

# Considérations sur la formule du binôme

$$(x + y)^n = x^n + y^n + xy \sum_{j=0}^{n-2} (x^j + y^j) (x + y)^{n-2-j}$$

---

Auteur : Olivier Massot  
Email : [omassot@singnet.com.sg](mailto:omassot@singnet.com.sg)

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Une autre façon d'exprimer la formule du binôme de Newton</b>	<b>1</b>
1.1	Objet du chapitre . . . . .	1
1.2	Une autre formule . . . . .	1
1.3	Etude de la nouvelle formule . . . . .	2
1.4	Valeurs prises par les coefficients $D_h^j$ où $(h \in \mathbb{N})$ et $(h \geq 3)$ . . . . .	8
1.5	Etude sur les coefficients $D_h^j$ . . . . .	11
1.5.1	Cas 1 : $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor = m$ . . . . .	15
1.5.1.1	$\rho = 0$ . . . . .	15
1.5.1.2	$\rho = 1$ . . . . .	16
1.5.1.3	$\rho = 2$ . . . . .	16
1.5.2	Cas 2 : $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor + 1 = m$ . . . . .	16
1.5.2.1	$\rho = 0$ . . . . .	16
1.5.2.2	$\rho = 1$ . . . . .	17
1.5.2.3	$\rho = 2$ . . . . .	17
1.6	Etude de $A_{2k+1}(x, y)$ où $k \in \mathbb{N}^*$ . . . . .	19
1.7	Différentes expressions de la formule du binôme . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Quelques considérations supplémentaires sur les coefficients du binôme</b>	<b>23</b>
2.1	Objet du chapitre . . . . .	23
2.2	La formule classique du binôme réarrangée . . . . .	23
2.3	Les suites $a_{m,k}$ . . . . .	24
2.3.1	$m \equiv 0 \iff m - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ . . . . .	24
2.3.1.1	La suite $a_{m,0}$ . . . . .	24
2.3.1.2	La suite $a_{m,1}$ . . . . .	25
2.3.1.3	La suite $a_{m,2}$ . . . . .	25
2.3.2	$m \equiv 1 \iff m - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ . . . . .	26
2.3.2.1	La suite $a_{m,0}$ . . . . .	26
2.3.2.2	La suite $a_{m,1}$ . . . . .	27
2.3.2.3	La suite $a_{m,2}$ . . . . .	27
2.3.3	$m \equiv 2 \iff m - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ . . . . .	28
2.3.3.1	La suite $a_{m,0}$ . . . . .	28
2.3.3.2	La suite $a_{m,1}$ . . . . .	29
2.3.3.3	La suite $a_{m,2}$ . . . . .	29
2.4	Les suites $A_{n,k}$ . . . . .	31
2.5	Les suites $b_{m,k}$ . . . . .	32
2.6	Les suites $B_{n,k}$ . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Etude de la conjecture de Fermat</b>	<b>38</b>
3.1	Objet du chapitre . . . . .	38
3.2	Rappel de la conjecture . . . . .	38
3.3	Premier point . . . . .	38
3.4	Deuxième point . . . . .	39
	3.4.0.1 $(x + y) - z \equiv 0 \pmod{p}$ . . . . .	39
	3.4.0.2 $(x + y) - z \not\equiv 0 \pmod{p}$ . . . . .	40
3.5	Troisième point . . . . .	41
	3.5.1 Première remarque . . . . .	41
	3.5.2 Deuxième remarque . . . . .	42
3.6	Une démonstration de la conjecture . . . . .	42

## **Résumé**

La formule du binôme, établie par Isaac Newton, est d'une importance incontestable et trouve son usage dans de très nombreux domaines. Cette étude présente des formulations alternatives à la formule de Newton ainsi que certains résultats qu'on en peut dériver concernant la conjecture de Fermat.

# Chapitre 1

## Une autre façon d'exprimer la formule du binôme de Newton

### 1.1 Objet du chapitre

La formule du binôme peut être réécrite. Cette nouvelle formulation permet à son tour de procéder à d'autres calculs qui mettent en évidence certaines propriétés que la formule originale ne permet pas de dégager.

### 1.2 Une autre formule

Soit un entier naturel  $n$  donné,  $x$  et  $y$  étant deux nombres réels non nuls. Dans tout ce qui suit, cet entier naturel  $n$  est supposé supérieur ou égal à 3. Nous pouvons écrire

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{(x+y) - x} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} x^j = \frac{(x+y)^n - x^n}{y}$$

et de même

$$\frac{(x+y)^n - y^n}{(x+y) - y} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} y^j = \frac{(x+y)^n - y^n}{x}$$

Sommons ces deux quantités

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{y} + \frac{(x+y)^n - y^n}{x} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} (x^j + y^j)$$

et nous obtenons la formule

$$(x+y)^{n+1} - (x^{n+1} + y^{n+1}) = xy \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} (x^j + y^j)$$

que par commodité nous écrivons

$$(x+y)^n - (x^n + y^n) = xy \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} (x^j + y^j) \quad (1.1)$$

La formule de Newton, que nous rappelons ici

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j x^{n-j} y^j \quad (1.2)$$

où

$$C_n^j = \frac{n!}{(n-j)!j!} \quad (1.3)$$

permet donc d'établir l'égalité

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x + y)^{n-2-j} (x^j + y^j) = \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j x^{n-j-1} y^{j-1}$$

soit finalement

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x + y)^{n-2-j} (x^j + y^j) = \sum_{j=0}^{n-2} C_n^{j+1} x^{n-2-j} y^j$$

### 1.3 Etude de la nouvelle formule

Posons

$$A_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n-2} (x + y)^{n-2-j} (x^j + y^j) \quad (1.4)$$

Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-2} (x + y)^{n-2-j} (x^j + y^j) &= \\ &= \sum_{j=0}^{p-2} (x + y)^{n-2-j} (x^j + y^j) \\ &\quad + \sum_{j=p-1}^{n-2} (x + y)^{n-2-j} (x^j + y^j) \end{aligned}$$

avec  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $p < n$ , soit encore

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-2} (x + y)^{n-2-j} (x^j + y^j) &= \\ &= \sum_{j=0}^{p-2} (x + y)^{(n-p)+(p-2-j)} (x^j + y^j) \\ &\quad + \sum_{j=p-1}^{n-2} (x + y)^{n-2-(j-(p-1)+p-1)} (x^{j-(p-1)+p-1} + y^{j-(p-1)+p-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} (x^j + y^j) &= \\ &= (x+y)^{n-p} \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{p-2-j} (x^j + y^j) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-2-(j+p-1)} (x^{j+p-1} + y^{j+p-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} (x^j + y^j) &= \\ &= (x+y)^{n-p} \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{p-2-j} (x^j + y^j) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-p-1-j} (x^{j+p-1} + y^{j+p-1}) \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} A_n(x, y) &= (x+y)^{n-p} A_p(x, y) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-p-1-j} (x^{j+p-1} + y^{j+p-1}) \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où  $n = p + 1$ , alors

$$A_{p+1}(x, y) = (x+y) A_p(x, y) + \sum_{j=0}^0 (x+y)^{-j} (x^{j+p-1} + y^{j+p-1})$$

soit encore

$$A_{p+1}(x, y) = (x+y) A_p(x, y) + (x^{p-1} + y^{p-1})$$

mais

$$x^{p-1} + y^{p-1} = (x+y)^{p-1} - xy A_{p-1}(x, y)$$

et donc

$$A_{p+1}(x, y) = (x+y) A_p(x, y) + (x+y)^{p-1} - xy A_{p-1}(x, y) \quad (1.5)$$

Concentrons nous maintenant plus particulièrement sur  $A_n(x, y)$  et développons cette quantité à partir de la formule 1.4 en page 2. Il vient

$$\begin{aligned}
A_n(x, y) &= 3(x+y)^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-4} (x+y)^{n-4-j} (x^{j+2} + y^{j+2}) \\
&= 3(x+y)^{n-2} + (x^2+y^2)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j} (x^{j+3} + y^{j+3}) \\
&= 3(x+y)^{n-2} + (x+y)^{n-2} - 2xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j} (x^{j+3} + y^{j+3}) \\
&= 4(x+y)^{n-2} - 2xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j} (x^{j+3} + y^{j+3})
\end{aligned}$$

En poursuivant les calculs de cette manière, nous obtenons

$$\begin{aligned}
A_n(x, y) &= 5(x+y)^{n-2} \\
&\quad - 5xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-6} (x+y)^{n-6-j} (x^{j+4} + y^{j+4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x, y) &= 6(x+y)^{n-2} - 9xy(x+y)^{n-4} + 2x^2y^2(x+y)^{n-6} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-7} (x+y)^{n-7-j} (x^{j+5} + y^{j+5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x, y) &= 7(x+y)^{n-2} - 14xy(x+y)^{n-4} + 7x^2y^2(x+y)^{n-6} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-8} (x+y)^{n-8-j} (x^{j+6} + y^{j+6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x, y) &= 8(x+y)^{n-2} - 20xy(x+y)^{n-4} + 16x^2y^2(x+y)^{n-6} - 2x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-9} (x+y)^{n-9-j} (x^{j+7} + y^{j+7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x, y) &= 9(x+y)^{n-2} - 27xy(x+y)^{n-4} + 30x^2y^2(x+y)^{n-6} - 9x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-10} (x+y)^{n-10-j} (x^{j+8} + y^{j+8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x, y) &= 10(x+y)^{n-2} - 35xy(x+y)^{n-4} + 50x^2y^2(x+y)^{n-6} - 25x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
&\quad + 2x^4y^4(x+y)^{n-10} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-11} (x+y)^{n-11-j} (x^{j+9} + y^{j+9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x, y) = & 11(x+y)^{n-2} - 44xy(x+y)^{n-4} + 77x^2y^2(x+y)^{n-6} - 55x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
& + 11x^4y^4(x+y)^{n-10} \\
& + \sum_{j=0}^{n-12} (x+y)^{n-12-j} (x^{j+10} + y^{j+10})
\end{aligned}$$

Il est bien sur possible de pousser ces calculs aussi loin que nous le désirons. En donnant à  $n$  les valeurs 3, 4, 5, 6, ..., nous en déduisons les nouveaux développements respectifs de  $A_3(x, y)$ ,  $A_4(x, y)$ ,  $A_5(x, y)$ ,  $A_6(x, y)$ , etc...

