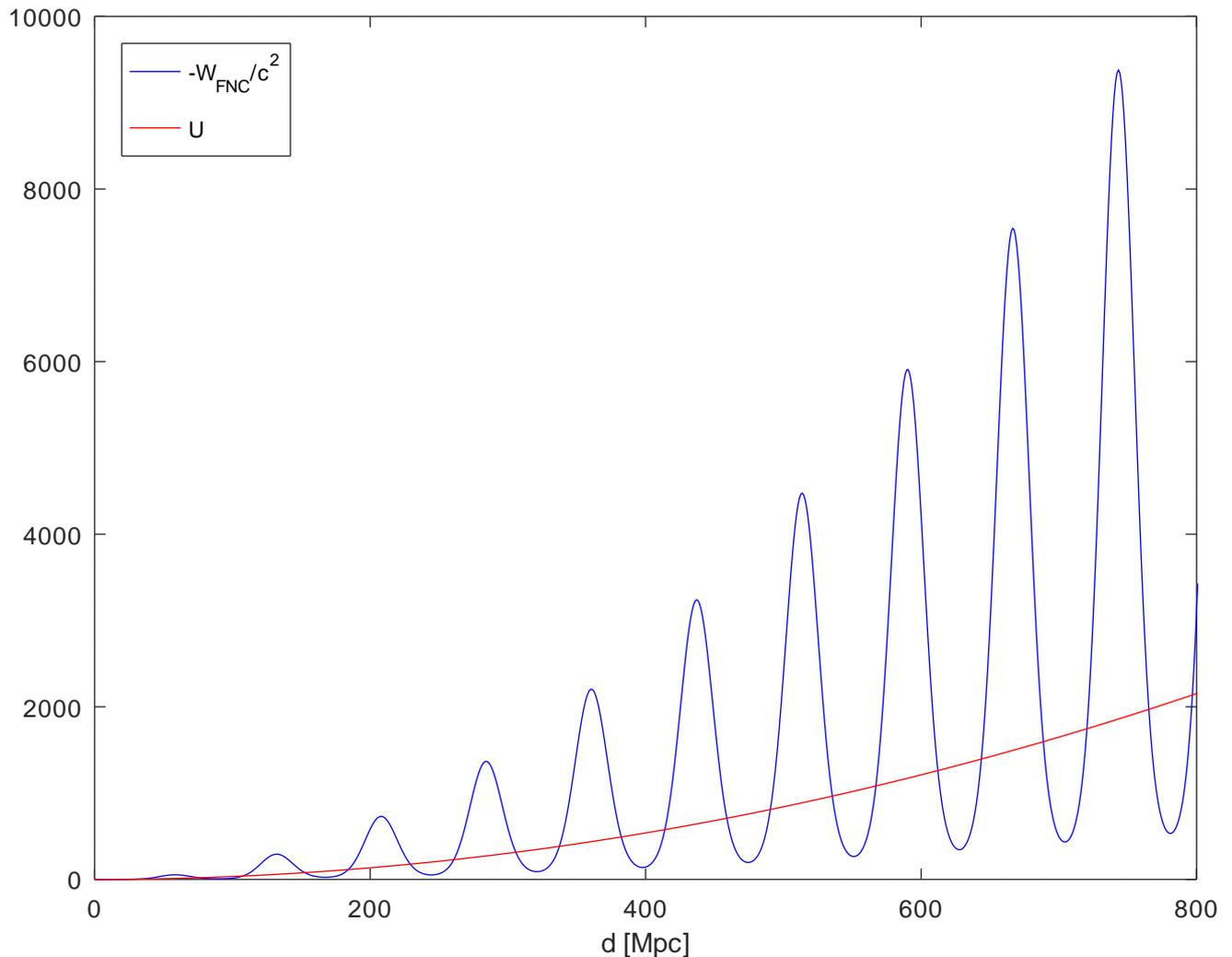


Donde se ve que el potencial es una buena primera aproximación para excentricidades bajas.

Para el sistema con excentricidad alta, a 30 Mpc, ya se aprecia un error importante,



Y a 800 Mpc,



El potencial subestima la tendencia real.

## Datos del Strasbourg astronomical Data Center (CDS)

Para evaluar los datos de prueba, prestemos atención al hecho de que toda rotación sin compensación va a aparecer en los datos de redshift como una parábola (dentro de una exponencial).

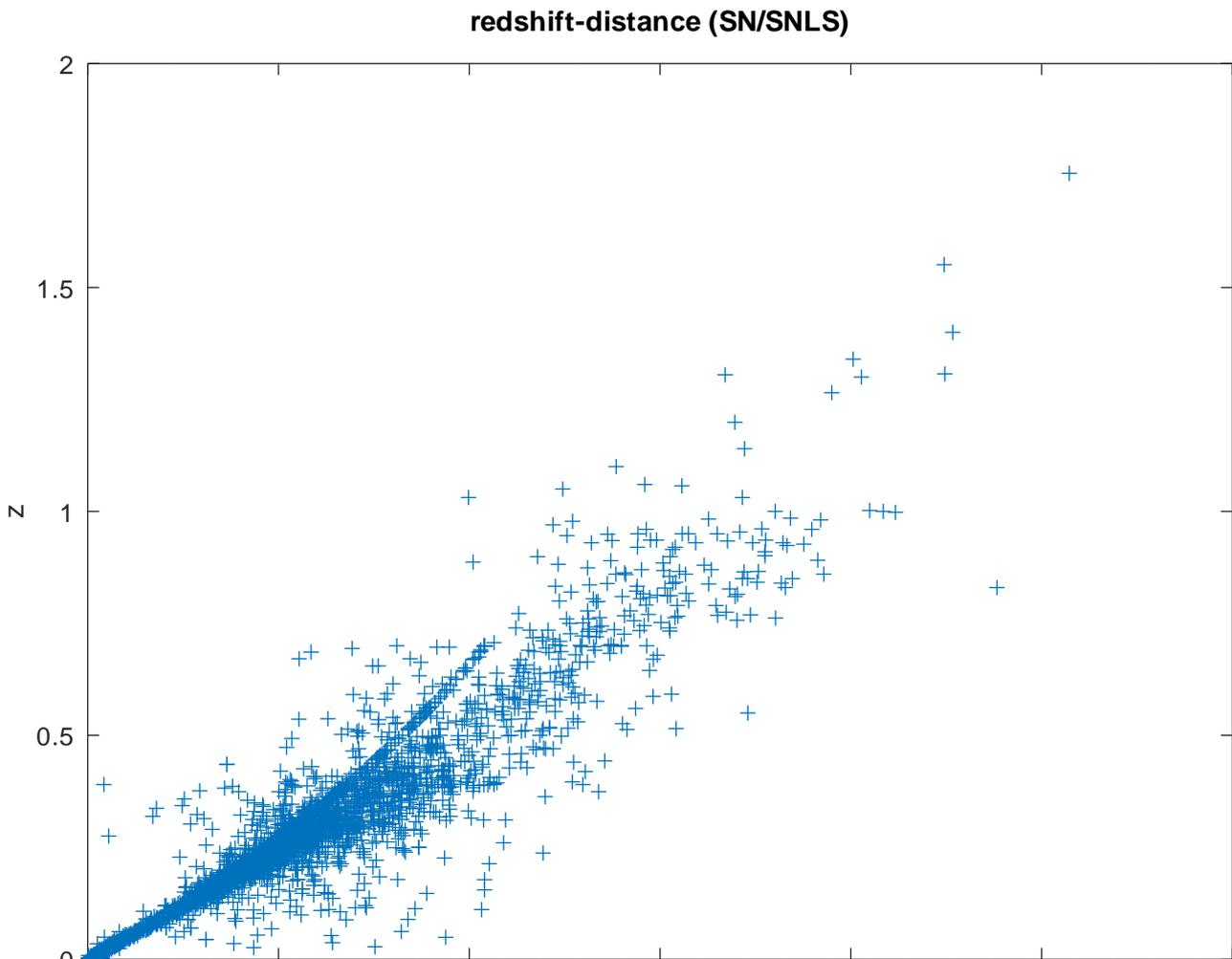
Para entender qué efectos se han compensado y cuales no, pensemos en que cuando se observa una estrella, el movimiento de rotación de la tierra (sobre su propio eje) y el movimiento de rotación de la tierra entorno al sol, hacen que el objeto celeste salga del campo de visión progresivamente. Sólo cuando ambos efectos se compensan aplicando una rotación 'opuesta' se mantiene la estrella en el objetivo.

La rotación del sol entorno al centro galáctico (GC), es una rotación que pasará desapercibida al observador, por lo que no se aplica corrección sobre ella. Posiblemente también sea muy difícil hacerlo desde el punto de vista técnico, al menos para un telescopio terrestre, ya que en el espacio pueden realizarse rotaciones mucho más precisas.

Si se hace la medición con compensación de todas las rotaciones existentes, se puede determinar directamente su velocidad radial. Ahora usando los datos de redshift sin compensación, podríamos determinar la distancia al objeto.

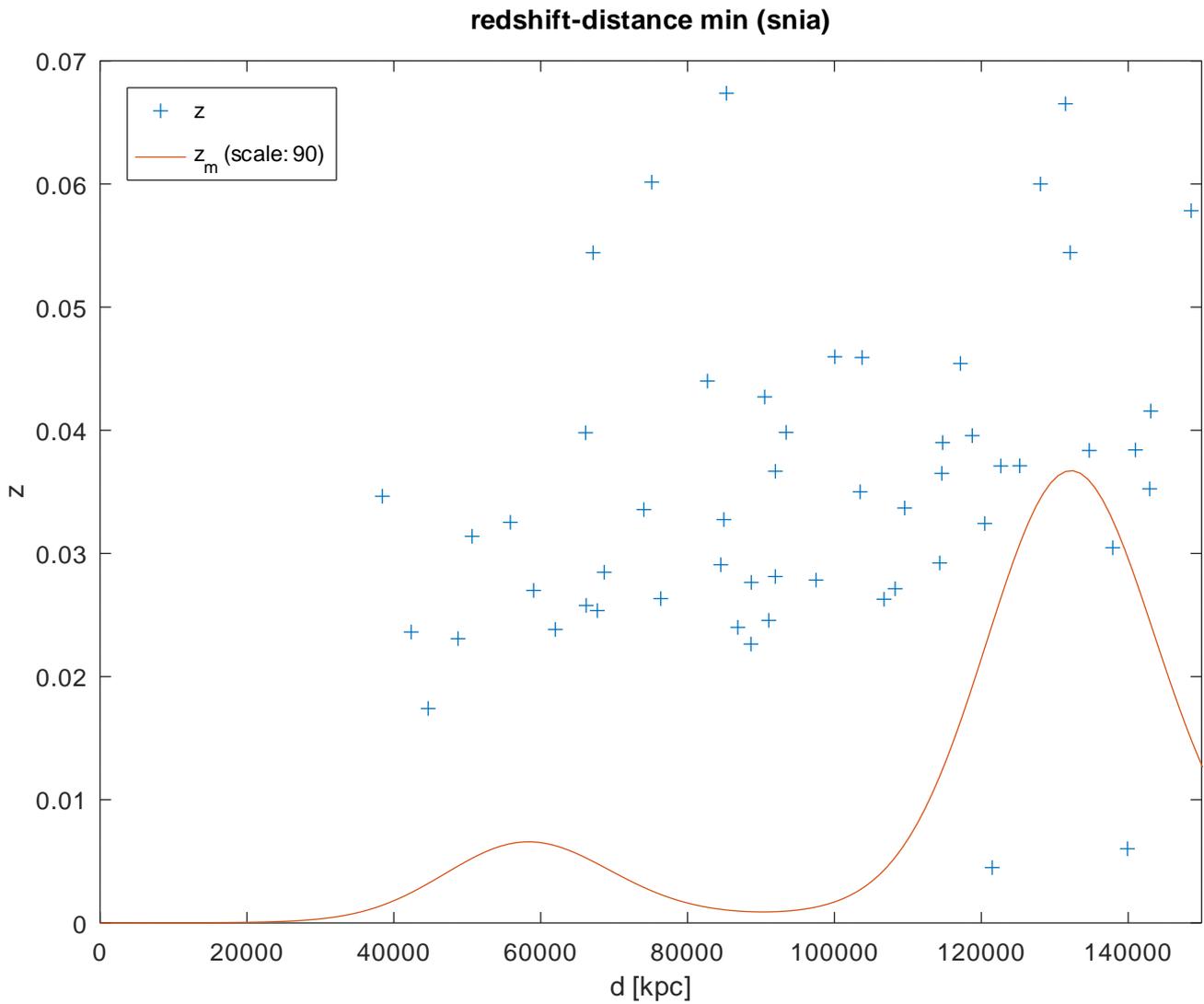
Los datos del CDS parecen más modernos que los del ‘Supernova Cosmology Project’ en el sentido de que dan menos problemas para resolver las posiciones. El mismo CDS suministra el listado<sup>[2]</sup> y hospeda el servicio desde el que se puede cargar una tabla de nombres para resolver las posiciones<sup>[3]</sup>.

