

Решение диофантово уравнения Брокара

Курмет Султан

Абстракт: Показано, что диофантово уравнения Брокара может иметь решение только в случае представления факториала в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2. Затем доказано невозможность представить другие факториалы в виде $n! = b(b + 2)$, за исключением известных трех факториалов. На основе анализа последовательных сомножителей и остатков, полученных в результате деления факториалов на $5!$, дополнительно получено еще два доказательства отсутствия других решений диофантово уравнения Брокара.

Ключевые слова: факториал, диофантово уравнение, Брокер, Рамануджан, решение.

1 Введение

Диофантово уравнение Брокара – это математическая задача, в которой требуется найти целые значения n и m , для которых $n! + 1 = m^2$. Эту математическую задачу сформулировал Анри Брокерд в двух статьях 1876 и 1885 годах [1, 2]. Позже в 1913 году эта задача повторно была представлена Шринивасой Рамануджом [3, 4], так как он не знал о статьях Анри Брокерда, поэтому в некоторых источниках эта задача называется диофантово уравнение Брокера-Рамануджана. На сегодняшний день известны только три решения уравнения Брокера: $4! + 1 = 5^2$, $5! + 1 = 11^2$ и $7! + 1 = 71^2$.

2 Представление квадрата натурального числа

Поскольку диофантово уравнение Брокера связано с квадратом натурального числа, сначала покажем представление квадрата натурального числа.

Лемма 2.1. *Квадрат любого натурального числа больше 1 выражается в виде произведения двух натуральных чисел различающихся на 2 по формуле*

$$(2.1) \quad a^2 = (a - 1)(a + 1) + 1.$$

Из Леммы 1 следует, что решение задачи Брокера существует только в случае, когда

$$(2.2) \quad n! = (a - 1)(a + 1).$$

Далее если примем обозначение $a - 1 = b$, то уравнение (2.2) будет иметь вид

$$(2.3) \quad n! = b(b + 2).$$

На основе уравнения (2.3) можем утверждать, что для получения равенства Брокара $n! + 1 = m^2$ факториал должен быть равен произведению двух натуральных чисел, различающихся на 2.

Основываясь Лемме 1 и равенству (2.3), сформулируем следующую Лемму.

Лемма 2.2. *Если найдется натуральное число b такое, что $n! = b(b + 2)$, то непременно получится равенство $n! + 1 = (b + 1)^2$.*

Отметим, что только вышеприведенные три факториала, которые являются решениями диофантова уравнения Брокара, имеют представление в виде равенства (2.3):

$$\text{I) } 4! = 4 \cdot (4 + 2); \quad \text{II) } 5! = 10 \cdot (10 + 2); \quad \text{III) } 7! = 70 \cdot (70 + 2).$$

Далее выясним в каких случаях факториал можно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2.

3 Решение уравнения Брокара

3.1 Представление факториала в укороченном виде

Не трудно доказать, что произведение любых четырех последовательных натуральных чисел имеет представление в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2. Однако не все натуральные числа, представимые в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, имеют представление в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел.

При этом несложно установить, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, первый из которых равен аргументу факториала, будет меньше $n!$ для $n > 7$.

Например, $8 \cdot (8 + 1) \cdot (8 + 2) \cdot (8 + 3) = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 7920 < 8! = 40320$.

Из вышесказанного следует, что любой факториал больше $7!$ не имеет представление в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел, первый из которых равен аргументу факториала. Это означает, что факториал больше $7!$ может выражаться только произведением четырех последовательных натуральных чисел, первый из которых

равен аргументу факториала, и пятого числа, или произведением четырех последовательных натуральных чисел, первый из которых больше аргумента факториала.

В этой связи, далее мы будем исследовать возможность представление факториала в виде произведения четырех и большего количества последовательных натуральных чисел.

Примечание.