Supposons à présent les formules suivantes respectivement vraies jusqu'aux rangs  $2k$  et  $2k+1$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$

$$A_{2k}(x, y) = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)} \quad (1.6)$$

$$A_{2k+1}(x, y) = (x+y) \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)} \quad (1.7)$$

Les coefficients  $D_{2k}^j$  et  $D_{2k+1}^j$  sont, si possible, à expliciter (et le seront en effet par la suite).

Reprenons l'équation 1.5 en page 3 et réécrivons la sous la forme

$$A_{2k+2}(x, y) = (x+y) A_{2k+1}(x, y) + (x+y)^{2k} - xy A_{2k}(x, y)$$

Explicitons maintenant cette relation

$$\begin{aligned}
A_{2k+2}(x, y) = & (x+y)^2 \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)} \\
& + (x+y)^{2k} \\
& - xy \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)} \\
& \iff \\
A_{2k+2}(x, y) = & (x+y)^2 \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)} \\
& + (x+y)^{2k} \\
& + \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^j (-1)^{j+1} (xy)^{j+1} (x+y)^{2(k-1-j)}
\end{aligned}$$

Poursuivons nos calculs. Nous obtenons de façon équivalente

$$\begin{aligned}
A_{2k+2}(x, y) &= \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)} \\
&\quad + (x+y)^{2k} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^j (-1)^{j+1} (xy)^{j+1} (x+y)^{2(k-1-j)} \\
&\quad \iff \\
A_{2k+2}(x, y) &= \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)} \\
&\quad + (x+y)^{2k} \\
&\quad + \sum_{j=1}^k D_{2k}^{j-1} (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)} \\
&\quad \iff \\
A_{2k+2}(x, y) &= \sum_{j=1}^{k-1} \left( D_{2k+1}^j + D_{2k}^{j-1} \right) (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)} \\
&\quad + D_{2k+1}^0 (x+y)^{2k} + (x+y)^{2k} + D_{2k}^{k-1} (xy)^k
\end{aligned}$$

et nous pouvons écrire

$$A_{2k+2}(x, y) = \sum_{j=0}^k D_{2k+2}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)}$$

avec

$$\begin{aligned}
D_{2k+2}^0 &= D_{2k+1}^0 + 1 \\
D_{2k+2}^k &= D_{2k}^{k-1}
\end{aligned}$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N}) (1 \leq j \leq k-1) \left( D_{2k+2}^j = D_{2k+1}^j + D_{2k}^{j-1} \right)$$

De la même manière, nous avons

$$A_{2k+3}(x, y) = (x+y) A_{2k+2}(x, y) + (x+y)^{2k} - xy A_{2k+1}(x, y)$$

Explicitons

$$\begin{aligned}
A_{2k+3}(x, y) &= (x+y) \sum_{j=0}^k D_{2k+2}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)} \\
&\quad + (x+y)^{2k+1} \\
&\quad - xy (x+y) \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
A_{2k+3}(x, y) &= \sum_{j=0}^k D_{2k+2}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)+1} \\
&\quad + (x+y)^{2k+1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^{j+1} (xy)^{j+1} (x+y)^{2(k-1-j)+1}
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned}
A_{2k+3}(x, y) &= (x+y)^{2k+1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^k D_{2k+2}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)+1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} D_{2k+1}^{j-1} (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)+1}
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
A_{2k+3}(x, y) &= (D_{2k+2}^0 + 1) (x+y)^{2k+1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^k (D_{2k+2}^j + D_{2k+1}^{j-1}) (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)+1}
\end{aligned}$$

et nous pouvons enfin écrire

$$A_{2k+3}(x, y) = (x+y) \sum_{j=0}^k D_{2k+2}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-j)}$$

avec

$$D_{2k+2}^0 = D_{2k+1}^0 + 1$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N}) (1 \leq j \leq k) \left( D_{2k+3}^j = D_{2k+2}^j + D_{2k+1}^{j-1} \right)$$

Ceci termine notre raisonnement par récurrence et nous pouvons écrire en guise de conclusion

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) \left( A_{2k} = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)} \right) \quad (1.8)$$

avec

$$D_{2k}^0 = D_{2k-1}^0 + 1 \iff D_{2k}^0 = 2k \quad (1.9)$$

et

$$D_{2k}^{k-1} = D_{2k-2}^{k-2} = \dots = D_4^1 = 2 \quad (1.10)$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N}) (1 \leq j \leq k-1) \left( D_{2k}^j = D_{2k-1}^j + D_{2k-2}^{j-1} \right) \quad (1.11)$$

et de même

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) \left( A_{2k+1} = (x+y) \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)} \right) \quad (1.12)$$

avec

$$D_{2k+1}^0 = D_{2k}^0 + 1 \iff D_{2k}^0 = 2k + 1 \quad (1.13)$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N}) (1 \leq j \leq k) \left( D_{2k+1}^j = D_{2k}^j + D_{2k-1}^{j-1} \right) \quad (1.14)$$

## 1.4 Valeurs prises par les coefficients $D_h^j$ où $(h \in \mathbb{N})$ et $(h \geq 3)$

Nous avons, ainsi que nous venons de l'établir

$$(\forall h \in \mathbb{N}) (h \geq 3) (D_h^0 = h)$$

Prenons à présent  $j = 1$ . Nous avons

$$D_h^1 = D_{h-1}^1 + D_{h-2}^0$$

Nous pouvons donc écrire

$$\left. \begin{array}{l} D_h^1 = D_{h-1}^1 + D_{h-2}^0 \\ D_{h-1}^1 = D_{h-2}^1 + D_{h-3}^0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ D_5^1 = D_4^1 + D_3^0 \end{array} \right\} \implies D_h^1 = \sum_{j=0}^{h-5} D_{h-2-j}^0 + D_4^1$$

or

$$D_{h-2-j}^0 = h - 2 - j$$

et, d'après la relation 1.10 établie en page 7

$$D_4^1 = 2$$

d'où il vient

$$D_h^1 = \sum_{j=0}^{h-5} (h - 2 - j) + 2 = ((h-2) + (h-3) + (h-4) + \dots + 3) + 2$$

et donc

$$2D_h^1 = h(h+3)$$

et finalement

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*) (h \geq 3) \left( D_h^1 = \frac{h(h+3)}{2} \right) \quad (1.15)$$

Clairement

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*) (h \geq 3) (D_h^1 \in \mathbb{N})$$

Par des calculs analogues, nous trouvons pour tout entier naturel  $h \geq 3$

$$D_h^2 = \frac{h(h-4)(h-5)}{6} \quad (1.16)$$

$$D_h^3 = \frac{h(h-5)(h-6)(h-7)}{24} \quad (1.17)$$

Là également

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*) (h \geq 3) (D_h^2 \in \mathbb{N})$$

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*) (h \geq 3) (D_h^3 \in \mathbb{N})$$

Nous remarquons alors que les relations 1.11 et 1.14 établies en page 8 ainsi que celles (voir relations 1.15, 1.16 et 1.17) établies en pages 8 et 9 nous permettent d'affirmer

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*) (h \geq 3) \left( \forall j \in \left\{ 0, 1, \dots, \frac{h-4}{2} \right\} \right) (D_h^j \in \mathbb{N})$$

Supposons maintenant,  $h$  étant choisi pair et pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, \frac{h-2}{2}\}$  la formule

$$D_h^j = \frac{h(h-(j+2))!}{(j+1)!(h-2(j+1))!} \quad (1.18)$$

soit vraie jusqu'au rang  $h$ , pour tout entier naturel pair inférieur ou égal à  $h$ .

Supposons aussi vraie pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, \frac{h-4}{2}\}$ , jusqu'au rang  $h-1$ , pour tout entier naturel impair inférieur ou égal à  $h-1$ , la formule

$$D_{h-1}^j = \frac{(h-1)((h-1)-(j+2))!}{(j+1)!((h-1)-2(j+1))!} \quad (1.19)$$

alors

$$D_{h-1}^{j-1} = \frac{(h-1)(h-1-(j+1))!}{j!(h-1-2j)!} = \frac{(h-1)(h-(j+2))!}{j!(h-1-2j)!}$$

La relation 1.11 établie en page 8 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
D_{h+1}^j &= \frac{h(h-(j+2))!}{(j+1)!(h-2(j+1))!} + \frac{(h-1)(h-(j+2))!}{j!(h-1-2j)!} \\
&\iff \\
D_{h+1}^j &= \frac{(h-(j+2))!}{j!} \left( \frac{h}{(j+1)(h-2(j+1))!} + \frac{(h-1)}{(h-1-2j)!} \right) \\
&\iff \\
D_{h+1}^j &= \frac{(h-(j+2))!}{j!} \left( \frac{h(h-1-2j) + (h-1)(j+1)}{(h-1-2j)!(j+1)} \right) \\
&\iff \\
D_{h+1}^j &= \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!(h-1-2j)!} (h(h-1) - 2jh + (h-1)j + (h-1)) \\
&\iff \\
D_{h+1}^j &= \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!(h-1-2j)!} (h^2 - 1 - (h+1)j)
\end{aligned}$$

et enfin

$$D_{h+1}^j = \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!(h-1-2j)!} (h+1)(h-1-j)$$

Nous pouvons donc écrire

$$D_{h+1}^j = \frac{(h+1)(h-(j+1))!}{(j+1)!(h+1-2(j+1))!} \quad (1.20)$$

Nous mènerions les calculs de la même manière en supposant  $h$  impair.