La forma de los datos sí se parece más a lo que cabría esperar de datos de redshift que no han sido compensados por la rotación de la galaxia y están bajo la acción del redshift de inercia (forma de parábola).



En este gráfico sólo se presentan datos de supernovas de tipo Ia.

En el siguiente gráfico se representa el redshift frente a la distancia mínima y la curva de integración para el sistema sol-centro galáctico, con un factor de escala (dividir la distancia por 90, en este caso) para acercar la curva a los datos. Nótese que el factor de escala es muy inferior a lo que vemos en el Anexo VI: Escalado del potencial con datos de prueba. La distancia mínima es hasta 150Mpc.

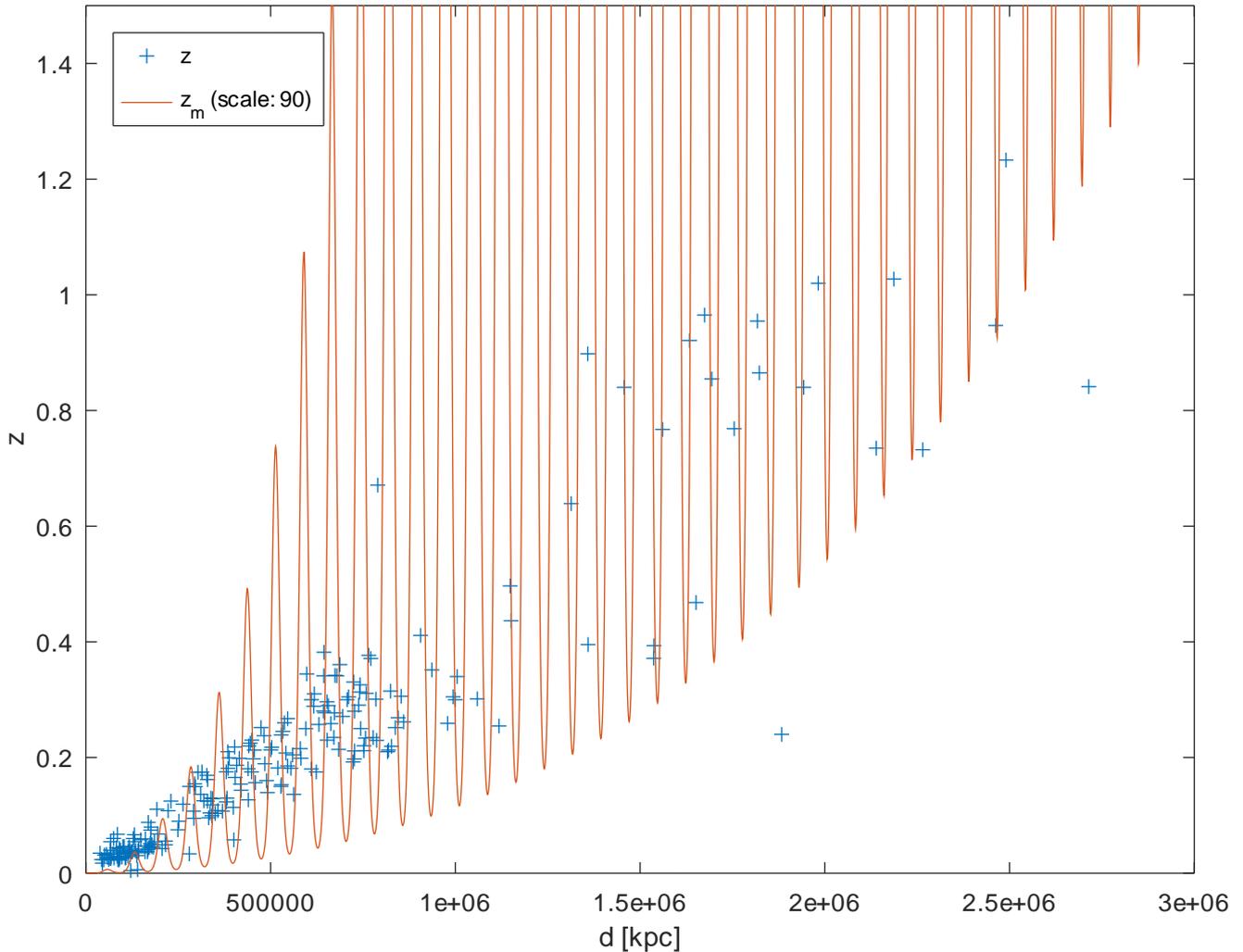


Donde el ajuste no es muy bueno.

Para definir la distancia mínima es preciso identificar el eje de rotación de la galaxia; esto se hace a través del ‘polo norte galáctico’. Las coordenadas de dicho polo (J2000) definen el vector director del eje de rotación de la galaxia. Ver la referencia [11] para su cálculo.

Para distancias mayores (3000Mpc),

### redshift-distance min (snia)



Vemos que el ajuste es mucho mejor.

El sistema con alta excentricidad permite explicar por qué los datos de redshift no se ordenan de manera creciente con la distancia mínima, como cabría esperar en el caso de que existiera un potencial sobre el que hacer los cálculos. El hecho de que no exista el potencial explica la dispersión con la distancia mínima, ya que se realizan oscilaciones que barren casi todo el rango (pero siempre con tendencia creciente). Nótese también que la excentricidad de la trayectoria del sol en la vía láctea no es algo bien determinado actualmente<sup>[1]</sup>. Nótese también que el modelo de materia oscura predice alta excentricidad.

## Modelo de materia oscura para sistemas en rotación

Del mismo modo que la fuerza de inercia actúa sobre los fotones, veremos aquí que si influye sobre los fermiones, puede explicar los sistemas en rotación que habitualmente se identifican con sistemas en los que hay 'materia oscura'.

Esta fuerza debe considerarse una 'nueva fuerza', no un mero artificio.

Y debe respetar el principio de relatividad; esto es, la fuerza que 1 realiza sobre 2 a través de la rotación, debe tener en cuenta la rotación que 2 ve de 1. Dicho de otro modo, si  $w$  es la rotación que interviene en la fórmula de la fuerza de 1 sobre 2,  $w=w_1-w_2$ . De modo que si ambos objetos rotan con la misma velocidad, su interacción mutua es nula. Entiéndase el ejemplo para todas las magnitudes que intervienen en la interacción (ya sea ángulo, velocidad o aceleración).

La fuerza de inercia es una fuerza central directamente proporcional a la distancia al objeto (al estilo de la fuerza nuclear fuerte). Una estrella en rotación dentro de la galaxia ejerce esta fuerza sobre el resto de estrellas en la galaxia. Como pasa con el potencial, los objetos en rotación sobre su propio eje ejercen una influencia muy superior a los objetos en rotación entorno al centro galáctico (la rotación es considerablemente inferior). Por este motivo, vamos a construir el modelo con la rotación del GC como fuerza preponderante y no vamos a considerar las fuerzas entre estrellas. Ya se adelanta que para la zona cerca del GC esto no es exacto, pero en la zona más exterior, todas las estrellas rotan con la misma velocidad y por tanto es exacto despreciar sus interacciones mutuas (son nulas).

Ya obtuvimos la expresión de la fuerza de inercia (ver Anexo I: Cálculo del flujo de trabajo de la aceleración de inercia), la reproducimos aquí,

$$\vec{a}=(a_x-2v_y\dot{\theta}-x\dot{\theta}^2-y\ddot{\theta})\hat{x}+(a_y+2v_x\dot{\theta}+x\ddot{\theta}-y\dot{\theta}^2)\hat{y}.$$

Para el sistema que vamos a modelar, la rotación ( $w_0$ ) es la del GC, que consideramos constante (sin aceleración angular),

$$\vec{a}=(a_x-2v_yw-xw^2)\hat{x}+(a_y+2v_xw-yw^2)\hat{y}.$$

Hay un problema con esta expresión, la aceleración del objeto está en ambos miembros de la ecuación y eso es incongruente. Cambiar el signo de la aceleración resuelve la incongruencia pero desemboca en un sistema inestable, ya que la fuerza central se vuelve repulsiva. Además, eso afectaría al signo del potencial integrado del apartado anterior, que ya no concordaría con el potencial para excentricidad baja.

En principio, simplemente vamos a eliminar la aceleración del segundo término, ya que es la expresión que usan los fotones.

$$\vec{a}=(-2v_yw-xw^2)\hat{x}+(2v_xw-yw^2)\hat{y}.$$

Como se indicó, el valor de  $w$  es,

$$w=w_0-w_i.$$

Para calcular el efecto del GC sobre la estrella  $i$ . El vector de  $w$  se presupone a un valor inicial, y se ajusta en varias iteraciones.

Como se ha indicado, cerca del centro,  $w_i$  necesitará ajuste iterativo. Y, en la zona exterior, se obtiene un sistema de estrellas que giran todas a la misma velocidad angular.

El sistema, por tanto, necesita los dos ingredientes, la gravedad del GC y la fuerza de inercia que el GC ejerce sobre la estrella correspondiente.

Por si alguien intenta la resolución sólo con interacciones entre estrellas, nótese que usar una expresión que estima el valor instantáneo de la velocidad de rotación como,

$$w_i = \frac{v_{iy} x_i - y_i v_{ix}}{r_i^2},$$

obtenida derivando respecto al tiempo en,

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right),$$

resulta en un sistema inestable (usar velocidades constantes durante la simulación tampoco lleva a un sistema consistente, las velocidades no convergen), puede que la combinación de la rotación del GC con las interacciones mutuas funcione, pero no se ha probado.