В этой главе мы не рассматриваем все натуральные числа представимые в виде $b \cdot (b + 2)$, количество которых бесконечно, в действительности сначала мы рассматриваем натуральные числа вида $b \cdot (b + 2)$, получаемые путем произведения четырех последовательных чисел, количество которых также бесконечно, затем мы ищем натуральное число вида $b \cdot (b + 2)$, которое получено путем перегруппирования последовательных сомножителей, начинающегося с 1 или 2, количество которого конечно.

Отметим, что любой факториал можно представить в виде последовательных сомножителей, начинающегося 2, так как число 1 не влияет на результат умножения.

Для удобства примем следующее определение.

Определение 1. Представление факториала в виде произведения последовательных натуральных чисел с меньшим количеством сомножителей чем количество сомножителей факториала, называется укороченным представлением факториала. При этом если последовательные сомножители факториала начинаются с аргумента факториала, то такое представление факториала называется базовым укороченным представлением.

Отметим, что все известные три факториала $4!$, $5!$ и $7!$, которые являются решениями диофантова уравнения Брокара, имеют представление в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел, при этом $7!$ имеет укороченное представление: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 4!$; $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 5!$; $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040 = 7!$

Таким образом, если $n > 7$, то факториал может выражаться одним из следующих двух уравнений (3.1) и (3.2),

$$(3.1) \quad n! = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m) \cdot k_n, \text{ где } k_n \text{ — множитель } n!, n, m \in \mathbb{N}.$$

Примечание. Индекс n множителя k_n показывает аргумент рассматриваемого факториала.

Отметим, что если $k_n = 1$ или $k_n = n + m + 1$, то рассматриваемый факториал имеет укороченное представление.

(3.2) $n! = (n + s) \cdot (n + s + 1) \cdot (n + s + 2) \cdot \dots \cdot (n + s + q) \cdot k_n$, где k_n — множитель $n!$, $n, q, s \in \mathbb{N}$.

Отметим, что если $k_n = 1$ или $k_n = n + s + q + 1$, то рассматриваемый факториал имеет укороченное представление.

Таким образом, вместе того, чтобы искать только факториалы представимые в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел, далее будем искать факториалы больше $7!$ представимые в укороченном виде, т.е. в виде произведения четырех и более последовательных натуральных чисел. Если существует факториал больше $7!$ представимый в укороченном виде, при этом количество сомножителей будет равно 4, то это будет новым решением уравнения Брокара, а если количество сомножителей будет больше 4, то нужно будет доказать невозможность представить его в виде $n! = b \cdot (b + 2)$. Отсюда следует, что в первую очередь нужно доказать несуществование факториала больше $7!$ представимого в укороченном виде.

3.2 Решение уравнения Брокара

Допустим, что существует факториал больше $7!$ представимый в укороченном виде

(3.3) $n! = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m)$, где $n > 7$.

В этом случае имеем тождество

(3.4) $(n - 1)!n = n(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m)$, где $n, m \in \mathbb{N}$,

поэтому, вышеописанную задачу можно заменить следующим вопросом.

Вопрос 1. Существует ли натуральное число $n > 7$, такое, что произведение всех натуральных чисел, расположенных слева от него, будет равно произведению нескольких последовательных натуральных чисел начиная с числа $n + 1$, расположенных справа от него?

Другими словами, мы должны определить имеет ли натуральное решение следующее уравнение для $n > 7$,

$$(3.5) \quad (n-1)! = (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+m), \text{ где } n, m \in \mathbb{N}.$$

Вышесказанное сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.1. Нижеследующее уравнение не имеет натурального решения для $n > 7$,

$$(n-1)! = (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+m), \text{ где } n, m \in \mathbb{N}.$$

Далее докажем Теорему 3.1, а именно, докажем, что уравнение (3.5) не имеет натурального решения для $n > 7$.