Nous vérifions que

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*) (h \geq 3) (D_h^0 = h)$$

et, en notant  $2\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels pairs

$$(\forall h = 2k \in 2\mathbb{N}^*) (h \geq 4) (D_{2k}^{k-1} = 2)$$

Nous avons donc établi au terme de ce raisonnement par récurrence

$$\begin{aligned}
&(\forall k \in \mathbb{N}^*) (\forall j \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}) \\
&\left( D_{2k+1}^j = \frac{(2k+1)(2k-(j+1))!}{(j+1)!(2k+1-2(j+1))!} \right) \\
&\left( D_{2(k+1)}^j = \frac{2(k+1)(2(k+1)-1-(j+1))!}{(j+1)!(2(k+1)-2(j+1))!} \right) \quad (1.21)
\end{aligned}$$

Remarquons que pour tout entier naturel  $h$

$$h - 2(j+1) + (j+1) = h - (j+1)$$

Nous pouvons donc écrire

$$D_h^j = \frac{h(h-(j+1))!}{(h-(j+1))(j+1)!(h-2(j+1))!}$$

et aussi

$$D_h^j = \frac{h}{h-(j+1)} C_{h-(j+1)}^{j+1}$$

## 1.5 Etude sur les coefficients $D_h^j$

Pour les entiers naturels  $h = 2k + 1$  impairs qui suivent, nous vérifions par le calcul les relations

$$k = 1 \iff h = 2k + 1 = 3 \\ D_3^0 = 3C_0^0$$

$$k = 2 \iff h = 2k + 1 = 5 \\ D_5^0 = 5C_1^0 \\ D_5^1 = 5C_1^1$$

$$k = 3 \iff h = 2k + 1 = 7 \\ D_7^0 = 7C_2^0 \\ D_7^1 = 7C_2^1 \\ D_7^2 = 7C_2^2$$

$$k = 4 \iff h = 2k + 1 = 9 \\ D_9^0 = 9C_3^0 \\ D_9^1 = 9C_3^1 \\ D_9^2 = 9C_3^2 + 3C_0^0 \\ D_9^3 = 9C_3^3$$

$$k = 5 \iff h = 2k + 1 = 11 \\ D_{11}^0 = 11C_4^0 \\ D_{11}^1 = 11C_4^1 \\ D_{11}^2 = 11(C_4^2 + C_1^0) \\ D_{11}^3 = 11(C_4^3 + C_1^1) \\ D_{11}^4 = 11C_4^4$$

$$k = 6 \iff h = 2k + 1 = 13 \\ D_{13}^0 = 13C_5^0 \\ D_{13}^1 = 13C_5^1 \\ D_{13}^2 = 13(C_5^2 + 2C_2^0) \\ D_{13}^3 = 13(C_5^3 + 2C_2^1) \\ D_{13}^4 = 13(C_5^4 + 2C_2^2) \\ D_{13}^5 = 13C_5^5$$

$$k = 7 \iff h = 2k + 1 = 15$$

$$D_{15}^0 = 15C_6^0$$

$$D_{15}^1 = 15C_6^1$$

$$D_{15}^2 = 15(C_6^2 + 3C_3^0)$$

$$D_{15}^3 = 15(C_6^3 + 3C_3^1)$$

$$D_{15}^4 = 15(C_6^4 + 3C_3^2 + 3C_0^0)$$

$$D_{15}^5 = 15(C_6^5 + 3C_3^3)$$

$$D_{15}^6 = 15C_6^6$$

$$k = 8 \iff h = 2k + 1 = 17$$

$$D_{17}^0 = 17C_7^0$$

$$D_{17}^1 = 17C_7^1$$

$$D_{17}^2 = 17(C_7^2 + 5C_4^0)$$

$$D_{17}^3 = 17(C_7^3 + 5C_4^1)$$

$$D_{17}^4 = 17(C_7^4 + 5C_4^2 + C_0^0)$$

$$D_{17}^5 = 17(C_7^5 + 5C_4^3 + C_1^1)$$

$$D_{17}^6 = 17(C_7^6 + 5C_4^4)$$

$$D_{17}^7 = 17C_7^7$$

$$k = 9 \iff h = 2k + 1 = 19$$

$$D_{19}^0 = 19C_8^0$$

$$D_{19}^1 = 19C_8^1$$

$$D_{19}^2 = 19(C_8^2 + 7C_5^0)$$

$$D_{19}^3 = 19(C_8^3 + 7C_5^1)$$

$$D_{19}^4 = 19(C_8^4 + 7C_5^2 + 3C_2^0)$$

$$D_{19}^5 = 19(C_8^5 + 7C_5^3 + 3C_2^1)$$

$$D_{19}^6 = 19(C_8^6 + 7C_5^4 + 2C_2^2)$$

$$D_{19}^7 = 19(C_8^7 + 7C_5^5)$$

$$D_{19}^8 = 19C_8^8$$

$$k = 10 \iff h = 2k + 1 = 21$$

$$D_{21}^0 = 21C_9^0$$

$$D_{21}^1 = 21C_9^1$$

$$D_{21}^2 = 21(C_9^2 + 19C_6^0)$$

$$D_{21}^3 = 21(C_9^3 + 19C_6^1)$$

$$D_{21}^4 = 21(C_9^4 + 19C_6^2 + 14C_3^0)$$

$$D_{21}^5 = 21(C_9^5 + 19C_6^3 + 14C_3^1)$$

$$D_{21}^6 = 21(C_9^6 + 19C_6^4 + 14C_3^2 + 3C_0^0)$$

$$D_{21}^7 = 21(C_9^7 + 19C_6^5 + 14C_3^3)$$

$$D_{21}^8 = 21(C_9^7 + 19C_6^6)$$

$$D_{21}^9 = 21C_9^9$$

Nous sommes amenés à supposer que pour tout entier naturel impair  $2k + 1$ , supérieur ou égal à 3, chaque coefficient  $D_{2k+1}^j$  peut s'exprimer comme suit

$$D_{2k+1}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} \quad (1.22)$$

avec

$$0 \leq k - 1 - 3l \leq k - 1 \quad (1.23)$$

et nous poserons par convention

$$(\forall j) (j - 2l < 0) \left( C_{k-1-3l}^{j-2l} = 0 \right) \quad (1.24)$$

Pour démontrer la validité de cette formule pour tout entier naturel  $k$  non nul, nous allons chercher à expliciter, dans la mesure du possible, les coefficients  $F_{2k+1}^l$  en fonction de  $k$  et de  $l$ .

Pour un entier naturel  $k$  quelconque, nous vérifions les relations

$$D_{2k+1}^0 = (2k + 1) C_{k-1}^0$$

$$D_{2k+1}^1 = (2k + 1) C_{k-1}^1$$

Nous pouvons toujours écrire avec  $k \geq 4$

$$D_{2k+1}^2 = (2k + 1) C_{k-1}^2 + (D_{2k+1}^2 - (2k + 1) C_{k-1}^2) C_{k-4}^0$$

Mais, en accord avec les relations 1.3 et 1.21 établies en pages 2 et 10

$$D_{2k+1}^2 - (2k + 1) C_{k-1}^2 = (2k + 1) \left( \frac{(2k - 3)!}{3! (2k + 1 - 6)!} - \frac{(k - 1)!}{2! (k - 3)!} \right)$$

et de la même manière

$$D_{2k+1}^2 - (2k + 1) C_{k-1}^2 = (2k + 1) \left( \frac{(2k - 3)!}{3! (2k - 5)!} - \frac{(k - 1)!}{2! (k - 3)!} \right)$$

et

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)C_{k-1}^2 = (2k+1) \left( \frac{(2k-3)(2k-4)}{3!} - \frac{(k-1)(k-2)}{2!} \right)$$

et

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)C_{k-1}^2 = (2k+1) \left( \frac{(2k-3)(k-2)}{3} - \frac{(k-1)(k-2)}{2} \right)$$

soit encore

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)C_{k-1}^2 = (2k+1) \left( \frac{2(2k-3)(k-2) - 3(k-1)(k-2)}{6} \right)$$

et enfin

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)C_{k-1}^2 = \frac{(2k+1)(k-2)(k-3)}{6}$$

Nous posons

$$F_{2k+1}^1 = D_{2k+1}^2 - (2k+1)C_{k-1}^2 = \frac{(2k+1)(k-2)(k-3)}{3!}$$

De la même façon, nous trouverions

$$D_{2k+1}^3 = (2k+1)(C_{k-1}^3 + F_{2k+1}^1 C_{k-4}^1)$$

et

$$D_{2k+1}^4 = (2k+1)(C_{k-1}^4 + F_{2k+1}^1 C_{k-4}^2 + F_{2k+1}^2 C_{k-7}^0)$$

ce qui nous donne

$$F_{2k+1}^2 = ((D_{2k+1}^4 - (2k+1)C_{k-1}^4) - (D_{2k+1}^2 - (2k+1)C_{k-1}^2)C_{k-4}^2)$$

Par des calculs similaires aux précédents, les coefficients  $D_{2k+1}^j$  et  $C_{k-j}^l$  étant explicités, nous trouvons

$$F_{2k+1}^2 = \frac{(2k+1)(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)}{5!}$$

Nous sommes alors amenés à supposer vraie, pour tout entier naturel  $k \geq 1$ , l'égalité

$$F_{2k+1}^l = \frac{(2k+1)(k-1-l)!}{(2l+1)!(k-1-3l)!} \quad (1.25)$$

avec l'entier naturel  $l$  tel que

$$0 \leq l \leq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$$

Nous effectuons maintenant la différence des coefficients  $F_{2k+1}^l$  et  $F_{2k-1}^l$

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(2k+1)(k-1-l)!}{(2l+1)!(k-1-3l)!} - \frac{(2k-1)(k-2-l)!}{(2l+1)!(k-2-3l)!}$$

Il vient

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!(k-2-3l)!} \left( \frac{(2k+1)(k-1-l) - (2k-1)(k-1-3l)}{(k-1-3l)} \right)$$

et

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!(k-1-3l)!} ((2k+1)(k-1-l) - (2k-1)(k-1-3l))$$

soit encore

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!(k-1-3l)!} (2(2l+1)(k-1))$$

et finalement

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{2(k-1)(k-2-l)!}{(2l)!(k-1-3l)!} \quad (1.26)$$

Notre hypothèse 1.22 émise en page 13 nous conduit maintenant à montrer par récurrence l'existence de la relation

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) (k \geq 1) (\forall j \in \mathbb{N}) (0 \leq j \leq k-1) \left( D_{2k+1}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} \right)$$

où chaque coefficient  $F_{2k+1}^l$  s'exprime par la formule 1.25 établie en page 14.

Supposons vraie jusqu'au rang  $2k-1$ , pour tout entier naturel  $j \leq k-2$ , la relation

$$D_{2k-1}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} \quad (1.27)$$

avec

$$F_{2k-1}^l = \frac{(2k-1)(k-2-l)!}{(2l+1)!(k-2-3l)!}$$

Nous effectuons à présent

$$D_{2k-1}^j - D_{2k-3}^{j-1} = D_{2k-2}^j$$

soit encore

$$D_{2k-2}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} - \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor} F_{2k-3}^l C_{k-3-3l}^{j-2l-1} \quad (1.28)$$

Deux cas se présentent alors.

### 1.5.1 Cas 1 : $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor = m$

Nous avons

$$\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = m \iff k-1 = 3m + \rho > 3m$$

Les seules valeurs que  $\rho$  peut prendre a priori sont 0, 1 et 2.