Las ecuaciones quedan para una partícula cualquiera  $i$ ,

$$\frac{d v_x}{dt} = \frac{-GM}{r^3} x - 2 v_y w - x w^2,$$

$$\frac{d v_y}{dt} = \frac{-GM}{r^3} y + 2 v_x w - y w^2,$$

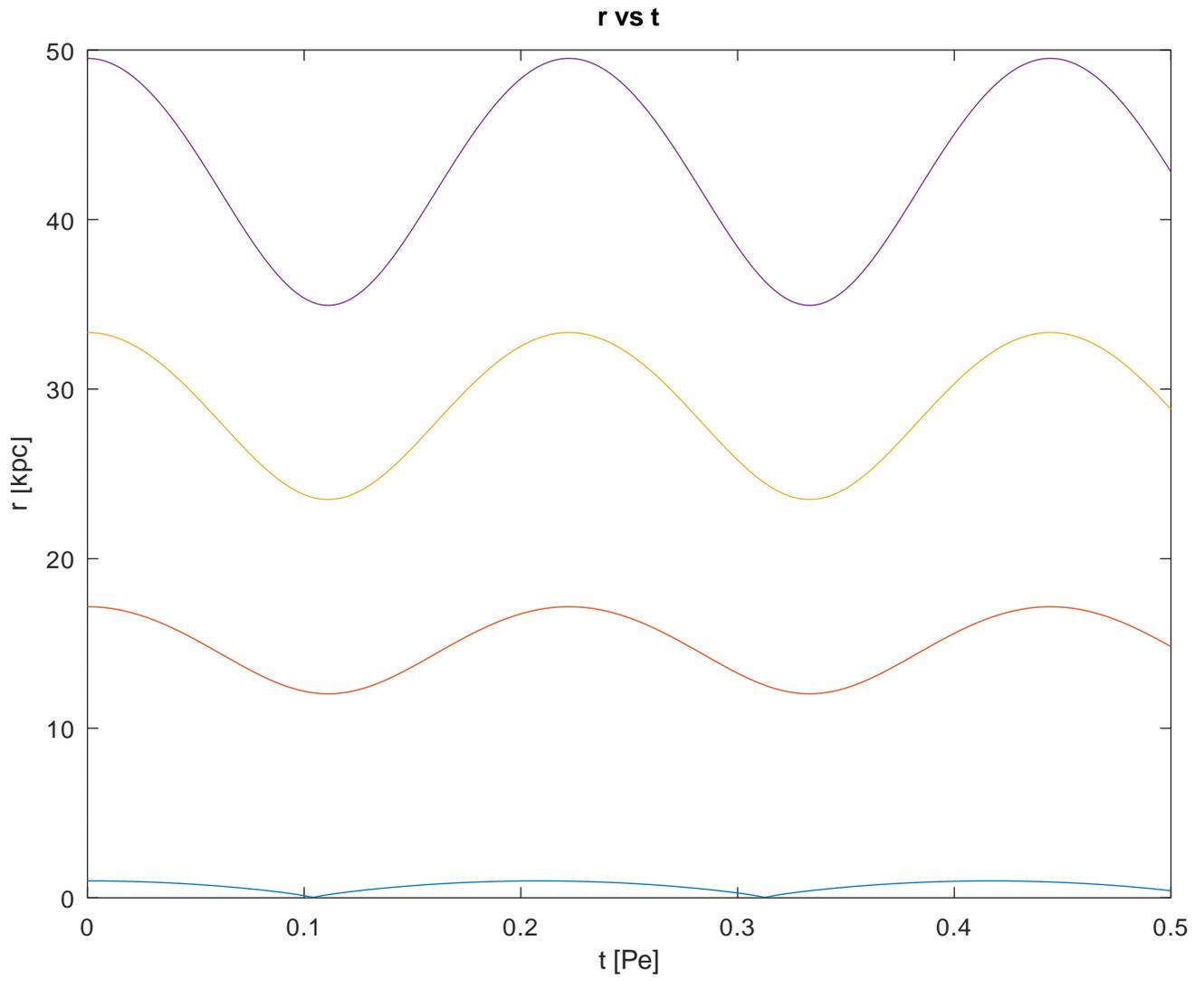
$$\frac{d x}{dt} = v_x,$$

$$\frac{d y}{dt} = v_y.$$

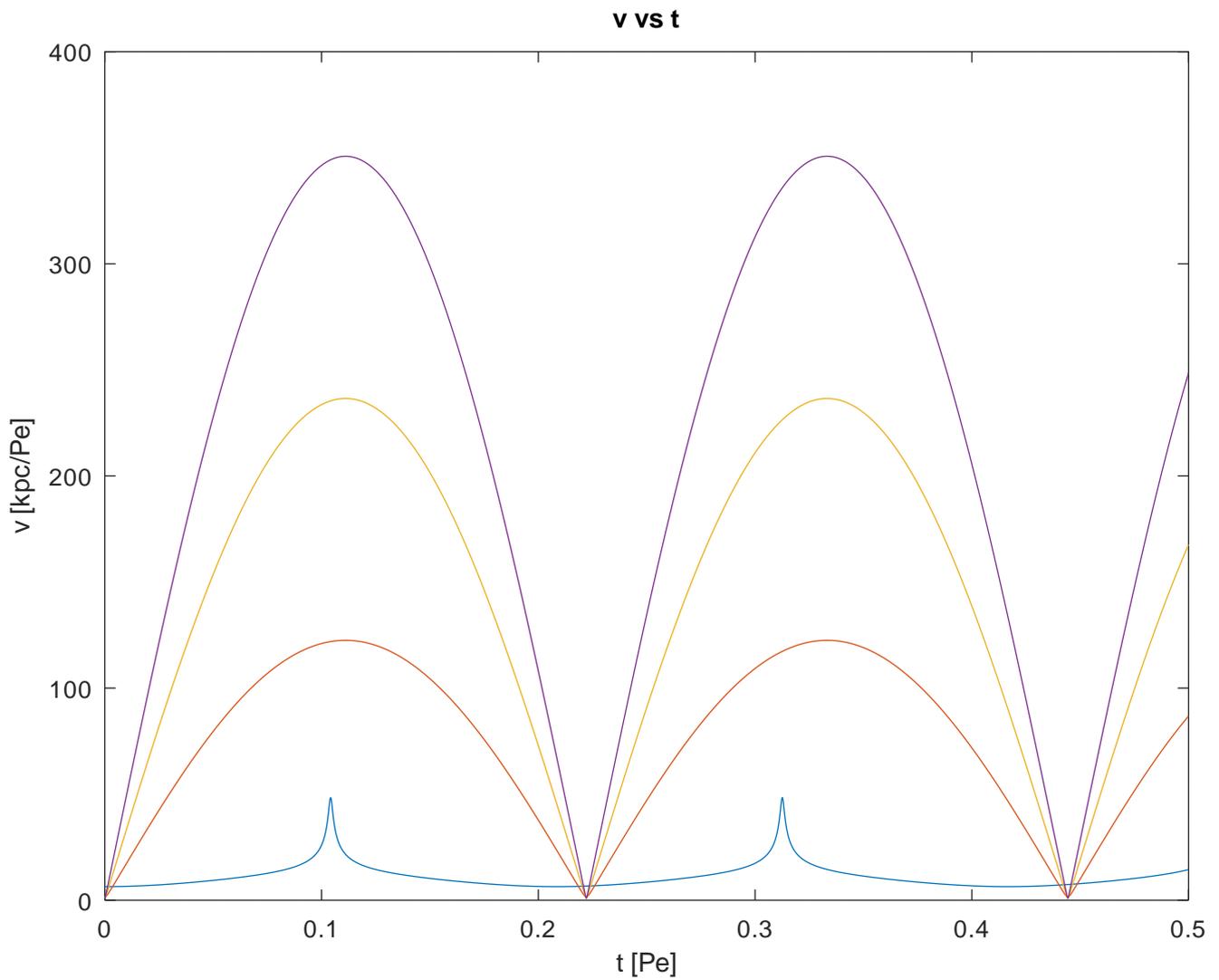
Con  $w = w_o - w_i$ .

Vamos a simular el sistema y obtener su curva de rotación, superpondremos la curva de rotación a la que se obtiene variando 'a', manteniendo el resto de parámetros constantes (ver Anexo III: Trazado de la curva de rotación para una explicación más detallada)

Los resultados que se obtienen son, para la posición frente al tiempo,



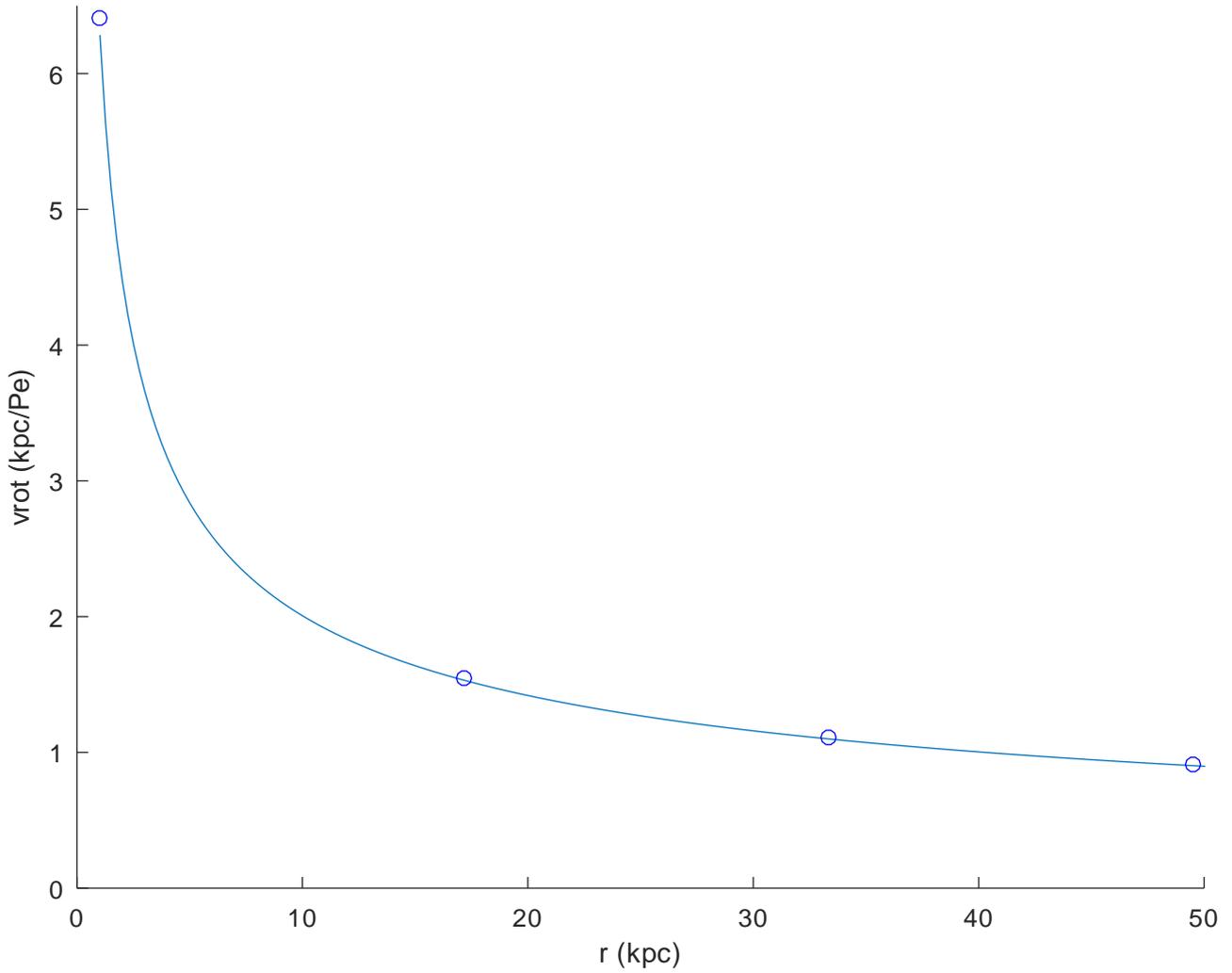
La velocidad frente al tiempo,



Mientras que la curva de rotación, superpuestos los 4 puntos simulados, nos enseña que el decaimiento no se modifica. Nótese que se ha usado la posición y velocidad en apoapsis para la curva de rotación, mientras que los puntos de la simulación usan como condiciones iniciales los datos de posición y velocidad de periapsis.