Очевидно, что любой факториал $(n+m)!$ можно представить в виде

$$(3.6) \quad (n+m)! = (n-1)! \cdot n \cdot [(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+m)].$$

На основе (3.6) используя (3.3) и (3.4) можем написать

$$(n+m)! = [(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+m)] \cdot n \cdot [(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+m)], \text{ или}$$

$$(3.7) \quad (n+m)! = n \cdot [(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+m)]^2.$$

Из (3.7) следует, что не существует факториала больше $7!$ представимого в укороченном виде, так как сомножители любого факториала больше 1 не повторяются, поэтому если даже $(n+m)!$ делиться на $(n+m)^2$ без остатка, то результат деления не может быть равен результату деления $(n+m)!$ на произведение сомножителей при любой их выборке. Тем не менее, далее проверим возможность представление факториала больше $7!$ по формуле (3.7),

$$(7+1)! = 7 \cdot (7+1)^2; 40320 > 448; \frac{40320}{448} = 90;$$

$$(7+2)! = 7 \cdot [(7+1) \cdot (7+2)]^2; 362880 > 36288; \frac{362880}{36288} = 10;$$

$$(7+3)! = 7 \cdot [(7+1) \cdot (7+2) \cdot (7+3)]^2; 3628800 = 3628800; \frac{3628800}{3628800} = 1.$$

Из вышеприведенных примеров следует, что только $(7+3)! = 10!$ можно представить по формуле (3.7), а факториалы больше $10!$ такое представление не имеют, так как для

факториалов, где $m > 3$, получим нижеследующее неравенство, поскольку правая сторона неравенства растет намного быстрее, чем его левая сторона,

$$(3.8) \quad (7 + m)! < 7 \cdot [(7 + 1) \cdot (7 + 2) \cdot \dots \cdot (7 + m)]^2.$$

Таким образом, можно утверждать, что из всех факториалов больше $7!$ только $(7 + 3)! = 10!$ можно представить по формуле (3.7), при этом $10!$ не имеет представление в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2.

Это означает, что не существует натуральное число $n > 7$ такое, что произведение всех натуральных чисел, расположенных слева от него, было бы равно произведению нескольких последовательных натуральных чисел начиная с числа $n + 1$, расположенных с права от него, т.е. уравнение $(n - 1)! = (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m)$, где $n, m \in \mathbb{N}$, не имеет натурального решения для $n > 7$.

Вышесказанное является доказательством верности Теоремы 3.1, поэтому можно утверждать, что любой факториал больше $7!$ невозможно представить в виде произведения возрастающей последовательности натуральных чисел, первое из которых равен аргументу факториала.

Далее проверим возможность представления факториала больше $7!$ в укороченном виде, когда последовательные сомножители начинаются с числа не равного аргументу факториала, т.е. по формуле (3.2).

Допустим, что существует факториал больше $7!$ представимый в укороченном виде, причем сомножители факториала начинается с числа большего, чем аргумент факториала, пусть этим числом будет $n + 2$.

В этом случае из (3.3) и (3.4) удаляем первые два сомножителя $n, (n + 1)$ и получим

$$(3.9) \quad n! = (n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m), \text{ где } n > 7.$$

Тогда тождество (3.4) будет иметь следующий вид

$$(3.10) \quad (n - 1)! n = (n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m), \text{ где } n, m \in \mathbb{N},$$

Далее, учитывая (3.9) и (3.10) уравнение (3.6) представим в виде

$$(n + m)! = [(n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m)] \cdot n \cdot [(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m)], \text{ или}$$

$$(3.11) \quad (n + m)! = n \cdot (n + 1) \cdot [(n + 2) \cdot \dots \cdot (n + m)]^2.$$

Для этого случая также справедливо утверждение сделанное для (3.7), а именно не существует факториала больше 7! представимого в укороченном виде по формуле (3.2), где сомножители факториала начинается с числа большего, чем аргумент факториала. Это объясняется тем, что $(n + m)!$ не может иметь делителя равного квадрату аргумента факториала.