#### 1.5.1.1 $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \rho = 0 &\implies k-1 = 3m \\ &\iff k-2 = 3m-1 < 3m \end{aligned}$$

**1.5.1.2**  $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\rho = 1 &\implies k - 1 = 3m + 1 \\ &\iff k - 2 = 3m\end{aligned}$$

**1.5.1.3**  $\rho = 2$

$$\begin{aligned}\rho = 2 &\implies k - 1 = 3m + 2 \\ &\implies k - 2 = 3m + 1\end{aligned}$$

Clairement,  $\rho$  ne peut pas être égal à 0. Nous remarquons également que dans ce Cas 1

$$2k + 1 \not\equiv 0 \pmod{3} \quad (3) \quad (1.29)$$

Rappelons que

$$\left( C_{k-2-3l}^{j-2l} = C_{k-3-3l}^{j-2l-1} + C_{k-3-3l}^{j-2l} \right) \iff \left( C_{k-3-3l}^{j-2l-1} = C_{k-2-3l}^{j-2l} - C_{k-3-3l}^{j-2l} \right) \quad (1.30)$$

Nous avons alors (voir la relation 1.28 établie en page 15)

$$D_{2k-2}^j = \sum_{l=0}^m \left( F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} - F_{2k-3}^l C_{k-3-3l}^{j-2l-1} \right) \quad (1.31)$$

ce qui équivaut à

$$D_{2k-2}^j = \sum_{l=0}^m \left( F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} - F_{2k-3}^l \left( C_{k-2-3l}^{j-2l} - C_{k-3-2l}^{j-2l} \right) \right)$$

et

$$D_{2k-2}^j = \sum_{l=0}^m \left( (F_{2k-1}^l - F_{2k-3}^l) C_{k-2-3l}^{j-2l} + F_{2k-3}^l C_{k-3-2l}^{j-2l} \right)$$

avec  $m = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$ . En particulier, parmi les entiers naturels  $2k + 1$ , où  $k$  satisfait cette propriété, nous trouvons tous les entiers premiers strictement supérieurs à 3.

**1.5.2 Cas 2 :**  $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor + 1 = m$

Nous avons

$$\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = m \iff k - 1 = 3m + \rho$$

Comme précédemment,

**1.5.2.1**  $\rho = 0$

$$\begin{aligned}\rho = 0 &\implies k - 1 = 3m \\ &\iff k - 2 = 3m - 1\end{aligned}$$

**1.5.2.2**  $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\rho = 1 &\implies k - 1 = 3m + 1 \\ &\iff k - 2 = 3m\end{aligned}$$

**1.5.2.3**  $\rho = 2$

$$\begin{aligned}\rho = 2 &\implies k - 1 = 3m + 2 \\ &\iff k - 2 = 3m + 1\end{aligned}$$

Et dans ce cas,  $\rho$  ne peut qu'être égal à 0. Nous remarquons également

$$\begin{aligned}2k + 1 \equiv 0 &\iff k \equiv 1 \quad (3) \\ &\iff k - 1 \equiv 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Nous avons alors (voir la relation 1.28 établie en page 15)

$$\begin{aligned}D_{2k-2}^j &= \sum_{l=0}^m F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} - \sum_{l=0}^{m-1} F_{2k-3}^l C_{k-3-3l}^{j-2l-1} \\ &= F_{2k-1}^m C_{k-2-3(m+1)}^{j-2(m+1)} + \sum_{l=0}^{m-1} F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} - \sum_{l=0}^{m-1} F_{2k-3}^l C_{k-3-3l}^{j-2l-1} \\ &= F_{2k-1}^m C_{k-2-3(m+1)}^{j-2(m+1)} + \sum_{l=0}^{m-1} \left( (F_{2k-1}^l - F_{2k-3}^l) C_{k-2-3l}^{j-2l} + F_{2k-3}^l C_{k-3-3l}^{j-2l} \right)\end{aligned}$$

avec  $m = \lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor$  et  $m - 1 = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor$ .

Revenons au Cas 1 et reprenons notre hypothèse 1.27 émise en page 15

$$\sum_{l=0}^m F_{2k-3}^l C_{k-3-3l}^{j-2l} = D_{2k-3}^j$$

alors, en accord avec la relation 1.31 posée en page 16

$$D_{2k-2}^j - D_{2k-3}^j = D_{2k-4}^{j-1}$$

et finalement nous obtenons l'égalité

$$D_{2k-4}^{j-1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor} F_{2k-4}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} \quad (1.32)$$

avec, en accord avec la relation 1.26 établie en page 15

$$F_{2k-4}^l = F_{2k-1}^l - F_{2k-3}^l$$

Il nous reste à établir la validité de l'égalité 1.32 en page 17 lorsque  $k \geq 4$  décrit  $\mathbb{N}$ . Nous nous assurons d'abord par un calcul simple qu'elle est en effet vérifiée lorsque  $k$  prend successivement les valeurs 4, 5 et  $6 \dots$ , alors que  $j$  décrit son intervalle de définition.

Nous supposons alors que cette égalité est vérifiée jusqu'au rang  $2k$ , pour tout  $j \leq (k-1)$ , soit

$$D_{2k}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^l C_{k-3l}^{j+1-2l}$$

Nous pouvons remarquer que les calculs faits pour aboutir à la formule donnant  $D_{h=2k}^j$  en fonction des coefficients  $F_{2k}^l$  et des coefficients du binôme  $C_{k-3l}^{j+1-2l}$  sont généralisables à une valeur quelconque de  $h$  dans  $\mathbb{N}$ . Il nous suffit d'établir la relation de récurrence sur les coefficients  $D_{h=2k+1}^j$  d'indices  $h$  impairs pour obtenir un résultat valable quelque soit la parité de cet indice  $h$ .

En reprenant l'hypothèse de départ (voir notre hypothèse 1.27 émise en page 15), portant sur les coefficients d'indices impairs, et en utilisant ce que nous venons d'établir, nous vérifions

$$D_{2k+1}^j = D_{2k}^j + D_{2k-1}^{j-1}$$

avec

$$D_{2k}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^l C_{k-3l}^{j+1-2l}$$

et

$$D_{2k-1}^{j-1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l}$$

D'après les calculs que nous venons d'effectuer pages 16 et 17, nous avons

$$\begin{aligned} D_{2k}^j &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k-2}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} + F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} \\ &\iff D_{2k}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} (F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l) C_{k-1-3l}^{j-2l} + F_{2k-1}^l C_{k-2-3l}^{j-2l} \\ &\iff D_{2k}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} - \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k-1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l-1} \\ &\iff D_{2k}^j = D_{2k+1}^j - D_{2k-1}^{j-1} \end{aligned}$$

Ce résultat est bien en accord avec l'égalité 1.14 établie en page 8.

Connaissant  $F_{2k-2}^l$  et  $F_{2k-1}^l$ , exprimés en fonction de  $l$  et de  $k$ , nous pouvons calculer  $F_{2k+1}^l$ , en allant en sens inverse du calcul nous ayant donné  $F_{2k-2}^l$  puis  $F_{2k-4}^l$ . Nous trouvons donc

$$D_{2k+1}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l}$$

avec

$$F_{2k+1}^l = \frac{(2k+1)(k-1-l)!}{(2l+1)!(k-1-3l)!}$$

La relation de récurrence est donc établie pour tous les coefficients  $D_h^j$  d'indice  $h$  pair ou impair.

Récapitulons maintenant l'ensemble des résultats obtenus au cours des pages précédentes (voir les équations 1.8 et 1.12 en pages 7 et 8)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq 3) \left( (x^n + y^n) = x^n + y^n + xy \sum_{j=1}^{n-2} A_n(x, y) \right)$$

avec pour  $n = 2k$  (voir l'équation 1.8 en page 7)

$$A_{2k}(x, y) = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)}$$

et

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) (k > 1) (\forall j \in \mathbb{N}) (j \leq k-1) \left( D_{2k}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^l C_{k-3l}^{j+1-2l} \right)$$

et

$$F_{2k}^l = \frac{2k(k-1-l)!}{(2l)!(k-3l)!}$$

et pour  $n = 2k+1$  (voir l'équation 1.12 en page 8)

$$A_{2k+1}(x, y) = (x+y) \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)}$$

et

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) (\forall j \in \mathbb{N}) (j \leq k-1) \left( D_{2k+1}^j = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} \right)$$

et

$$F_{2k+1}^l = \frac{(2k+1)(k-1-l)!}{(2l+1)!(k-1-3l)!}$$

## 1.6 Etude de $A_{2k+1}(x, y)$ où $k \in \mathbb{N}^*$

Nous allons voir dans ce paragraphe qu'il est possible de poursuivre la factorisation de la quantité  $A_{2k+1}(x, y)$ . En utilisant les derniers résultats, nous pouvons écrire

$$A_{2k+1}(x, y) = (x+y) \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)}$$

Nous avons alors, pour chaque  $k$ , et pour tout  $j$  et tout  $l$

$$\begin{aligned} & F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)} \\ &= F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^{j-2l+2l} (xy)^{j-2l+2l} (x+y)^{2(k-1-3l+3l-(j-2l)-2l)} \\ &= \left( F_{2k+1}^l C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^{j-2l} (xy)^{j-2l} (x+y)^{2(k-1-3l-(j-2l))} \right) (-1)^{2l} (xy)^{2l} (x+y)^{2l} \end{aligned}$$

$A_{2k+1}(x, y)$  peut donc s'écrire de la façon suivante

$$\begin{aligned} A_{2k+1}(x, y) &= (x+y) \\ &\quad \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l (-1)^{2l} (x+y)^{2l} \\ &\quad \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1-3l}^{j-2l} (-1)^{j-2l} (xy)^{j-2l} (x+y)^{2(k-1-3l-(j-2l))} \end{aligned}$$

Si  $j$  varie de 0 à  $k-1$ , alors  $j-2l$  varie de 0 à  $k-1-2l$ , et comme nécessairement

$$j-2l \leq k-1-3l$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & A_{2k+1}(x, y) \\ &= (x+y) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l (-1)^{2l} (x+y)^{2l} \sum_{j=0}^{k-1-3l} C_{k-1-3l}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-3l-j)} \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1-3l} C_{k-1-3l}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-3l-j)} \\ &= \left( (x+y)^2 - xy \right)^{k-1-3l} \\ &= (x^2 + xy + y^2)^{k-1-3l} \end{aligned}$$

et finalement

$$A_{2k+1}(x, y) = (x+y) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l (-1)^{2l} (x+y)^{2l} (x^2 + xy + y^2)^{k-1-3l}$$