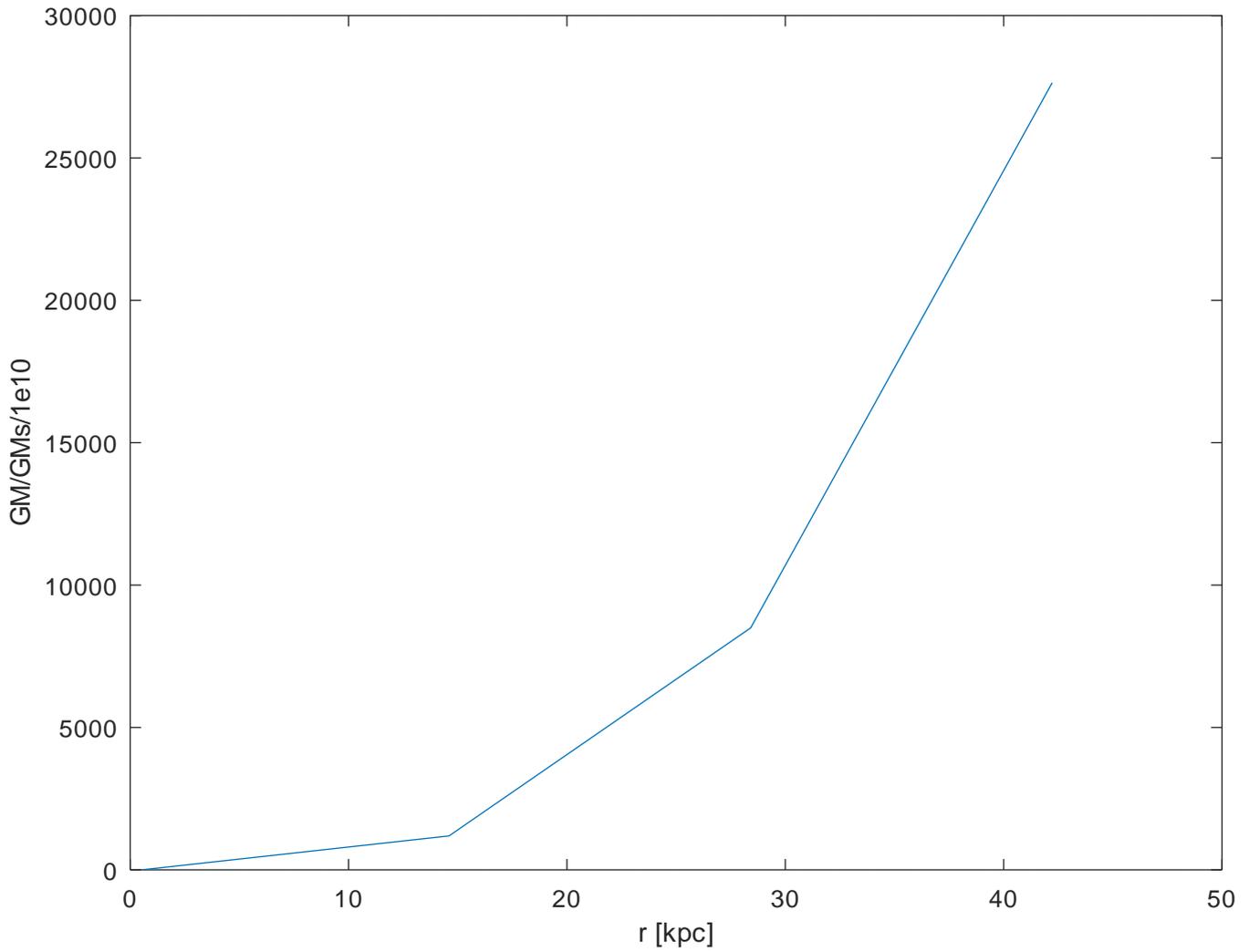
No una gran sorpresa, con la liberación de los datos de Gaia DR3 hay varios autores que hablan de declive kepleriano de la curva de rotación. Ver, por ejemplo, la referencia [4].

### vrot Vs r (aphelion)



Si calculamos el valor de GM en base a los resultados de la simulación y suponiendo que son válidas las relaciones para trayectorias elípticas, generamos el gráfico (nótese que se ha normalizado GM con  $GM_s$  del sol (para ver masas solares en el gráfico) y dividido por  $1e^{10}$ ).

Solar masses Vs r



Donde vemos que la masa que se infiere va en incremento con la distancia. Esta masa 'extra' es lo que se identifica con la 'materia oscura'.

Los vectores calculados son,

	1	2	3	4
ra	1.000000000000000e+00	1.716831683168317e+01	3.333663366336634e+01	4.950495049504951e+01
rp	3.520267890741924e-02	1.203005157438828e+01	2.349396064694268e+01	3.494082667694511e+01
a	5.176013394537096e-01	1.459918420303572e+01	2.841529715515451e+01	4.222288858599731e+01
e	9.319888179876562e-01	1.759778212890296e-01	1.731932093245452e-01	1.724671653911240e-01
h	4.548069902333335e+00	7.502647095230514e+02	2.796886510189112e+03	6.149435426539551e+03
GM	3.041402784729739e+02	3.978894439262012e+04	2.838075280757850e+05	9.230742280790174e+05
w	4.683212694693025e+01	3.575924380980138e+00	3.517091382026583e+00	3.501840820731773e+00
T	1.341639963160255e-01	1.757080026803421e+00	1.786472009026718e+00	1.794252117338275e+00
T_mx	2.083708370837083e-01	2.221722172217222e-01	2.221722172217222e-01	2.221722172217222e-01
T_mn	2.083708370837083e-01	2.221722172217221e-01	2.221722172217221e-01	2.221722172217221e-01
w_mx	30.15386123661564	28.28069767566449	28.28069767566449	28.28069767566449
w_mn	30.15386123661564	28.28069767566450	28.28069767566450	28.28069767566450
va	6.409163164888933e+00	1.546811771053552e+00	1.110044672212261e+00	9.109132362515193e-01

Los 8 primeros vectores se calculan con las fórmulas de trayectorias elípticas [10], los siguientes se calculan con los datos de las simulaciones (por ejemplo T\_mx es el período definido según los máximos de la curva de posición y T\_mn sobre los mínimos).

Leyenda: ra-distancia en apoapsis, rp-distancia en periapsis, a-semieje mayor de la elipse, e-excentricidad, h-módulo del momento angular, GM-producto de constante de Newton por la masa del GC ( $\mu$ ), w-velocidad angular, T-período, va-velocidad en apoapsis.

## Comentarios finales

Respecto al modelo de materia oscura para sistemas en rotación, ciertamente el modelo se encuentra en un estado prematuro, la esperanza es que inspire a otros en mejores condiciones que yo para indagar en el modelo con datos reales. Tras la muerte de mi padre, mi madre decidió que 'esto de la ciencia' es algo a lo que no ve utilidad económica (lógico) y, lo que antes era mi modesto laboratorio, se ha convertido en una escombrera. Sólo me quedan la máquina en la que redacto los documentos (que perderé mas pronto que tarde porque está fuera de mi habitáculo) y un pentium IV que sólo puede hacer simulaciones modestas, todo en un habitáculo de 3m por 1m. Mi madre se esfuerza incansablemente por hacer de mi vida algo incómodo, por animarme a abandonar el nido, espero. Verdaderamente no se puede culpar a una sola persona del estado final; tanto el largo silencio de los institutos de física, como de todas las universidades, catedráticos, profesores con que he contactado dejan claro el interés que suscita este tipo de trabajos, y no hablo sólo de España.

Respecto a por qué no vemos la acción de la fuerza de inercia en los objetos en rotación cotidianos, nótese que las expresiones de las fuerzas hacen uso de partículas puntuales: grandes distancias frente a pequeños tamaños; tal vez el desarrollo de expresiones para sólidos materiales pudiera arrojar luz sobre esto.

# Anexo I: Cálculo del flujo de trabajo de la aceleración de inercia

Para calcular la aceleración de inercia en cartesianas 2D, partimos de las fórmulas de derivación en ejes móviles,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= \dot{\theta}\hat{y}, \\ \frac{d\hat{y}}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{x}.\end{aligned}$$

Y desde el vector de posición, derivamos dos veces; usando las anteriores.  
El vector de posición es,

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}.$$

La velocidad es,

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + x\frac{d\hat{x}}{dt} + y\frac{d\hat{y}}{dt},$$

o,

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + x\dot{\theta}\hat{y} - y\dot{\theta}\hat{x} = (v_x - y\dot{\theta})\hat{x} + (v_y + x\dot{\theta})\hat{y},$$

La aceleración queda,

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + v_x\dot{\theta}\hat{y} - v_y\dot{\theta}\hat{x} + v_x\dot{\theta}\hat{y} + x(\ddot{\theta}\hat{y} - \dot{\theta}^2\hat{x}) - v_y\dot{\theta}\hat{x} - y(\ddot{\theta}\hat{x} + \dot{\theta}^2\hat{y}),$$

o,

$$\vec{a} = (a_x - 2v_y\dot{\theta} - x\dot{\theta}^2 - y\ddot{\theta})\hat{x} + (a_y + 2v_x\dot{\theta} + x\ddot{\theta} - y\dot{\theta}^2)\hat{y}.$$

Para calcular el flujo de trabajo por unidad de tiempo, multiplicamos escalarmente velocidad por aceleración,

$$\dot{W} = \vec{v} \cdot \vec{a} = ((v_x - y\dot{\theta})\hat{x} + (v_y + x\dot{\theta})\hat{y}) \cdot ((a_x - 2v_y\dot{\theta} - x\dot{\theta}^2 - y\ddot{\theta})\hat{x} + (a_y + 2v_x\dot{\theta} + x\ddot{\theta} - y\dot{\theta}^2)\hat{y}),$$

o,

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \vec{v} \cdot \vec{a} = (v_x - y\dot{\theta})(a_x - 2v_y\dot{\theta} - x\dot{\theta}^2 - y\ddot{\theta}) + (v_y + x\dot{\theta})(a_y + 2v_x\dot{\theta} + x\ddot{\theta} - y\dot{\theta}^2), \\ \dot{W} &= v_x a_x - 2v_x v_y \dot{\theta} - x v_x \dot{\theta}^2 - y v_x \ddot{\theta} - y a_x \dot{\theta} + 2y v_y \dot{\theta}^2 + x y \dot{\theta}^3 + y^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \dots \\ &\quad + v_y a_y + 2v_x v_y \dot{\theta} + x v_y \ddot{\theta} - y v_y \dot{\theta}^2 + x a_y \dot{\theta} + 2x v_x \dot{\theta}^2 + x^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - x y \dot{\theta}^3,\end{aligned}$$

dando,

$$\dot{W} = v_x a_x + v_y a_y + (x v_y - y v_x) \ddot{\theta} + (x a_y - y a_x) \dot{\theta} + (x v_x + y v_y) \dot{\theta}^2 + (x^2 + y^2) \dot{\theta} \ddot{\theta}.$$

El trabajo, para el caso de fotones, se simplifica ya que la aceleración es nula en todas las componentes,

$$\dot{W} = (x v_y - y v_x) \ddot{\theta} + (x v_x + y v_y) \dot{\theta}^2 + (x^2 + y^2) \dot{\theta} \ddot{\theta}. \quad (1)$$