Далее проверим возможность представление факториала больше 7! по формуле (3.11),

$$(7 + 3)! = 7 \cdot (7 + 1) \cdot [(7 + 2) \cdot (7 + 3)]^2; \quad 3628800 > 453600; \quad \frac{3628800}{453600} = 8.$$

$$(7 + 4)! = 7 \cdot (7 + 1) \cdot [(7 + 2) \cdot (7 + 3) \cdot (7 + 4)]^2; \quad 39916800 < 54885600;$$

Таким образом, выше мы доказали, что не существует факториала больше 10! представимого в укороченном, включая представление факториала в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел. Отсюда следует, что не существует факториала больше 7! представимого в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2. Это означает, что диофантово уравнение Брокара решена, оно не имеет решения кроме известных трех решений.

В Приложениях 1 и 2 приводятся еще два варианта решения диофантово уравнения Брокара, найденные соответственно:

- 1) путем доказательства невозможности получения натурального числа представимого в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2 путем группирования последовательных натуральных сомножителей, начинающихся с 1 или 2;
- 2) путем анализа остатков, получаемых от деления факториала больше 5! на 120.

Заключение

Доказано, что диофантово уравнение $n! + 1 = m^2$ может иметь решение только в случае, если факториал можно представить в виде произведения пары натуральных чисел,

разность которых составляет 2. Далее показано, что известные три факториала $4!$, $5!$ и $7!$, которые являются решениями диофантова уравнения Брокара, имеют представление в виде произведения пары натуральных чисел, разность которых составляет 2, а также имеет представление в виде произведения четырех последовательных натуральных чисел.

Затем доказано, что ни один факториал больше $7!$ не имеет представление в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, так как не имеет представление в виде произведения последовательных натуральных чисел, где первое число равно или больше аргумента факториала. Дополнительно получены еще два варианта решения диофантова уравнения Брокара на основе анализа соответственно: 1) вариантов группирования последовательных сомножителей, начинающихся с 1 или 2; 2) остатков, получаемых от деления факториала больше $5!$ на 120.

Это означает, что диофантова уравнение Брокара решена, или можно сказать, что гипотеза Брокара верна и она доказана.

Благодарности

Автор благодарен своему давнему другу кандидату физико-математических наук, доценту Марсу Габбасову, а также профессору Kenneth G. Monks за ценные замечания, которые позволили автору улучшить решение диофантова уравнения Брокара.

ССЫЛКИ

- [1] H. Brocard, *Question 166*, Nouv. Corres. Math. **2** (1876), 287.
- [2] H. Brocard. *Question 1532*, Nouv. Ann. Math. **4** (1885), 391.
- [3] S. Ramanujan, *Question 469*, J. Indian Math. Soc. **5** (1913), 59.
- [4] S. Ramanujan, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan* (Ed. G. H. Hardy, P. V. S. Aiyar, and B. M. Wilson). Providence, RI: Amer. Math. Soc., p. 327, 2000.

Приложение 1.

A1. Второй вариант решения диофантова уравнения Брокара

A1.1 Представление натурального числа в виде произведения двух натуральных чисел

Факториал является произведением последовательных натуральных чисел, поэтому сначала мы должны определить в каких случаях из последовательных натуральных чисел можно получить натуральное число, представимое в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2.

Чтобы получить произведение двух натуральных чисел $b \cdot (b + e)$, различающихся на целое число e , путем умножения четырех натуральных чисел, необходимо выбрать два соседних натуральных числа a и $a + 1$, затем меньшее из них умножить на число равное $(a + e + 1)$, а больше умножить на $(a + e)$, т.е.

$$(A1.1) \quad b \cdot (b + e) = [a(a + e + 1)][(a + 1)(a + e)], \text{ где } a, b, e \in \mathbb{N}.$$

Для частных случаев имеем

$$(A1.2) \quad e = 1, \quad b \cdot (b + 1) = [a(a + 1 + 1)][(a + 1)(a + 1)] = [a(a + 2)][(a + 1)(a + 1)];$$

$$(A1.3) \quad e = 2, \quad b \cdot (b + 2) = [a(a + 2 + 1)][(a + 1)(a + 2)] = [a(a + 3)][(a + 1)(a + 2)].$$

Как видно из (A1.3), число вида $b \cdot (b + 2)$ получается путем произведения четырех последовательных натуральных чисел.