Si de plus, nous supposons que  $2k+1$  est un entier naturel impair strictement supérieur à 3 et non multiple de 3, alors (voir l'égalité 1.29 en page 16)

$$k-1 \not\equiv 0 \pmod{3} \quad (3)$$

et donc  $k-1-3l$  ne s'annule pour aucune valeur de  $l$ . Par conséquent  $A_{2k+1}(x, y)$  est toujours divisible par  $x^2 + xy + y^2$  et nous pouvons écrire pour tout entier

naturel  $n = 2k + 1 > 3$

$$A_{2k+1}(x, y) = (x + y)(x^2 + xy + y^2) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l (-1)^{2l} (x + y)^{2l} (x^2 + xy + y^2)^{k-2-3l} \quad (1.33)$$

## 1.7 Différentes expressions de la formule du binôme

Nous arrivons à la fin de cette étude, dont le but était de reformuler la formule du binôme. Ainsi que présenté (voir l'équation 1.2 en page 2) et établi (voir l'équation 1.1 en page 1), nous avons

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= \sum_{j=0}^n C_n^j x^{n-j} y^j \\ &= x^n + y^n + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j x^{n-j} y^j \\ &= x^n + y^n + xy \sum_{j=0}^{n-2} C_n^{j+1} x^{n-2-j} y^j \\ &= x^n + y^n + xy \sum_{j=0}^{n-2} (x + y)^{n-2-j} (x^j + y^j) \end{aligned}$$

De plus, selon que l'entier naturel  $n$  est pair ou impair, la formule du binôme peut également être explicitée comme suit

$n = 2k$  **pair**

$$(x + y)^{2k} = x^{2k} + y^{2k} + xy \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^j (-1)^j (xy)^j (x + y)^{2(k-1-j)}$$

avec

$$D_{2k}^j = \frac{2k(2k-1-(j+1))!}{(j+1)!(2k-2(j+1))!}$$

ainsi qu'établi plus haut (voir l'équation 1.8 en page 7).

$n = 2k + 1$  **impair**

$$(x + y)^{2k+1} = x^{2k+1} + y^{2k+1} + xy(x + y) \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x + y)^{2(k-1-j)}$$

avec

$$D_{2k+1}^j = \frac{(2k+1)(2k-(j+1))!}{(j+1)!(2k+1-2(j+1))!}$$

ainsi qu'établi plus haut (voir l'équation 1.12 en page 8).

$$n = 2k + 1 > 3 \text{ et } n \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$(x + y)^n = x^n + y^n +$$

$$xy(x + y)(x^2 + xy + y^2) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l (-1)^{2l} (x + y)^{2l} (x^2 + xy + y^2)^{k-2-3l}$$
(1.34)

avec

$$F_{2k+1}^l = \frac{(2k + 1)(k - 1 - l)!}{(2l + 1)!(k - 1 - 3l)!}$$

$$\equiv 0 \quad (n = 2k + 1)$$
(1.35)

ainsi qu'établi plus haut (voir l'équation 1.33 en page 21).

Remarquons que l'ensemble de ces entiers naturels  $n$  contient tous les entiers premiers impairs distincts de 3.

L'exposé de ces résultats termine cette étude. Le chapitre suivant est consacré à l'étude de quelques propriétés supplémentaires des coefficients du binôme.

## Chapitre 2

# Quelques considérations supplémentaires sur les coefficients du binôme

### 2.1 Objet du chapitre

Les coefficients du binôme ont de multiples propriétés et ce chapitre est consacré à en dégager quelques unes.

### 2.2 La formule classique du binôme réarrangée

Considérons la formule du binôme pour un entier exposant quelconque  $m > 2$

$$(1 + 1)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k$$

en rappelant que

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*) (C_m^k = C_m^{m-k}) \quad (2.1)$$

Reformulons la de la manière suivante

$$\begin{aligned} (1 + 1)^m &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} C_m^{3k+0} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} C_m^{3k+1} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} C_m^{3k+2} \\ &= a_{m,0} + a_{m,1} + a_{m,2} \\ &= 2^m \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec

$$a_{m,0} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} C_m^{3k+0} \quad (2.3)$$

$$a_{m,1} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} C_m^{3k+1} \quad (2.4)$$

$$a_{m,2} = \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor} C_m^{3k+2} \quad (2.5)$$

$a_{m,0}$ ,  $a_{m,1}$  et  $a_{m,2}$  sont les éléments de trois suites distinctes indexées par  $\mathbb{N}$ . Intéressons nous aux valeurs prises par chacun des éléments de ces trois suites. Nous devons considérer les valeurs prise par  $m$  dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

## 2.3 Les suites $a_{m,k}$

### 2.3.1 $m \equiv 0 \iff m - 1 \equiv 2 \pmod{3}$

Alors

$$\begin{aligned} (1+1)^m &= C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3k} + \dots + C_m^m \\ &\quad + C_m^1 + C_m^4 + \dots + C_m^{3K+1} + \dots + C_m^{m-2} \\ &\quad + C_m^2 + C_m^5 + \dots + C_m^{3K+2} + \dots + C_m^{m-1} \end{aligned}$$

avec

$$a_{m,0} = C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3k} + \dots + C_m^m \quad (2.6)$$

$$a_{m,1} = C_m^1 + C_m^4 + \dots + C_m^{3K+1} + \dots + C_m^{m-2} \quad (2.7)$$

$$a_{m,2} = C_m^2 + C_m^5 + \dots + C_m^{3K+2} + \dots + C_m^{m-1} \quad (2.8)$$

#### 2.3.1.1 La suite $a_{m,0}$

$$\begin{aligned} a_{m,0} &= C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3K} + \dots + C_m^{m-3} + C_m^m \\ &= 1 \\ &\quad + (C_{m-1}^2 + C_{m-1}^3) + \dots \\ &\quad + (C_{m-1}^{3K-1} + C_{m-1}^{3K}) + \dots \\ &\quad + (C_{m-1}^{m-1-3} + C_{m-1}^{m-1-2}) \\ &\quad + 1 \\ &= 1 + (C_{m-1}^2 + \dots + C_{m-1}^{3K-1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-3}) \\ &\quad + (C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}) + 1 \\ &= (C_{m-1}^2 + \dots + C_{m-1}^{3K-1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-3} + C_{m-1}^{m-1}) \\ &\quad + (C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}) \end{aligned}$$

Dans le cas où  $m - 1 \equiv 2 \pmod{3}$  (voir les relations 2.17 et 2.19 en page 28)

$$a_{m-1,0} = C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}$$

$$a_{m-1,2} = C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \dots + C_{m-1}^{3K+2} + \dots + C_{m-1}^{m-1}$$

et par conséquent

$$a_{m,0} = a_{m-1,2} + a_{m-1,0} \quad (2.9)$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans la relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,2} = a_{m-1,0}$$

### 2.3.1.2 La suite $a_{m,1}$

$$\begin{aligned}
a_{m,1} &= C_m^1 + C_m^4 + \dots + C_m^{3K+1} + \dots + C_m^{m-2} \\
&= (C_{m-1}^0 + C_{m-1}^1) \\
&+ (C_{m-1}^3 + C_{m-1}^4) \\
&+ \dots \\
&+ (C_{m-1}^{3K} + C_{m-1}^{3K+1}) \\
&+ \dots \\
&+ (C_{m-1}^{m-1-2} + C_{m-1}^{m-1-1}) \\
&= (C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}) \\
&+ (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \dots + C_{m-1}^{3K+1} + \dots + \dots + C_{m-1}^{m-1-1})
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $m-1 \equiv 2 \pmod{3}$  (voir 2.17 et 2.18 en page 28)

$$\begin{aligned}
a_{m-1,0} &= C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2} \\
a_{m-1,1} &= C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \dots + C_{m-1}^{3K+1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$a_{m,1} = a_{m-1,0} + a_{m-1,1} \quad (2.10)$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans la relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,0} = a_{m-1,1}$$

### 2.3.1.3 La suite $a_{m,2}$

$$\begin{aligned}
a_{m,2} &= C_m^2 + C_m^5 + \dots + C_m^{3K+2} + \dots + C_m^{m-1} \\
&= (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2) \\
&+ (C_{m-1}^4 + C_{m-1}^5) \\
&+ \dots \\
&+ (C_{m-1}^{3K+1} + C_{m-1}^{3K+2}) \\
&+ \dots \\
&+ (C_{m-1}^{m-1-1} + C_{m-1}^{m-1}) \\
&= (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \dots + C_{m-1}^{3K+1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1}) \\
&+ (C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \dots + C_{m-1}^{3K+2} + \dots + C_{m-1}^{m-1})
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $m-1 \equiv 2 \pmod{3}$  (voir les relations 2.18 et 2.19 en page 28)

$$\begin{aligned}
a_{m-1,1} &= C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \dots + C_{m-1}^{3K+1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1} \\
a_{m-1,2} &= C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \dots + C_{m-1}^{3K+2} + \dots + C_{m-1}^{m-1}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$a_{m,2} = a_{m-1,1} + a_{m-1,2}$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,1} = a_{m-1,2}$$

### 2.3.2 $m \equiv 1 \iff m - 1 \equiv 0$ (3)

alors

$$\begin{aligned} (1+1)^m &= C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3k} + \dots + C_m^{m-1} \\ &\quad + C_m^1 + C_m^4 + \dots + C_m^{3K+1} + \dots + C_m^m \\ &\quad + C_m^2 + C_m^5 + \dots + C_m^{3K+2} + \dots + C_m^{m-2} \end{aligned}$$

avec

$$a_{m,0} = C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3k} + \dots + C_m^{m-1} \quad (2.11)$$

$$a_{m,1} = C_m^1 + C_m^4 + \dots + C_m^{3K+1} + \dots + C_m^m \quad (2.12)$$

$$a_{m,2} = C_m^2 + C_m^5 + \dots + C_m^{3K+2} + \dots + C_m^{m-2} \quad (2.13)$$