## Obtención de la aceleración de inercia mediante cuaternios

Vamos a repetir el razonamiento usando cuaternios unitarios en forma polar, el vector transformado en la rotación lo vamos a denominar con prima,

$$\bar{z}' = e^{\hat{e}\theta/2} \bar{z} e^{-\hat{e}\theta/2}.$$

Ahora derivamos respecto al tiempo, nótese que los términos de la derivada del producto conmutan,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}'}{dt} &= \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} e^{\hat{e}\theta/2} \bar{z} e^{-\hat{e}\theta/2} + e^{\hat{e}\theta/2} \left( \frac{d\bar{z}}{dt} e^{-\hat{e}\theta/2} - \bar{z} e^{-\hat{e}\theta/2} \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \right), \\ \frac{d\bar{z}'}{dt} &= \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \bar{z}' + \frac{d\bar{z}'}{dt} - \bar{z}' \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2}. \end{aligned}$$

Esta última la vamos a usar para expresar la variación del vector de posición y la variación de la velocidad,

$$\frac{d\bar{x}'}{dt} = \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \bar{x}' + \bar{v}' - \bar{x}' \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2}, \quad (2)$$

y,

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \bar{v}' + \bar{a}' - \bar{v}' \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2}. \quad (3)$$

Ahora volvemos a derivar respecto al tiempo en (2),

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{\hat{e}\ddot{\theta}}{2} \bar{x}' + \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \frac{d\bar{x}'}{dt} + \frac{d\bar{v}'}{dt} - \frac{d\bar{x}'}{dt} \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} - \bar{x}' \frac{\hat{e}\ddot{\theta}}{2},$$

donde sustituimos en el segundo término las (2) y (3),

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{\hat{e}\ddot{\theta}}{2} \bar{x}' + \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \left( \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \bar{x}' + \bar{v}' - \bar{x}' \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \right) + \left( \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \bar{v}' + \bar{a}' - \bar{v}' \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \right) - \left( \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \bar{x}' + \bar{v}' - \bar{x}' \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} \right) \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2} - \bar{x}' \frac{\hat{e}\ddot{\theta}}{2},$$

donde definimos para escribir menos,

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{\hat{e}\dot{\theta}}{2}, \\ \bar{p}_2 &= \frac{\hat{e}\ddot{\theta}}{2}. \end{aligned}$$

Dando,

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \bar{p}_2 \bar{x}' + \bar{p}_1 (\bar{p}_1 \bar{x}' + \bar{v}' - \bar{x}' \bar{p}_1) + (\bar{p}_1 \bar{v}' + \bar{a}' - \bar{v}' \bar{p}_1) - (\bar{p}_1 \bar{x}' + \bar{v}' - \bar{x}' \bar{p}_1) \bar{p}_1 - \bar{x}' \bar{p}_2,$$

donde podemos desarrollar y agrupar términos similares,

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \bar{p}_2 \bar{x}' - \bar{x}' \bar{p}_2 + \bar{p}_1 \bar{p}_1 \bar{x}' + \bar{x}' \bar{p}_1 \bar{p}_1 - 2 \bar{p}_1 \bar{x}' \bar{p}_1 + 2 \bar{p}_1 \bar{v}' - 2 \bar{v}' \bar{p}_1 + \bar{a}',$$

Ahora realizamos los productos de cuaternios,

$$\begin{aligned}
\bar{p}_2 \bar{x}' &= \frac{\ddot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} -\hat{e} \cdot \bar{x} \\ \hat{e} \wedge \bar{x} \end{bmatrix}, \\
-\bar{x}' \bar{p}_2 &= \frac{\ddot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} \hat{e} \cdot \bar{x} \\ -\bar{x} \wedge \hat{e} \end{bmatrix}, \\
\bar{p}_1 \bar{p}_1 &= \frac{\dot{\theta}^2}{4} \begin{bmatrix} -\hat{e} \cdot \hat{e} \\ \hat{e} \wedge \hat{e} \end{bmatrix} = \frac{\dot{\theta}^2}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{p}_1 \bar{p}_1 \bar{x}' &= \frac{\dot{\theta}^2}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{x} \end{bmatrix}, \\
\bar{x}' \bar{p}_1 \bar{p}_1 &= \frac{\dot{\theta}^2}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{x} \end{bmatrix}, \\
\bar{p}_1 \bar{x}' &= \frac{\dot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} -\hat{e} \cdot \bar{x} \\ \hat{e} \wedge \bar{x} \end{bmatrix}, \\
-2 \bar{p}_1 \bar{x}' \bar{p}_1 &= \frac{-\dot{\theta}^2}{2} \begin{bmatrix} -\hat{e} \cdot \bar{x} \\ \hat{e} \wedge \bar{x} \end{bmatrix} \hat{e} = \frac{-\dot{\theta}^2}{2} \begin{bmatrix} -(\hat{e} \wedge \bar{x}) \cdot \hat{e} \\ -(\hat{e} \cdot \bar{x}) \hat{e} + (\hat{e} \wedge \bar{x}) \wedge \hat{e} \end{bmatrix} = \frac{-\dot{\theta}^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -(\hat{e} \cdot \bar{x}) \hat{e} + (\hat{e} \wedge \bar{x}) \wedge \hat{e} \end{bmatrix}, \\
2 \bar{p}_1 \bar{v}' &= 2 \frac{\dot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} -\hat{e} \cdot \bar{v} \\ \hat{e} \wedge \bar{v} \end{bmatrix}, \\
-2 \bar{v}' \bar{p}_1 &= 2 \frac{\dot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} \hat{e} \cdot \bar{v} \\ -\bar{v} \wedge \hat{e} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

La parte superior de los corchetes representa la parte real del cuaternio, y la parte de abajo la hipercompleja. Sumando los términos calculados,

$$\bar{a}' = \frac{\ddot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} -\hat{e} \cdot \bar{x} + \hat{e} \cdot \bar{x} \\ 2 \hat{e} \wedge \bar{x} \end{bmatrix} + \frac{\dot{\theta}^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{x} + (\hat{e} \cdot \bar{x}) \hat{e} - (\hat{e} \wedge \bar{x}) \wedge \hat{e} \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\hat{e} \cdot \bar{v} + \hat{e} \cdot \bar{v} \\ 2 \hat{e} \wedge \bar{v} \end{bmatrix},$$

simplificando, y recordando que la aceleración es nula para los fotones,

$$\bar{a}' = \frac{\ddot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \hat{e} \wedge \bar{x} \end{bmatrix} + \frac{\dot{\theta}^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{x} + (\hat{e} \cdot \bar{x}) \hat{e} - (\hat{e} \wedge \bar{x}) \wedge \hat{e} \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \hat{e} \wedge \bar{v} \end{bmatrix},$$

reteniendo sólo la parte hipercompleja,

$$\vec{a}' = \ddot{\theta} \hat{e} \wedge \bar{x} + \frac{\dot{\theta}^2}{2} (-\bar{x} + (\hat{e} \cdot \bar{x}) \hat{e} - (\hat{e} \wedge \bar{x}) \wedge \hat{e}) + 2 \dot{\theta} \hat{e} \wedge \bar{v},$$

y recordando que,

$$\bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) = \bar{B} (\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C} (\bar{A} \cdot \bar{B}),$$

queda,

$$\vec{a}' = \ddot{\theta} \hat{e} \wedge \bar{x} + \frac{\dot{\theta}^2}{2} (-\bar{x} + (\hat{e} \cdot \bar{x}) \hat{e} - \bar{x} + \hat{e} (\hat{e} \cdot \bar{x})) + 2 \dot{\theta} \hat{e} \wedge \bar{v},$$

o,

$$\vec{a}' = \ddot{\theta} \hat{e} \wedge \bar{x} + \dot{\theta}^2 (-\bar{x} + (\hat{e} \cdot \bar{x}) \hat{e}) + 2 \dot{\theta} \hat{e} \wedge \bar{v}, \quad (4)$$

Haciendo lo mismo para la expresión de la velocidad (2),

$$\begin{aligned}
\bar{v}' &= \bar{p}_1 \bar{x}' + \bar{v}' - \bar{x}' \bar{p}_1, \\
\bar{v}' &= \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{e} \wedge \bar{x} \end{bmatrix} + \bar{v},
\end{aligned}$$

o,

$$\vec{v}' = \dot{\theta} \hat{e} \wedge \vec{x} + \vec{v}, \quad (5)$$

Ahora sólo falta hacer el producto de (4) y (5),

$$\vec{a}' \cdot \vec{v}' = (\ddot{\theta} \hat{e} \wedge \vec{x} + \dot{\theta}^2 (-\vec{x} + (\hat{e} \cdot \vec{x}) \hat{e}) + 2 \dot{\theta} \hat{e} \wedge \vec{v}) \cdot (\dot{\theta} \hat{e} \wedge \vec{x} + \vec{v}),$$

sustituimos el valor de los vectores conocidos,

$$\begin{aligned} \hat{e} &= \hat{z}, \\ \vec{x}' &= x \hat{x} + y \hat{y}, \\ \vec{v}' &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y}, \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \hat{e} \wedge \vec{x}' &= -y \hat{x} + x \hat{y}, \\ \hat{e} \cdot \vec{x}' &= 0, \\ \hat{e} \wedge \vec{v}' &= -v_y \hat{x} + v_x \hat{y}, \end{aligned}$$

dando,

$$\vec{a}' \cdot \vec{v}' = ((-y \ddot{\theta} - x \dot{\theta}^2 - v_y 2 \dot{\theta}) \hat{x} + (x \ddot{\theta} - y \dot{\theta}^2 + v_x 2 \dot{\theta}) \hat{y}) \cdot ((v_x - y \dot{\theta}) \hat{x} + (x \dot{\theta} + v_y) \hat{y}),$$

que se simplifica a,

$$\begin{aligned} \vec{a}' \cdot \vec{v}' &= (-y \ddot{\theta} - x \dot{\theta}^2 - v_y 2 \dot{\theta})(v_x - y \dot{\theta}) + (x \ddot{\theta} - y \dot{\theta}^2 + v_x 2 \dot{\theta})(x \dot{\theta} + v_y), \\ \vec{a}' \cdot \vec{v}' &= -y v_x \ddot{\theta} - x v_x \dot{\theta}^2 - 2 v_x v_y \dot{\theta} + y^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + x y \dot{\theta}^3 + 2 y v_y \dot{\theta}^2 + x^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - x y \dot{\theta}^3 + 2 x v_x \dot{\theta}^2 + x v_y \ddot{\theta} - y v_y \dot{\theta}^2 + 2 v_x v_y \dot{\theta}, \\ \vec{a}' \cdot \vec{v}' &= (x^2 + y^2) \dot{\theta} \ddot{\theta} + (x v_x + y v_y) \dot{\theta}^2 + (x v_y - y v_x) \ddot{\theta}, \end{aligned}$$

o, expresado como en (1),

$$\dot{W} = (x^2 + y^2) \dot{\theta} \ddot{\theta} + (x v_x + y v_y) \dot{\theta}^2 + (x v_y - y v_x) \ddot{\theta}.$$

## Anexo II: Datos de rotación

Para una explicación de estas fórmulas, ver [9] y [10].