Примечание. Мы рассматриваем только натуральные числа, поэтому в формуле (A1.1) разность двух чисел e является натуральным числом, хотя формула (A1.1) справедливо и для вещественных e .

Поскольку натуральных чисел представимых в виде $b \cdot (b + 2)$ намного больше, чем натуральных чисел представимых в виде $b \cdot (b + 2) = a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$, возникает следующий вопрос.

Вопрос 1. В каких случаях произведения последовательных натуральных чисел можно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2?

Чтобы ответить на этот вопрос, сначала решим следующую задачу.

Пусть дано произведение последовательности n натуральных чисел,

$$m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 3) \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n,$$

требуется представить это произведение в виде произведения двух натуральных чисел с наименьшей разностью.

Для решения этой задачи сначала попробуем уменьшить количество сомножителей в 2 раза так, чтобы разности между сомножителями были наименьшими.

Чтобы получить меньшего количества сомножителей с минимальной разницей, путем группировки последовательных натуральных сомножителей по два сомножителя, мы должны сгруппировать попарно все сомножители равноудаленные от концов последовательности, т.е. самое большое число сделать парой самого меньшего числа, затем следующее самое большое сделать парой второго меньшего числа и т.д., в этом случае количество сомножителей числа уменьшится в два раза (если количество множителей четное число), а разность сомножителей будет минимальными.

После проведения вышеописанной операции, вышеприведенная последовательность сомножителей будет иметь следующий вид

$$m = [1n] \cdot [2(n - 1)] \cdot [3(n - 2)] \cdot [4(n - 3)] \cdot \dots \cdot ,$$

должно быть понятно, что в этом случае количество сомножителей будет в 2 раза меньше.

Таким образом мы уменьшили количество сомножителей в 2 раза, и получили новую последовательность натуральных чисел, где разность между сомножителями будет выражаться арифметической прогрессией

$$(A1.4) \quad d = 2 + 2t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что уравнения (A1.4) справедливо для последовательных натуральных сомножителей, начинающегося с любого числа, но количество сомножителей непременно должно быть четным числом.

Сумма разностей между множителями соответствующие уравнению (A1.4) является наименьшей по сравнению с другими вариантами группирования сомножителей по два

числа. При этом заметим, что самая большая разница будет между первыми двумя сомножителями, затем она будет уменьшаться до 2.

Метод группирования сомножителей, описанный выше, дает самую меньшую разность между сомножителями, при любом другом варианте сумма (или произведение) разностей между сомножителями будет больше, чем разности, соответствующей уравнению (A1.4). Сказанное не требует доказательства, так как это очевидно.

Следует отметить, что после первой операции по снижению количество сомножителей, разницы между сомножителей не будут равны 1, что не позволяет формировать четыре последовательных натуральных сомножителей. Конечно, в этом случае можно попытаться некоторые составные числа разложить на простые множители и распределить их на другие пары, однако тогда разницы между сомножителями не будет соответствовать уравнению (A1.4), т.е. они больше, чем (A1.4).

Таким образом, чтобы представить произведение последовательных натуральных чисел (мы рассматриваем только последовательные числа) в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, необходимо выполнение следующих трех условий:

- 1) Сомножители непременно должны быть натуральными и последовательными числами;
- 2) Количество последовательных натуральных сомножителей должно быть 4;
- 3) Если количество последовательных натуральных сомножителей больше 4, то должна быть возможность из них формировать последовательность натуральных сомножителей в количестве 4.