#### 2.3.2.1 La suite $a_{m,0}$

$$\begin{aligned} a_{m,0} &= C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3K} + \dots + C_m^{m-1} \\ &= 1 \\ &\quad + (C_{m-1}^2 + C_{m-1}^3) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (C_{m-1}^{3K-1} + C_{m-1}^{3K}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (C_{m-1}^{m-1-1} + C_{m-1}^{m-1}) \\ &= (C_{m-1}^2 + \dots + C_{m-1}^{3K-1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1}) \\ &\quad + (1 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1}) \end{aligned}$$

Dans le cas où  $m - 1 \equiv 0$  (3) (voir les relations 2.6 et 2.8 en page 24)

$$a_{m-1,0} = C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1}$$

$$a_{m-1,2} = C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \dots + C_{m-1}^{3K+2} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1}$$

et par conséquent

$$a_{m,0} = a_{m-1,0} + a_{m-1,2} \quad (2.14)$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans la relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,0} = a_{m-1,2}$$

### 2.3.2.2 La suite $a_{m,1}$

$$\begin{aligned}
a_{m,1} &= C_m^1 + C_m^4 + \dots + C_m^{3K+1} + \dots + C_m^{m-3} + C_m^m \\
&= (C_{m-1}^0 + C_{m-1}^1) \\
&+ (C_{m-1}^3 + C_{m-1}^4) \\
&+ \dots \\
&+ (C_{m-1}^{3K} + C_{m-1}^{3K+1}) \\
&+ \dots \\
&+ (C_{m-1}^{m-1-3} + C_{m-1}^{m-1-2}) \\
&+ 1 \\
&= (C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1-3} + 1) \\
&+ (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \dots + C_{m-1}^{3K+1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2})
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $m-1 \equiv 0 \pmod{3}$  (voir les relations 2.6 et 2.7 en page 24)

$$\begin{aligned}
a_{m-1,0} &= C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1} \\
a_{m-1,1} &= C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \dots + C_{m-1}^{3K+1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$a_{m,1} = a_{m-1,0} + a_{m-1,1} \quad (2.15)$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans la relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,0} = a_{m-1,1}$$

### 2.3.2.3 La suite $a_{m,2}$

$$\begin{aligned}
a_{m,2} &= C_m^2 + C_m^5 + \dots + C_m^{3K+2} + \dots + C_m^{m-2} \\
&= (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2) \\
&+ (C_{m-1}^4 + C_{m-1}^5) + \dots \\
&+ (C_{m-1}^{3K+1} + C_{m-1}^{3K+2}) + \dots \\
&+ (C_{m-1}^{m-1-2} + C_{m-1}^{m-1-1}) \\
&= (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \dots + C_{m-1}^{3K+1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}) \\
&+ (C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \dots + C_{m-1}^{3K+2} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1})
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $m-1 \equiv 0 \pmod{3}$  (voir les relations 2.7 et 2.8 en page 24)

$$\begin{aligned}
a_{m-1,1} &= C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \dots + C_{m-1}^{3K+1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2} \\
a_{m-1,2} &= C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \dots + C_{m-1}^{3K+2} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$a_{m,2} = a_{m-1,1} + a_{m-1,2} \quad (2.16)$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans la relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,1} = a_{m-1,2}$$

### 2.3.3 $m \equiv 2 \iff m - 1 \equiv 1 \pmod{3}$

alors

$$\begin{aligned} (1+1)^m &= C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3k} + \dots + C_m^{m-2} \\ &\quad + C_m^1 + C_m^4 + \dots + C_m^{3K+1} + \dots + C_m^{m-1} \\ &\quad + C_m^2 + C_m^5 + \dots + C_m^{3K+2} + \dots + C_m^m \end{aligned}$$

avec

$$a_{m,0} = C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3k} + \dots + C_m^{m-2} \quad (2.17)$$

$$a_{m,1} = C_m^1 + C_m^4 + \dots + C_m^{3K+1} + \dots + C_m^{m-1} \quad (2.18)$$

$$a_{m,2} = C_m^2 + C_m^5 + \dots + C_m^{3K+2} + \dots + C_m^m \quad (2.19)$$

#### 2.3.3.1 La suite $a_{m,0}$

$$\begin{aligned} a_{m,0} &= C_m^0 + C_m^3 + \dots + C_m^{3K} + \dots + C_m^{m-2} \\ &= 1 \\ &\quad + (C_{m-1}^2 + C_{m-1}^3) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (C_{m-1}^{3K-1} + C_{m-1}^{3K}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (C_{m-1}^{m-1-2} + C_{m-1}^{m-1-1}) \\ &= (C_{m-1}^2 + \dots + C_{m-1}^{3K-1} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}) \\ &\quad + (1 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1}) \end{aligned}$$

Dans le cas où  $m - 1 \equiv 1 \pmod{3}$  (voir les relations 2.11 et 2.13 en page 26)

$$a_{m-1,0} = C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \dots + C_{m-1}^{3K} + \dots + C_{m-1}^{m-1-1}$$

$$a_{m-1,2} = C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \dots + C_{m-1}^{3K+2} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}$$

et par conséquent

$$a_{m,0} = a_{m-1,0} + a_{m-1,2} \quad (2.20)$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans la relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,0} = a_{m-1,2}$$

### 2.3.3.2 La suite $a_{m,1}$

$$\begin{aligned}
a_{m,1} &= C_m^1 + C_m^4 + \cdots + C_m^{3K+1} + \cdots + C_m^{m-1-3} + C_m^{m-1} \\
&= (C_{m-1}^0 + C_{m-1}^1) + \cdots \\
&+ (C_{m-1}^3 + C_{m-1}^4) + \cdots \\
&+ (C_{m-1}^{3K} + C_{m-1}^{3K+1}) + \cdots \\
&+ (C_{m-1}^{m-1-4} + C_{m-1}^{m-1-3}) \\
&+ (C_{m-1}^{m-1-1} + C_{m-1}^{m-1}) \\
&= (C_{m-1}^0 + \cdots + C_{m-1}^{3K} + \cdots + C_{m-1}^{m-1-1}) \\
&+ (C_{m-1}^1 + \cdots + C_{m-1}^{3K+1} + \cdots + C_{m-1}^{m-1}) \\
&= (C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \cdots + C_{m-1}^{3K} + \cdots + C_{m-1}^{m-1-4} + C_{m-1}^{m-1-1}) \\
&+ (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \cdots + C_{m-1}^{3K+1} + \cdots + C_{m-1}^{m-1})
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $m-1 \equiv 1 \pmod{3}$  (voir les relations 2.11 et 2.12 en page 26)

$$\begin{aligned}
a_{m-1,0} &= C_{m-1}^0 + C_{m-1}^3 + \cdots + C_{m-1}^{3K} + \cdots + C_{m-1}^{m-1-1} \\
a_{m-1,1} &= C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \cdots + C_{m-1}^{3K+1} + \cdots + C_{m-1}^{m-1}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$a_{m,1} = a_{m-1,0} + a_{m-1,1} \quad (2.21)$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans la relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,0} = a_{m-1,1}$$

### 2.3.3.3 La suite $a_{m,2}$

$$\begin{aligned}
a_{m,2} &= C_m^2 + C_m^5 + \cdots + C_m^{3K+2} + \cdots + C_m^{m-3} + C_m^m \\
&= (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2) \\
&+ (C_{m-1}^4 + C_{m-1}^5) \\
&+ \cdots \\
&+ (C_{m-1}^{3K+1} + C_{m-1}^{3K+2}) \\
&+ \cdots \\
&+ (C_{m-1}^{m-1-3} + C_{m-1}^{m-1-2}) \\
&+ 1 \\
&= (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \cdots + C_{m-1}^{3K+1} + \cdots + C_{m-1}^{m-1-3} + 1) \\
&+ (C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \cdots + C_{m-1}^{3K+2} + \cdots + C_{m-1}^{m-1-2} + 1)
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $m-1 \equiv 1 \pmod{3}$  (voir les relations 2.12 et 2.13 en page 26)

$$a_{m-1,1} = C_{m-1}^1 + C_{m-1}^4 + \cdots + C_{m-1}^{3K+1} + \cdots + C_{m-1}^{m-1}$$

$$a_{m-1,2} = C_{m-1}^2 + C_{m-1}^5 + \dots + C_{m-1}^{3K+2} + \dots + C_{m-1}^{m-1-2}$$

et par conséquent

$$a_{m,2} = a_{m-1,1} + a_{m-1,2} \quad (2.22)$$

avec (en raison de la symétrie des coefficients du binôme exprimée dans la relation 2.1 en page 23)

$$a_{m-1,0} = a_{m-1,2}$$

Les relations 2.9, 2.14 et 2.20 en pages 24 et 28 (elles sont identiques pour chaque  $m$ ), que nous rappelons ici

$$a_{m,0} = a_{m-1,0} + a_{m-1,2}$$

$$a_{m,1} = a_{m-1,1} + a_{m-1,0}$$

$$a_{m,2} = a_{m-1,2} + a_{m-1,1}$$

permettent d'établir

$$a_{m,1} - a_{m,0} = a_{m-1,1} - a_{m-1,2} \quad (2.23)$$

$$a_{m,1} - a_{m,2} = a_{m-1,0} - a_{m-1,2} \quad (2.24)$$

$$a_{m,0} - a_{m,2} = a_{m-1,0} - a_{m-1,1} \quad (2.25)$$

Il est alors facile de vérifier que pour les valeurs suivantes

$$m = 0 \equiv 0 \quad (3)$$

$$a_{0,0} = 1$$

$$a_{0,1} = 0$$

$$a_{0,2} = 0$$

$$m = 1 \equiv 1 \quad (3)$$

$$a_{1,0} = 1 = a_{0,0} + a_{0,2}$$

$$a_{1,1} = 1 = a_{0,1} + a_{0,0}$$

$$a_{1,2} = 0 = a_{0,2} + a_{0,1}$$

$$m = 2 \equiv 2 \quad (3)$$

$$a_{2,0} = 1 = a_{1,0} + a_{1,2}$$

$$a_{2,1} = 2 = a_{1,1} + a_{1,0}$$

$$a_{2,2} = 1 = a_{1,2} + a_{1,1}$$

$$m = 3 \equiv 0 \quad (3)$$

$$a_{3,0} = 2 = a_{2,0} + a_{2,2}$$

$$a_{3,1} = 3 = a_{2,1} + a_{2,0}$$

$$a_{3,2} = 3 = a_{2,2} + a_{2,1}$$

$$m = 4 \equiv 1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_{4,0} &= 5 = a_{3,0} + a_{3,2} \\ a_{4,1} &= 5 = a_{3,1} + a_{3,0} \\ a_{4,2} &= 6 = a_{3,2} + a_{3,1} \end{aligned}$$

et nous pouvons écrire

$$(\forall k_1 \in \{0, 1, 2\}) (\forall k_2 \in \{0, 1, 2\}) (k_1 \neq k_2) (|a_{m,k_1} - a_{m,k_2}| \leq 1) \quad (2.26)$$

Egalement, pour chaque  $k \in \{0, 1, 2\}$ , au moins un des trois  $a_{m,k}$  est distinct des deux autres (voir les relations 2.23, 2.25 et 2.24 en page 30).