Partimos de la ecuación del momento angular constante,

$$r^2 \dot{\theta} = h,$$

de donde sacamos la velocidad de rotación instantánea,

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}.$$

Para el valor de r, partimos de que la trayectoria es una elipse,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

y sustituimos en la anterior,

$$\dot{\theta} = \frac{h}{a^2(1-e^2)^2} (1+e \cos \theta)^2,$$

donde definimos la constante  $k$ ,

$$k = \frac{h}{a^2(1-e^2)^2},$$

dando,

$$\dot{\theta} = k(1+e \cos \theta)^2.$$

Y obtenemos la aceleración angular derivando la anterior, expresada en función al tiempo,

$$\dot{\theta} = k(1+e \cos(\omega t))^2.$$

dando,

$$\ddot{\theta} = -2k e \omega \sin(\omega t)(1+e \cos(\omega t)).$$

Para el sistema tierra-sol se tiene,

$$\begin{aligned} r_a &= 152\,097\,597 \text{ km}, \\ r_p &= 147\,098\,450 \text{ km}, \\ a &= \frac{r_a + r_p}{2} = 149\,598\,023.5 \text{ km}, \\ e &= \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0.0167086, \\ GM &= 1.32712440018 e^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2, \\ \omega &= \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = 0.017202072593 \text{ rad/day}, \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = 365.26 \text{ day}, \\ h &= r_a v_a = r_p v_p = \sqrt{GM a(1-e^2)} = 4\,455\,106\,740.46 \text{ km}^2/\text{s}, \\ k &= 1.99181467016 e^{-7} \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Para el sistema sol-centro galáctico se han tomado los datos de la referencia [1].

$$\begin{aligned} r_a &= 11.47 \text{ kpc}, \\ r_p &= 5.46 \text{ kpc}, \\ e &= 0.355, \\ GM &= 1.1304 e^{31} \text{ m}^3/\text{s}^2, \\ T &= 250 e^6 \text{ years}, \\ \theta_o &= 1.89766980043 \text{ rad} (108.73^\circ). \end{aligned}$$

Para este sistema debido a la influencia evidente de la posición inicial, se define el ángulo inicial,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= k(1+e \cos(\omega t + \theta_o))^2, \\ \ddot{\theta} &= -2k e \omega \sin(\omega t + \theta_o)(1+e \cos(\omega t + \theta_o)). \end{aligned}$$

## Anexo III: Trazado de la curva de rotación

Para trazarla, vamos a tomar valores parecidos a los valores de la vía láctea. Para el objeto más cercano al GC imponemos una velocidad de 230km/s. Pero no vamos a usar unidad de tiempo en segundos, definimos la unidad (mucho más adecuada)  $Pe$ , que es el período del objeto más cercano al GC. Tenemos las constantes,

$$\begin{aligned} pc &= 3.08567818585e16 \text{ km/kpc} , \\ yr &= 3653 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s/yr} , \\ Pe &= 27265754.20699480 \text{ yr/Pe} , \\ kv &= Pe \cdot yr / ps , \end{aligned}$$

de modo que 'v·kv' da kpc/Pe, con la velocidad en km/s.

Para calcular unos valores iniciales, tomamos,

$$\begin{aligned} r_a &= 1.02 \text{ kpc} , \\ r_p &= 1.00 \text{ kpc} , \\ a &= \frac{r_a + r_p}{2} = 8.465 \text{ kpc} , \\ e &= \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0.355 , \\ v_p &= kv \cdot 230 \text{ km/s} = 6.41 \text{ kpc/Pe} , \\ h &= r_p v_p \text{ kpc}^2 / \text{Pe} , \\ GM &= \frac{h^2}{a(1-e^2)} \text{ kpc}^3 / \text{Pe}^2 , \\ w &= \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = 6.28 \text{ 1/Pe} . \end{aligned}$$

Obtenemos una masa para el GC de  $1.2179e^{10}$  masas solares.

Ahora suponemos la excentricidad constante, y variamos 'a' hasta los 50kpc. Cambiamos sólo las siguientes magnitudes,

$$\begin{aligned} r_a &= a(1+e) , \\ h &= \sqrt{GM a(1-e^2)} , \\ v_a &= \frac{h}{r_a} . \end{aligned}$$

Y representamos  $v_a$  frente a  $r_a$  (valores en apoapsis).

Como condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones diferenciales, tomamos en  $x=r_p$ ,  $y=0$ ,  $v_x=0$ ,  $v_y=v_p$ . Para cada valor de 'a', hemos mallado con 4 objetos ( $4*4=16$  ecuaciones diferenciales).

El valor para la rotación del GC es  $w_0=38.28069767566450$ , mientras que el vector de rotaciones (tras converger) de cada objeto  $w_i=[ 30.16 \ 28.28069767566450 \ 28.28069767566450 \ 28.28069767566450]$ .

## Anexo IV: Obtención y procesado de datos astronómicos del CDS

Vamos a resumir los problemas al importar el fichero del CDS, ya que no es trivial y libreoffice comete errores en las conversiones de 'locales'. Para cargar el fichero y que interprete el carácter 'punto' como decimal usar locale 'English/USA' y charset ASCII/US. Puede hacerse en linux, editando la configuración del usuario con el editor nano, por ejemplo,

```
$ nano ~/.config/locale.conf
```

```
--
```

```
LANG=en_US.iso88591
```

```
--
```

antes de empezar la importación. El charset se pide al importar con libreoffice (LOCalc).

Hay que corregir el csv de NED para que se importen las columnas bien (se desplazan un lugar)

Obtenemos "NED30.5.1-D-17.1.2-20200415.csv" de  
"http://ned.ipac.caltech.edu/Library/Distances/"

Podemos comprobar tras la importación que todo está correcto, por ejemplo, mirando que RA y DEC están en rango,

```
0<=RA<360 -90<=DEC<=90
```

Hay que filtrar y lo hacemos (todo) desde LOCalc:

1) sacamos un listado ordenado por nombre y sin duplicados de snia "snia.csv", con "salvar como se enseñan", "csv"

31735 rows con header y entre comillas los campos; 9219 rows únicas.

2) otro listado de Id-distancia "id\_d.tsv": ordenados por nombre, sin espacios (find&replace con \_), quitando "string delimiter" a null (esto lo hace tsv)

cambiar "WLM" -> "PGC 143"

Para id\_d.tsv tengo que unir galaxias duplicadas y hacer la media de la distancia, con una pivot table (LOCalc)

Desde la página del CDS (gaia no da redshift o no he descubierto cómo obtenerlo), usamos form TAP

```
https://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-tap/
```

las tablas disponibles están en,

```
https://simbad.u-strasbg.fr/simbad/tap/tapsearch.html
```

En el servicio TAPm subo la tabla snia.csv como snia y ruedo en batch (eliminar el trabajo después). La consulta queda,

```
SELECT col1 as "Name",  
      main_id AS "Main identifier",  
      RA,  
      DEC,
```

```

    pmra,
    pmdec,
    plx_value as "Parallax",
    rvz_radvel as "Radial velocity",
    rvz_redshift as "Redshift",
    coo_bibcode AS "Coord Reference"
FROM basic JOIN ident ON basic.OID = ident.oidref JOIN TAP_UPLOAD.snia ON
snia.col1=ident.id;

```

Esto da "result.csv" y hay que importarlo a LOcalc porque los nombres de las galaxias los ha trastocado con espacios y comillas, obtenemos "result.ods", también filtramos a speed>350km/s y lo exportamos como "result\_cdsData.tsv".

Join (desde linux) de los dos ficheros "result\_cdsData.tsv" "id\_d.tsv"

```
$ join <(sort result_cdsData.tsv) <(sort id_d.tsv) > cdsdata_z.tsv
```

Si necesitásemos convertir una salida a tsv desde csv,

```
$ sed '{s/([[:digit:]]\),([[:digit:]]\)/\1.\2/g ; s//g}' cdsdata_z.csv | awk -F"," ' { print $1"\t"$2"\t"$3"\t"$4"\t"$5"\t"$6}' > cdsdata_z.tsv
```

Comprobar con el tsv que  $0 \leq RA \leq 360$  y  $-90 < DEC < 90$

\*Notas adicionales:

Si quisiéramos filtrar para ver sólo galaxias,

```

SELECT col1 as "Name",
    main_id AS "Main identifier",
    RA,
    DEC,
    rvz_radvel as "Radial velocity",
    rvz_redshift as "Redshift",
    FROM basic JOIN ident ON basic.OID = ident.oidref AND otype='G'
JOIN TAP_UPLOAD.cefeidas ON cefeidas.col1=ident.id;

```

Los tipos de objetos disponibles son: G,SyG,Sy1,Sy2,AGN,SBG,LIN,bCG,rG  
Para usarlos en una consulta sería,

```

SELECT col1 as "Name",
    main_id AS "Main identifier",
    RA,
    DEC,
    rvz_radvel as "Radial_velocity",
    rvz_redshift as "Redshift",
    otype
    FROM basic JOIN ident ON basic.OID = ident.oidref AND NOT (otype='cC*' OR
otype='Ce*' or otype='V*')
JOIN TAP_UPLOAD.cefeidas ON cefeidas.col1=ident.id;

```

## Anexo V: Compensación de rotaciones con cuaternios

Para compensar una rotación, expresamos la ecuación,

$$\bar{x}' = e^{\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}} e^{\frac{\hat{e}_2 \theta_2}{2}} \bar{x} e^{-\frac{\hat{e}_2 \theta_2}{2}} e^{-\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}}.$$

Donde la rotación 2 va a compensar la rotación 1. La rotación 1 puede ser el movimiento de la tierra sobre sí misma, mientras que la rotación 2 sería la que aplicamos sobre el telescopio. Este caso es trivial porque se eligen,

$$\begin{aligned}\hat{e}_2 &= -\hat{e}_1, \\ \theta_2 &= \theta_1,\end{aligned}$$

dando,

$$\bar{x}' = e^{\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}} e^{-\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}} \bar{x} e^{\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}} e^{-\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}} = \bar{x}.$$

Recuérdese que,

$$e^{\frac{\hat{e} \theta}{2}} e^{-\frac{\hat{e} \theta}{2}} = 1,$$

al ser los dos cuaternios unitarios complejos conjugados.

Para el caso de dos rotaciones aún puede obtenerse una expresión algebraica,

$$\bar{x}' = e^{\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}} e^{\frac{\hat{e}_2 \theta_2}{2}} e^{\frac{\hat{e}_3 \theta_3}{2}} \bar{x} e^{-\frac{\hat{e}_3 \theta_3}{2}} e^{-\frac{\hat{e}_2 \theta_2}{2}} e^{-\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}}.$$

Como el producto de dos cuaternios unitarios sigue siendo un cuaternio unitario, las rotaciones 1 y 2 son equivalentes a otra rotación, y el caso se reduciría al tratado anteriormente.

Para obtener la rotación equivalente, partimos de,

$$e^{\frac{\hat{e}_1 \theta_1}{2}} e^{\frac{\hat{e}_2 \theta_2}{2}} = e^{\frac{\hat{e} \theta}{2}},$$

que podemos expresar,

$$\left( \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \hat{e}_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \hat{e}_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{e} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

haciendo el producto de cuaternios y separando parte real e hipercompleja,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_2 + \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\hat{e}_1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 &= \hat{e} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),\end{aligned}$$

La primera ecuación permite calcular el ángulo, mientras que la segunda calcula el eje,

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{2} &= \operatorname{acos}\left(\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2\right), \\ \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_2 + \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\hat{e}_1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 &= \hat{e} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),\end{aligned}$$

o, llamando,

$$a = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2,$$

$$\vec{b} = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_2 + \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\hat{e}_1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2,$$

queda,

$$\theta = 2 \operatorname{acos}(a),$$

$$\hat{e} = \vec{b} \sqrt{1-a^2}.$$

Recordando que,

$$\operatorname{sen}(\operatorname{acos}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para un número de rotaciones superior, la teoría sigue funcionando, pero una expresión cerrada es complejo de obtener.