A1.2 Представление факториала в виде произведения двух натуральных чисел

Вышеперечисленные три условия, выполнения которых необходимо для представления произведения последовательных натуральных чисел в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, и относятся и к факториалу, так как сомножители факториала являются последовательными натуральными числами.

Три факториала $4!$, $5!$, $7!$, которые являются решениями задачи Брокара–Рамануджана, имеют представление в виде четырех последовательных натуральных сомножителей

$$4! = (4 - 3) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 1) \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$$

$$5! = (5 - 3) \cdot (5 - 2) \cdot (5 - 1) \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

$$7! = 7 \cdot (7 + 1) \cdot (7 + 2) \cdot (7 + 3) = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

Для $4!$, $5!$, представление в виде четырех последовательных натуральных сомножителей образуется естественным образом, а для $7!$ такое представление создается перегруппированием простых сомножителей числа 5040.

Таким образом, чтобы представить факториал в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, необходимо выполнение вышеописанных трех условий, поэтому далее докажем, что эти три условия выполняется только для $4!$, $5!$ и $7!$ Отметим, что первое условие выполняется для любого факториала больше 1.

На основе (3.3) можно утверждать, что, если существует факториал представимое в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2, т.е. вида $n! = b \cdot (b + 2)$, тогда этот факториал непременно имеет представление в виде

$$(A1.5) \ n! = b \cdot (b + 2) = a(a + 1)(a + 2)(a + 3).$$

Очевидно, что если число вида $b \cdot (b + 2)$ равно факториалу и оно имеет представление в виде произведение четырех последовательных натуральных чисел, то оно должно получиться только путем произведения всех сомножителей факториала, т.е. других чисел в составе делителей числа $b \cdot (b + 2)$ не должно быть. Отсюда следует, что хотя бы одно из четырех последовательных натуральных чисел, которые являются сомножителями натурального числа $b \cdot (b + 2)$, должно быть равно аргументу факториала или кратным ему.

A1.3 Второй вариант решения уравнения Брокара

Любой факториал можно получить путем умножения меньшего факториала на натуральное число, поэтому все факториала больше $7!$ можно получить умножением $7!$,

который имеет представление в виде $7! = b \cdot (b + 2)$, на произведение последовательных натуральных чисел, начинающихся с 8. В этой связи возникает следующий вопрос.

Вопрос 2. Можно ли получить факториала больше $7!$ представимого в виде $n! = b \cdot (b + 2)$, умножением $7!$ на произведение последовательных натуральных чисел, начинающихся с 8?

Не трудно установить причину невозможности представления $8!$ в виде $8! = b \cdot (b + 2)$, для этого просто нужно попытаться распределить простые множители числа 8 на следующие четыре последовательных сомножителя $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, произведение которых равно $7!$. При любом варианте перегруппирования простых множителей пяти чисел 7, 8, 9, 10, 8, произведение которых равно $8!$, невозможно получить четыре последовательных сомножителя, значит $8!$ невозможно представить в виде $8! = b \cdot (b + 2)$.

Сказанное относится всем факториалом больше $7!$, так как невозможно распределить простые множители числа, являющегося произведением последовательных натуральных чисел начинающихся с 8 на четыре последовательных сомножителя $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ так, чтобы образовался новое число, представимое в виде четырех последовательных сомножителя.

Невозможность представить факториалы больше $7!$ в виде $n! = b \cdot (b + 2)$ можно объяснить также следующим образом.

Если применить операцию по снижению количества сомножителей, описанной в главе 2, для факториалов $n!$ больше $7!$, то получим $n/2$ сомножителя, разность между ними будет выражаться по (3.3), т.е. получить последовательность натуральных чисел, разность между которыми была бы равна 1, невозможно. Если и для полученной последовательности применить операцию снижения количества сомножителей, количества сомножителей уменьшится еще в два раза (если не считать одинокого числа), но разность между сомножителями будет еще больше, т.е. с каждой итерацией по уменьшению количества сомножителей, разность между ними будет увеличиваться.