## 2.4 Les suites $A_{n,k}$

Considérons à présent la relation

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (1+1)^m = \sum_{m=0}^n 2^m = 2^{n+1} - 1 \quad (2.27)$$

et reprenons l'identité 2.2 en page 23. Nous pouvons former trois nouvelles suites  $A_{n,0}$ ,  $A_{n,1}$  et  $A_{n,2}$

$$A_{n,0} = \sum_{m=0}^n a_{m,0} = A_{n-1,0} + a_{n,0}$$

$$A_{n,1} = \sum_{m=0}^n a_{m,1} = A_{n-1,1} + a_{n,1}$$

$$A_{n,2} = \sum_{m=0}^n a_{m,2} = A_{n-1,2} + a_{n,2}$$

et écrire, en accord avec la relation 2.27 en page 31

$$S_{A_n} = A_{n,0} + A_{n,1} + A_{n,2} = 2^{n+1} - 1$$

$$S_{A_{n-1}} = A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + A_{n-1,2} = 2^n - 1$$

ce qui entraîne, sans surprise

$$S_{A_n} - S_{A_{n-1}} = a_{n,0} + a_{n,1} + a_{n,2} = 2^n$$

Remarquons également que pour tout entier  $k$

$$2^{2k} \equiv 1 \iff 2^{2k} - 1 \equiv 0 \quad (3) \quad (2.28)$$

$$2^{2k+1} \equiv 2 \iff 2^{2k+1} - 1 \equiv 1 \quad (3) \quad (2.29)$$

## 2.5 Les suites $b_{m,k}$

Construisons à partir des suites  $a_{m,k}$ , où  $k \in \{0, 1, 2\}$

$$b_{m,k} = a_{m,k} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \quad (2.30)$$

Chaque terme de chacune de ces suites  $b_{m,k}$  prend sa valeur dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ . De plus, pour  $m$  donné, l'un des trois termes  $b_{m,k}$  est distinct des deux autres et nous pouvons former, a priori, au plus  $2^3 - 2 = 6$  triplets  $(b_{m,0}, b_{m,1}, b_{m,2})$  distincts. Nous avons

$$\begin{aligned} b_{m-1,0} &= a_{m-1,0} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m-1,k} \\ &\iff a_{m-1,0} = b_{m-1,0} + \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m-1,k} \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} b_{m-1,2} &= a_{m-1,2} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m-1,k} \\ &\iff a_{m-1,2} = b_{m-1,2} + \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m-1,k} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} b_{m,0} &= a_{m,0} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \\ &= a_{m-1,0} + a_{m-1,2} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \\ &= b_{m-1,0} + b_{m-1,2} + 2 \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m-1,k} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \end{aligned}$$

Nous obtenons de la même façon

$$\begin{aligned} b_{m,1} &= a_{m,1} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \\ &= a_{m-1,1} + a_{m-1,0} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \\ &= b_{m-1,1} + b_{m-1,0} + 2 \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m-1,k} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{m,2} &= a_{m,2} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \\ &= a_{m-1,2} + a_{m-1,1} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \\ &= b_{m-1,2} + b_{m-1,1} + 2 \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m-1,k} - \min_{\forall k \in \{0,1,2\}} a_{m,k} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$b_{m,1} - b_{m,0} = b_{m-1,1} - b_{m-1,2} \quad (2.31)$$

$$b_{m,1} - b_{m,2} = b_{m-1,0} - b_{m-1,2} \quad (2.32)$$

$$b_{m,0} - b_{m,2} = b_{m-1,0} - b_{m-1,1} \quad (2.33)$$

Etudions les différents cas suivants

$$b_{m,1} = b_{m,0} = 0 \iff b_{m,2} = 1$$

$$0 - 0 = b_{m-1,1} - b_{m-1,2}$$

$$0 - 1 = b_{m-1,0} - b_{m-1,2}$$

$$0 - 1 = b_{m-1,0} - b_{m-1,1}$$

ce qui entraîne

$$(b_{m-1,1} = b_{m-1,2} = 1) \iff (b_{m-1,0} = 0)$$

et

$$(b_{m,1} = b_{m,0}) \iff (b_{m-1,1} = b_{m-1,2}) \quad (2.34)$$

$$b_{m,1} = b_{m,0} = 1 \iff b_{m,2} = 0$$

$$1 - 1 = b_{m-1,1} - b_{m-1,2}$$

$$1 - 0 = b_{m-1,0} - b_{m-1,2}$$

$$1 - 0 = b_{m-1,0} - b_{m-1,1}$$

ce qui entraîne

$$(b_{m-1,1} = b_{m-1,2} = 0) \iff (b_{m-1,0} = 1)$$

et

$$(b_{m,1} = b_{m,0}) \iff (b_{m-1,1} = b_{m-1,2}) \quad (2.35)$$

$$b_{m,1} = b_{m,2} = 0 \iff b_{m,0} = 1$$

$$0 - 1 = b_{m-1,1} - b_{m-1,2}$$

$$0 - 0 = b_{m-1,0} - b_{m-1,2}$$

$$1 - 0 = b_{m-1,0} - b_{m-1,1}$$

ce qui entraîne

$$(b_{m-1,2} = b_{m-1,0} = 1) \iff (b_{m-1,1} = 0)$$

et

$$(b_{m,1} = b_{m,2}) \iff (b_{m-1,2} = b_{m-1,0}) \quad (2.36)$$

$$b_{m,1} = b_{m,2} = 1 \iff b_{m,0} = 0$$

$$1 - 0 = b_{m-1,1} - b_{m-1,2}$$

$$1 - 1 = b_{m-1,0} - b_{m-1,2}$$

$$0 - 1 = b_{m-1,0} - b_{m-1,1}$$

ce qui entraîne

$$(b_{m-1,2} = b_{m-1,0} = 0) \iff (b_{m-1,1} = 1)$$

et

$$(b_{m,1} = b_{m,2}) \iff (b_{m-1,2} = b_{m-1,0}) \quad (2.37)$$

$$b_{m,0} = b_{m,2} = 0 \iff b_{m,1} = 1$$

$$1 - 0 = b_{m-1,1} - b_{m-1,2}$$

$$1 - 0 = b_{m-1,0} - b_{m-1,2}$$

$$0 - 0 = b_{m-1,0} - b_{m-1,1}$$

ce qui entraîne

$$(b_{m-1,0} = b_{m-1,1} = 1) \iff (b_{m-1,2} = 0)$$

et

$$(b_{m,0} = b_{m,2}) \iff (b_{m-1,0} = b_{m-1,1}) \quad (2.38)$$

$$b_{m,0} = b_{m,2} = 1 \iff b_{m,1} = 0$$

$$0 - 1 = b_{m-1,1} - b_{m-1,2}$$

$$0 - 1 = b_{m-1,0} - b_{m-1,2}$$

$$1 - 1 = b_{m-1,0} - b_{m-1,1}$$

ce qui entraîne

$$(b_{m-1,0} = b_{m-1,1} = 0) \iff (b_{m-1,2} = 1)$$

et

$$(b_{m,0} = b_{m,2}) \iff (b_{m-1,0} = b_{m-1,1}) \quad (2.39)$$

Les équivalences 2.34, 2.35, 2.36 et 2.37 en page 33 et 2.38 et 2.39 en page 34 nous permettent à présent d'écrire

$$(b_{m-1,1} = b_{m-1,0}) \iff (b_{m-2,1} = b_{m-2,2})$$

$$(b_{m-1,1} = b_{m-1,2}) \iff (b_{m-2,0} = b_{m-2,2})$$

$$(b_{m-1,0} = b_{m-1,2}) \iff (b_{m-2,0} = b_{m-2,1})$$

et aussi

$$(b_{m-2,1} = b_{m-2,0}) \iff (b_{m-3,1} = b_{m-3,2})$$

$$(b_{m-2,1} = b_{m-2,2}) \iff (b_{m-3,0} = b_{m-3,2})$$

$$(b_{m-2,0} = b_{m-2,2}) \iff (b_{m-3,0} = b_{m-3,1})$$

et finalement

$$\begin{aligned} (b_{m,1} = b_{m,0}) &\iff (b_{m-1,1} = b_{m-1,2}) \\ &\iff (b_{m-2,0} = b_{m-2,2}) \\ &\iff (b_{m-3,0} = b_{m-3,1}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} (b_{m,1} = b_{m,2}) &\iff (b_{m-1,0} = b_{m-1,2}) \\ &\iff (b_{m-2,0} = b_{m-2,1}) \\ &\iff (b_{m-3,1} = b_{m-3,2}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} (b_{m,0} = b_{m,2}) &\iff (b_{m-1,0} = b_{m-1,1}) \\ &\iff (b_{m-2,1} = b_{m-2,2}) \\ &\iff (b_{m-3,0} = b_{m-3,2}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