La demostración de que el producto de dos cuaternios unitarios vuelve a ser un cuaternio unitario es bastante corta y pude verla en el foro ‘quora’ por el usuario ‘Ania Sheydvasser’, dados dos cuaternios unitarios  $q_i$ ,  $i=1,2$ , se cumple,

$$\bar{q}_i \bar{q}_i' = 1,$$

al ser unitarios (se ha notado con una tilde el complejo conjugado); para el producto de cuaternios,

$$\bar{q} = \bar{q}_1 \bar{q}_2,$$

calculamos el producto con su conjugado para ver si da la unidad,

$$\bar{q} \bar{q}' = \bar{q}_1 \bar{q}_2 (\bar{q}_1 \bar{q}_2)' = \bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{q}_2' \bar{q}_1' = 1,$$

con lo que queda comprobado.

## Anexo VI: Escalado del potencial con datos de prueba

En este apartado sólo vamos a comparar los datos de redshift-distancia con los obtenidos mediante el potencial; sólo se retiene este apartado por el interés del tratado de datos, ya hemos indicado que el potencial no existe en general para distancias tan grandes. También por retener los gráficos redshift-distancia de distintas fuentes.

Se van a analizar los objetos astronómicos más conocidos para medir distancias y que son ‘candelas estándar’.

Para los cálculos se ha supuesto que la velocidad de rotación del sol entorno a su eje es de aproximadamente  $w=31.4873 \text{ km}/(\text{s}\cdot\text{kpc})$  según los datos para el sol de la wikipedia (velocidad lineal / distancia al centro galáctico).

### Supernovas la

Empleados en distancias del orden de Mpc. Se han puesto a prueba los datos del proyecto ‘Supernova Cosmology Project’<sup>[7]</sup>. Para poder realizar los cálculos es preciso determinar la posición de cada supernova (el listado sólo suministra  $z$  y distancia -distance modulus- de 580 estrellas), esto

se ha hecho cargando el listado de supernovas en ‘Gaia Archive’; para pedir sus datos astrométricos (después de eliminar las supernovas desconocidas a Gaia, y renombrando algunas como SNLS (supernova legacy survey), quedando 471), el ‘resolver’ genera las coordenadas (RA, DEC) sin necesidad de hacer la consulta a la tabla ‘gaia\_source’, pero hay que descargarlas en formato VOTable porque no funciona el formulario de descarga de datos en CSV a fecha de hoy.

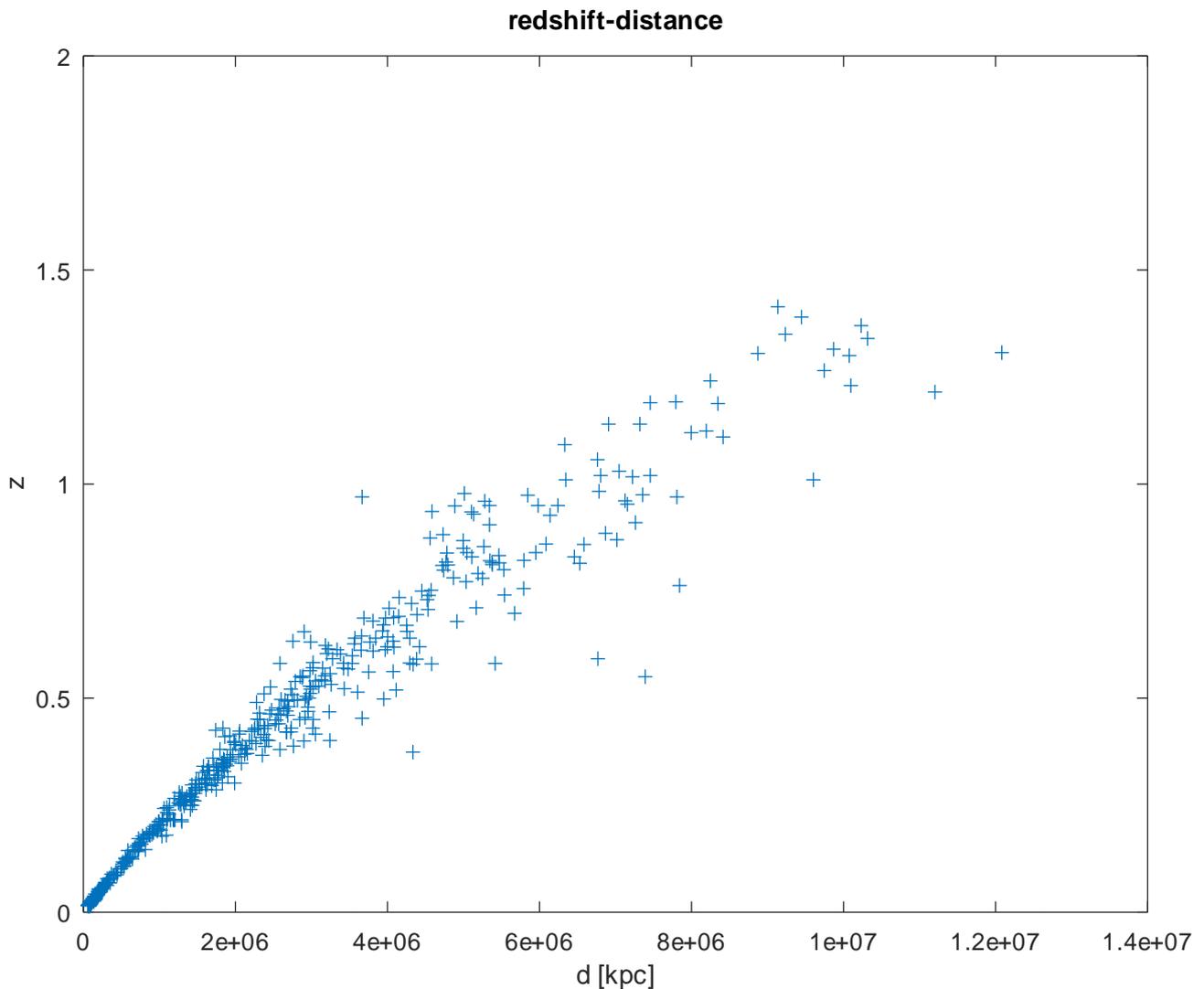
El ‘distance modulus’ ( $\mu$ ) se define respecto a la distancia ( $d$ ),