Таким образом, можно утверждать, что факториалы больше $7!$ невозможно представить в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2. Это означает, уравнение Брокара не имеет других решений кроме известных трех факториалов $4!$, $5!$, $7!$

Приложение 2.

A2. Решение уравнения Брокара на основе остатков

Любой факториал больше $5!$ можно получить путем умножения $5!$ на возрастающую последовательность натуральных чисел, начинающихся с 6, поэтому при делении натуральных чисел вида $b \cdot (b + 2)$ на $5! = 120$ мы должны получить целое число, представимое в виде последовательных натуральных сомножителей начинающихся с 6.

Учитывая вышесказанное, далее мы проведем анализ остатков, получаемых при делении последовательности пары натуральных чисел вида b и $(b + 2)$ на 120 по отдельности и докажем, что только в одном случае остатки от деления b и $(b + 2)$ на 120 будет равно произведению последовательных натуральных чисел начинающихся 6.

Оба натуральных числа вида b и $(b + 2)$ делятся на 120 без остатка, когда эти числа выражаются следующими арифметическими прогрессиями

$$(A2.1) \quad b = 10 + 10t;$$

$$(A2.2) \quad b + 2 = 12 + 10t, t = 0, 1, 2, \dots$$

Если поделить четные числа, выражаемых уравнением (A2.1) на 10, а также поделить четных чисел, выражаемых уравнением (A2.2) на 12, целые числа будет выражаться соответственно следующими арифметическими прогрессиями,

$$(A2.3) \quad \frac{b}{120} = \frac{(10+10t)}{120} \rightarrow r_b = 1 + 6x;$$

$$(A2.4) \quad \frac{(b+2)}{120} = \frac{(12+10t)}{120} \rightarrow r_{b+2} = 1 + 5x, x = 0, 1, 2, \dots$$

Далее, умножим эти две арифметические прогрессий, получим

$$y = (1 + 6x)(1 + 5x) = 1 + 5x + 6x + 30x^2;$$

$$(A2.5) \quad y = 30x^2 + 11x + 1.$$

В этом случае, если произведение пары четных чисел, выражаемых уравнениями (A2.1) и

(A2.2), равен числу $\frac{n!}{120}$, то мы можем написать

$$(A2.6) \quad \frac{n!}{120} = 30x^2 + 11x + 1, n \geq 5, x = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что соотношение $\frac{n!}{120}$, в зависимости от $n \geq 7$, должно быть равно последовательных сомножителей, начинающихся с 6. Два последовательных сомножителя

$6 \cdot 7$ по формуле (A2.5) получиться при $x = 1$, например,

$$x = 1, y = 30 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 1 = 42.$$

Такое число получиться при делении $7!$ на 120 ,

$$\frac{7!}{120} = 6 \cdot 7 = 42 = 30 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 1.$$

Для $8!$ по формуле (A2.5) невозможно получить целое число, так как даже если принять $x = 7 \cdot 8$, чтобы первые два слагаемые были целыми числами, третий слагаемый $\frac{1}{6 \cdot 7}$ не может быть целым числом,

$$\frac{8!}{120} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 30x^2 + 11x + 1, \quad 8 = \frac{30x^2}{6 \cdot 7} + \frac{11x}{6 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7}.$$

Для общего случае, когда $\frac{m!}{120}$, можем написать

$$(A2.7) \quad m = \frac{30x^2}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (m-1)} + \frac{11x}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (m-1)} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (m-1)}.$$

Очевидно, что уравнение (A2.7) не может иметь целого решения, так как даже если принять

$x = 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (m-1)$, то третье слагаемое $\frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (m-1)}$ не может быть целым числом. Отсюда

следует, что не существует факториала больше $7!$, чтобы m был равен аргументу факториала.

Это означает, что не существует факториала больше $7!$, представимого в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся на 2.