$$\mu = 5 \log_{10}(d) - 5.$$

De donde la distancia es (expresada en parsecs),

$$d = 10^{1 + \frac{\mu}{5}}.$$

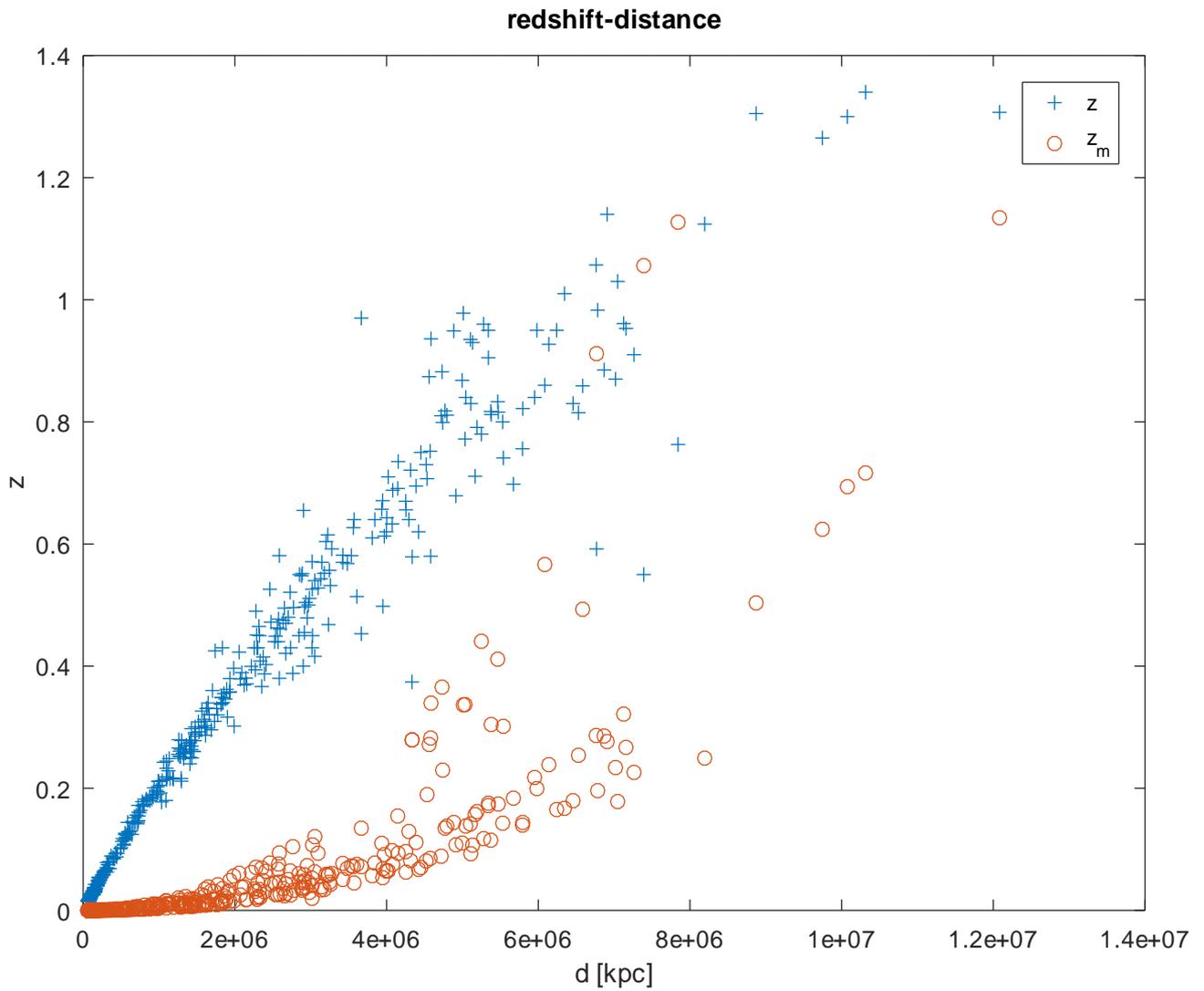
Los resultados quedan,



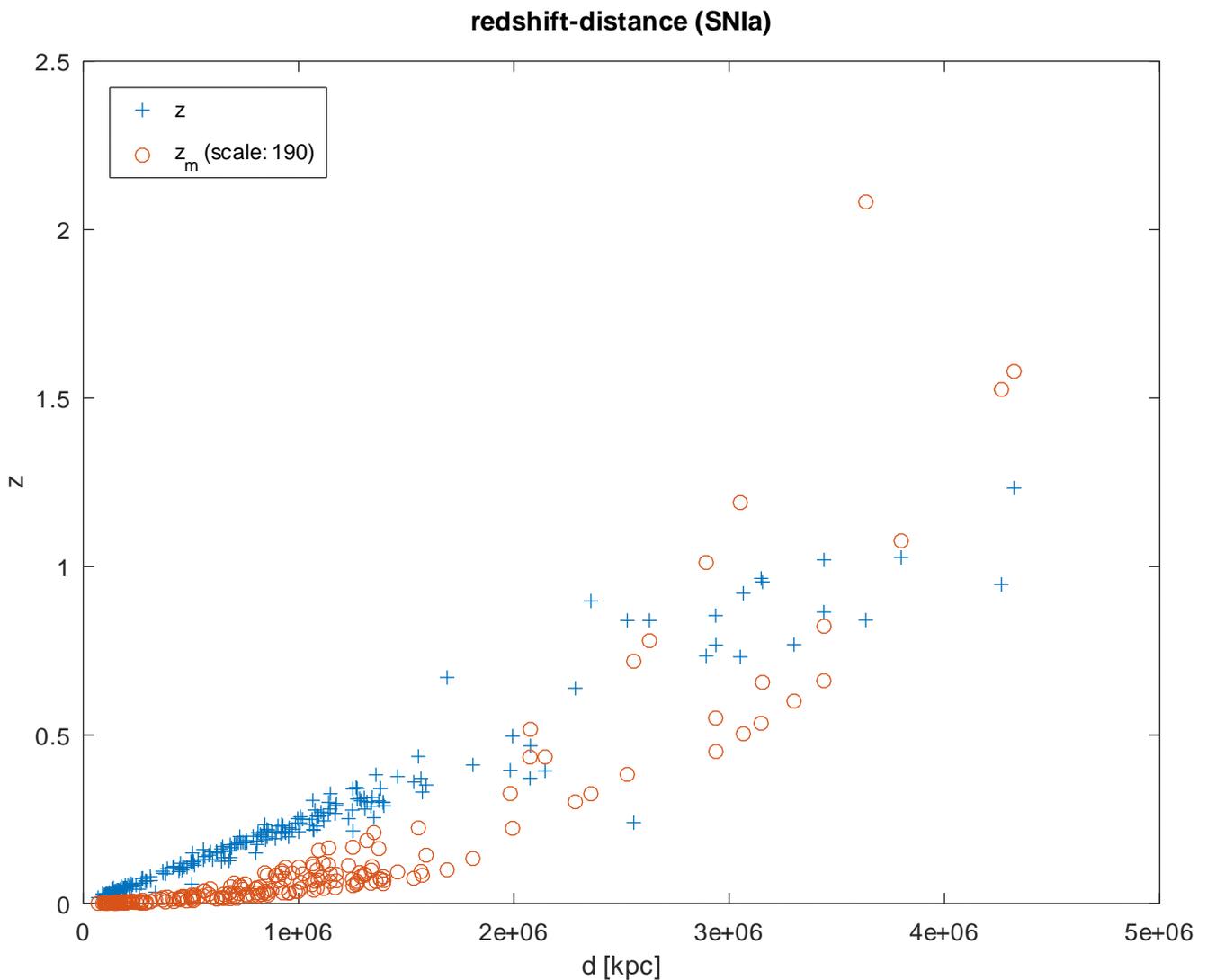
Resaltar que parecen distribuidos sobre una función raíz cuadrada, en vez de una parábola que era lo que se esperaba.

Para apreciar el orden de magnitud del potencial de las fuerzas de inercia, vamos a escalar la distancia hasta que el efecto aporte valores donde podamos comparar los gráficos; haciendo esto

obtenemos el siguiente gráfico. El factor de escala que se ha usado es 600. Nótese que también se ha expresado la distancia en kpc.



Para los datos de SNIa del CDS, obtenemos el siguiente gráfico,



Donde el factor de escala es 190.

## Cefeidas

Empleados en distancias del orden de kpc. Se han comprobado los resultados con una base de datos de cefeidas<sup>[2]</sup>, esta base de datos aporta la distancia al objeto. Como se esperaba, los resultados de distancias calculadas con cefeidas requieren un escalado mucho menor (se han escalado por 25) para poder comparar con los datos.

La referencia indicada, [2], posee datos de todo tipo de objetos astronómicos y se podría haber realizado el test basado en otros objetos celestes, con los datos que aporta esta fuente.

Esta vez, para resolver la posición se usó el servicio TAP del CDS. EL servicio admite la subida de tablas con las que realizar consultas ADQL (tipo SQL). Subimos la tabla denominada 'cefeidas.csv' obtenida del listado de la fuente del NED. Fue preciso reemplazar "WLM" -> "PGC 143", pero pocos ajustes extra requirieron los datos. Y se obtuvo la información astrométrica (posición y redshift) mediante la consulta,

```
SELECT col1 as "Name",
       main_id AS "Main identifier",
```

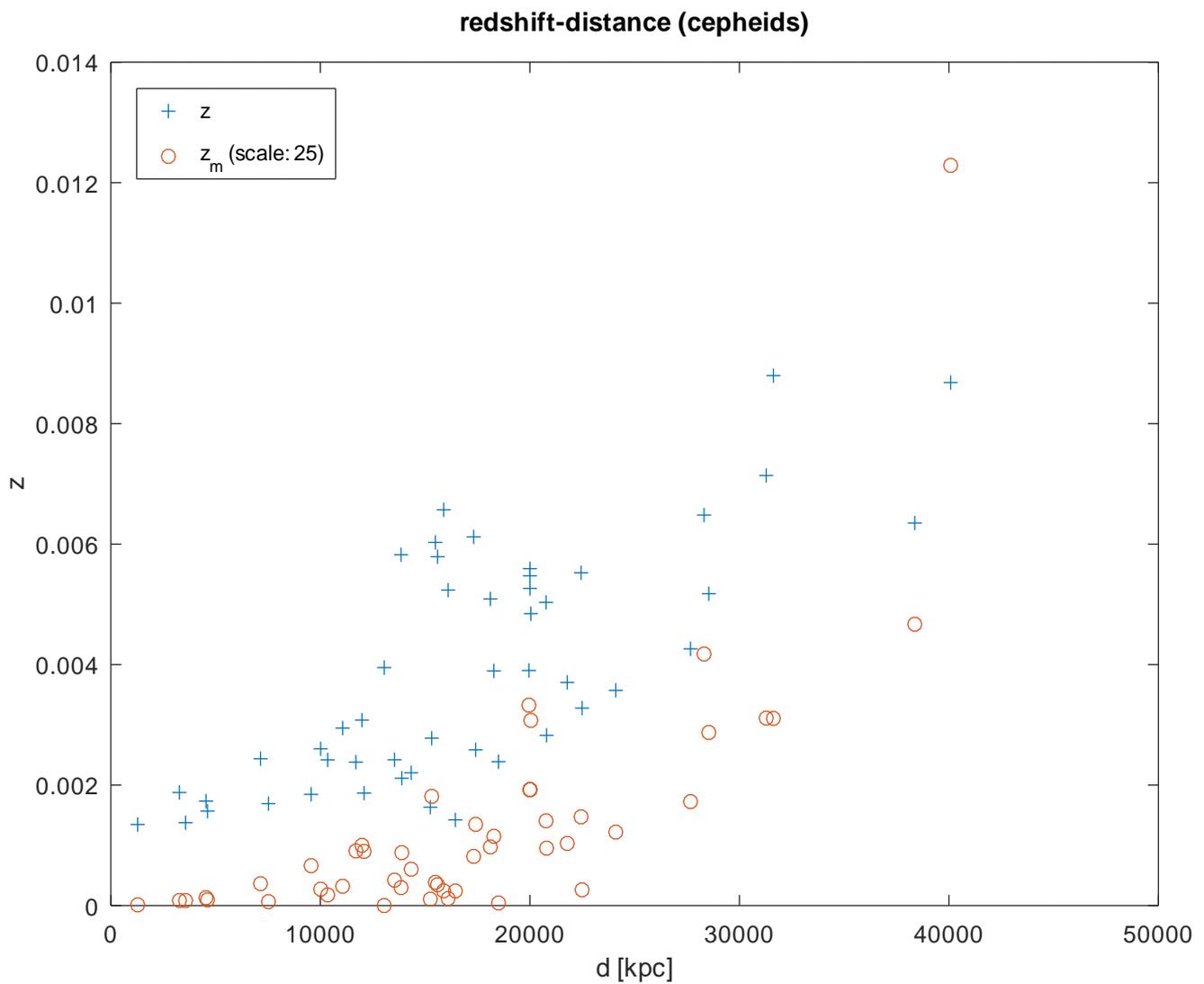
```

RA,
DEC,
pmra,
pmdec,
plx_value as "Parallax",
rvz_radvel as "Radial velocity",
rvz_redshift as "Redshift",
coo_bibcode AS "Coord Reference"
FROM basic JOIN ident ON basic.OID = ident.oidref JOIN TAP_UPLOAD.cefeidas ON
cefeidas.col1=ident.id;

```

Se observa en los datos que el redshift se interpreta completamente como velocidad radial. Y que, a bajas distancias, la velocidad radial puede ser de acercamiento (positiva) o alejamiento (negativa). Por este motivo se han filtrado valores de velocidad radial menores a 350km/s ( $z=0,001$  y  $d_{min}=460$  pc). En distancias superiores no hay velocidades negativas; esto es porque el efecto doppler relativista se mantiene en esos valores; mientras que el redshift del efector del 'rotor mossbauer' (en adelante redshift de inercia) aumenta con la distancia al cuadrado y dentro de una exponencial. En distancias del orden de 50kpc es despreciable el redshift debido al potencial de la gravedad o el redshift debido a la velocidad (doppler relativista) frente al redshift de inercia. Dicho de otro modo, la hipótesis más simple es que las velocidades de las galaxias sean de ese orden en todo el universo y que el redshift se deba a las fuerzas de inercia. Obviamente esto niega la expansión del universo.

Los resultados que se obtuvieron se muestran en la figura siguiente.



## Referencias

- [1] Solution of Problem Questions of Astronomy and Geology Using the Optimized Galactic Model. Aleksandrovich. Versión de Abril 2023.  
[https://www.researchgate.net/publication/370120897\\_Solution\\_of\\_Problem\\_Questions\\_of\\_Astronomy\\_and\\_Geology\\_Using\\_the\\_Optimized\\_Galactic\\_Model](https://www.researchgate.net/publication/370120897_Solution_of_Problem_Questions_of_Astronomy_and_Geology_Using_the_Optimized_Galactic_Model)
- [2] Datos del CDS: <http://ned.ipac.caltech.edu/Library/Distances/>
- [3] Resolver del CDS: <https://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-tap/>
- [4] Detection of the keplerian decline in the milky way rotation curve. Jiao et al. AA:2023:47513. Versión del 21 Sept. 2023.  
[https://www.researchgate.net/publication/374228380\\_Detection\\_of\\_the\\_Keplerian\\_decline\\_in\\_the\\_Milky\\_Way\\_rotation\\_curve](https://www.researchgate.net/publication/374228380_Detection_of_the_Keplerian_decline_in_the_Milky_Way_rotation_curve)

- [5] Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos. <https://vixra.org/abs/2404.0013v3>
- [6] SN1987A y la masa de los neutrinos. <https://vixra.org/abs/2501.0008>
- [7] Supernova Cosmology Project. <https://supernova.lbl.gov/union>. Compilación 'union2.1'.
- [8] Análisis del experimento del rotor mossbauer. <https://vixra.org/abs/2404.0118>
- [9] Apuntes UPV. Parámetros constantes de una órbita kepleriana. <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/132657/Mora%c3%b1o%20-%20Par%c3%a1metros%20constantes%20en%20%c3%b3rbitas%20keplerianas.pdf?sequence=1>
- [10] Apuntes UPV. Análisis y ejemplos de órbitas elípticas. <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/132654/Mora%C3%B1o%20-%20An%C3%A1lisis%20y%20ejemplos%20de%20%C3%B3rbitas%20el%C3%ADplicas.pdf?sequence=1>
- [11] The proper motion of sgrA\*:II. The mass of Sgr A. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0408107>. Ver Apéndice A, página 33. Se ha usado la versión 1 del 5 de agosto de 2004. Reid et al.