## 2.6 Les suites $B_{n,k}$

Construisons à partir des suites  $b_{m,k}$  les suites

$$B_{n,k} = B_{n-1,k} + b_{n,k}$$

Pour les premières valeurs prises par  $n$ , nous pouvons vérifier manuellement

$$n = 0 \equiv 1 \quad (3)$$

$$B_{0,0} = 1$$

$$B_{0,1} = 0$$

$$B_{0,2} = 0$$

$$n = 1 \equiv 1 \quad (3)$$

$$B_{1,0} = 2 = B_{0,0} + b_{1,0} = 1 + 1$$

$$B_{1,1} = 1 = B_{0,1} + b_{1,1} = 0 + 1$$

$$B_{1,2} = 0 = B_{0,2} + b_{1,2} = 0 + 0$$

$$n = 2 \equiv 2 \quad (3)$$

$$B_{2,0} = 2 = B_{1,0} + b_{2,0} = 2 + 0$$

$$B_{2,1} = 2 = B_{1,1} + b_{2,1} = 1 + 1$$

$$B_{2,2} = 0 = B_{1,2} + b_{2,2} = 0 + 0$$

$$n = 3 \equiv 0 \quad (3)$$

$$B_{3,0} = 2 = B_{2,0} + b_{3,0} = 2 + 0$$

$$B_{3,1} = 3 = B_{2,1} + b_{3,1} = 2 + 1$$

$$B_{3,2} = 1 = B_{2,2} + b_{3,2} = 0 + 1$$

$$n = 4 \equiv 1 \quad (3)$$

$$B_{4,0} = 2 = B_{3,0} + b_{4,0} = 2 + 0$$

$$B_{4,1} = 3 = B_{3,1} + b_{4,1} = 3 + 0$$

$$B_{4,2} = 2 = B_{3,2} + b_{4,2} = 1 + 1$$

$$n = 5 \equiv 2 \quad (3)$$

$$B_{5,0} = 3 = B_{4,0} + b_{5,0} = 2 + 1$$

$$B_{5,1} = 3 = B_{4,1} + b_{5,1} = 3 + 0$$

$$B_{5,2} = 3 = B_{4,2} + b_{5,2} = 2 + 1$$

$$n = 6 \equiv 0 \quad (3)$$

$$B_{6,0} = 4 = B_{5,0} + b_{6,0} = 3 + 1$$

$$B_{6,1} = 3 = B_{5,1} + b_{6,1} = 3 + 0$$

$$B_{6,2} = 3 = B_{5,2} + b_{6,2} = 3 + 0$$

$$n = 7 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$B_{7,0} = 5 = B_{6,0} + b_{7,0} = 4 + 1$$

$$B_{7,1} = 4 = B_{6,1} + b_{7,1} = 3 + 1$$

$$B_{7,2} = 3 = B_{6,2} + b_{7,2} = 3 + 0$$

$$n = 8 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$B_{8,0} = 5 = B_{7,0} + b_{8,0} = 5 + 0$$

$$B_{8,1} = 5 = B_{7,1} + b_{8,1} = 4 + 1$$

$$B_{8,2} = 3 = B_{7,2} + b_{8,2} = 3 + 0$$

$$n = 9 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$B_{9,0} = 5 = B_{8,0} + b_{9,0} = 5 + 0$$

$$B_{9,1} = 6 = B_{8,1} + b_{9,1} = 5 + 1$$

$$B_{9,2} = 4 = B_{8,2} + b_{9,2} = 3 + 1$$

$$n = 10 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$B_{10,0} = 5 = B_{9,0} + B_{6,0} = 5 + 0$$

$$B_{10,1} = 6 = B_{9,1} + B_{6,1} = 6 + 0$$

$$B_{10,2} = 5 = B_{9,2} + B_{6,2} = 4 + 1$$

$$n = 11 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$B_{11,0} = 6 = B_{10,0} + b_{11,0} = 5 + 1$$

$$B_{11,1} = 6 = B_{10,1} + b_{11,1} = 6 + 0$$

$$B_{11,2} = 6 = B_{10,2} + b_{11,2} = 5 + 1$$

Plusieurs remarques peuvent être faites à la suite de cette vérification. Pour ce qui est des suites  $b_{m,k}$ , nous montrons ci-dessous les valeurs qu'elles prennent pour  $m \leq 11$  et  $k \in \{0, 1, 2\}$

m	$b_{m,0}$	$b_{m,1}$	$b_{m,2}$
0	1	0	0
1	1	1	0
2	0	1	0
3	0	1	1
4	0	0	1
5	1	0	1
6	1	0	0
7	1	1	0
8	0	1	0
9	0	1	1
10	0	0	1
11	1	0	1

Ce tableau nous indique que les triplets  $(b_{m,0}, b_{m,1}, b_{m,2})$  se répètent périodiquement entre  $m = M$  et  $m = M + 6$  et que ces triplets sur cette période sont distincts deux à deux. Aussi

$$\sum_{m=l}^{5+l} b_{m,0} = \sum_{m=l}^{5+l} b_{m,1} = \sum_{m=l}^{5+l} b_{m,2} = 3 \quad (2.43)$$

avec  $l \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Par ailleurs, les valeurs prises par les éléments des suites  $B_{n,k}$ , lorsque  $m$  et  $k$  varient, montrent que les terme des triplets  $(B_{n,0}, B_{n,1}, B_{n,2})$  sont égaux deux à deux lorsque  $k = 5$  et  $k = 11$ .

Aussi, la vérification manuelle des valeurs prises par les éléments des suites  $B_{n,k}$  lorsque  $m \leq 11$  nous indiquent que la différence

$$(\forall k_1 \in \{0, 1, 2\}) (\forall k_2 \in \{0, 1, 2\}) (k_1 \neq k_2) (|B_{n,k_1} - B_{n,k_2}| \leq 2)$$

La relation 2.30 en page 32 et les équivalences 2.40, 2.41 et 2.42 établies en page 34 nous permettent maintenant de conclure

$$\begin{aligned} & (\forall n \in \mathbb{N}) \\ & (\forall (A_{n,0}, A_{n,1}, A_{n,2})) \\ & ((A_{n,0} = A_{n,1} = A_{n,2}) \iff n \equiv 5 \pmod{6}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

et

$$\begin{aligned} & (\forall n \in \mathbb{N}) \\ & (\forall k_1 \in \{0, 1, 2\}) \\ & (\forall k_2 \in \{0, 1, 2\}) \\ & (k_1 \neq k_2) \\ & (|B_{n,k_1} - B_{n,k_2}| \leq 2) \end{aligned}$$

ce qui implique, par construction

$$\begin{aligned} & (\forall n \in \mathbb{N}) \\ & (\forall k_1 \in \{0, 1, 2\}) \\ & (\forall k_2 \in \{0, 1, 2\}) \\ & (k_1 \neq k_2) \\ & (|A_{n,k_1} - A_{n,k_2}| \leq 2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nous passons maintenant à l'étude de la conjecture de Fermat, conjecture qui a été démontrée par Andrew Wiles (1993/1995).

## Chapitre 3

# Etude de la conjecture de Fermat

### 3.1 Objet du chapitre

Cette conjecture a donc été démontrée par Andrew Wiles entre 1993 et 1995. Pour autant, ainsi qu'il en a pu être pour d'autres problèmes dans l'histoire des mathématiques, l'exploration d'autres voies pouvant amener à d'autres démonstrations n'est pas sans intérêt. C'est ce que nous allons essayer de montrer dans ce qui suit.

### 3.2 Rappel de la conjecture

Soit l'équation

$$x^n + y^n = z^n \quad (3.1)$$

avec  $n$  entier premier,  $n > 2 \in \mathbb{N}^*$ .

Pierre de Fermat (1607-1665) a conjecturé qu'il n'existait pas de triplet  $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $y \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{N}^*$ , satisfaisant la relation 3.1. Nous supposons

$$0 < x < y < z$$

Ceci nous conduit à écrire

$$\begin{aligned} x + y \equiv z \pmod{n} &\iff x + y = kn + z \quad (k \in \mathbb{N}^*) \\ &\implies x > kn \end{aligned} \quad (3.2)$$

Laissant de côté le cas où  $n = 3$ , nous allons nous intéresser à tous les autres cas où  $n > 3$ . Il est possible, sans perte de généralité de ne considérer que les cas où  $n$  est premier.

### 3.3 Premier point

Soient donc, s'ils existent,  $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $y \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{N}^*$  qui satisfont la relation 3.1 (voir dans cette page 38). Il est alors toujours possible de supposer que

$x$ ,  $y$  et  $z$  sont premiers entre eux deux à deux. Nous avons

$$\begin{aligned} z^n &= x^n + y^n \\ &= x^n - (-1)^n y^n \\ &= (x - (-1)y) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} (-1)^j y^j \end{aligned}$$

Dans le cas où  $z \not\equiv 0 \pmod{n}$ ,  $(x - (-1)y)$  et  $\sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} (-1)^j y^j$  sont deux grandeurs premières entre elles et nous avons

$$(\exists h \in \mathbb{N}^*) (x + y = h^n)$$

et

$$z^n \equiv 0 \implies z \equiv 0 \pmod{h}$$

Enfin, la relation 1.34 et la formule 1.35 énoncées en page 22 nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} (x + y)^n - z^n &= ((x + y) - z) \sum_{j=0}^{n-1} (x + y)^{n-1-j} z^j \\ &= n\lambda xy (x + y) (x^2 + xy + y^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ .

Il est clair que les entiers naturels  $x$ ,  $y$ ,  $(x + y)$  et  $(x^2 + xy + y^2)$  sont premiers entre eux deux à deux.

### 3.4 Deuxième point

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers premiers impairs, distincts ou non l'un de l'autre. Plaçons nous dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , l'ensemble des entiers modulo  $p$ , muni de l'addition (+) et de la multiplication (\*). Cet ensemble, muni de ces deux lois, est un corps commutatif et chacun de ses éléments  $u$  a un inverse  $u^{-1} = u^{p-2}$ . Considérons également  $x$ ,  $y$  et  $z$ , solutions, si elles existent, de l'équation 3.1 en page 38 comme énoncé ci-dessus.

Nous remarquons d'abord que  $x^2 + xy + y^2$  est toujours un entier naturel impair. Nous pouvons maintenant choisir  $p$  tel que

$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{p} \quad (3.4)$$

Reprenons la relation 3.3 en cette page 39 et examinons, lorsque  $p \neq n$ , les deux cas suivants

#### 3.4.0.1 $(x + y) - z \equiv 0 \pmod{p}$

Nous avons

$$(x + y) - z \equiv 0 \iff (x + y) \equiv z \pmod{p}$$

et

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &\equiv xy \pmod{p} \\ &\equiv z^2 \pmod{p} \end{aligned}$$

et dans ce cas, il est évident que  $z \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Et nous devons avoir

$$\begin{aligned} x &\not\equiv 0 \pmod{p} \\ y &\not\equiv 0 \pmod{p} \\ (x + y) &\not\equiv 0 \pmod{p} \\ z &\not\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (x + y)^{n-1-j} z^j &\equiv n(x + y)^{n-1} \pmod{p} \\ &\equiv nz^{n-1} \pmod{p} \\ &\not\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

### 3.4.0.2 $(x + y) - z \not\equiv 0 \pmod{p}$

Nous avons

$$(x + y) - z \not\equiv 0 \iff x + y \not\equiv z \pmod{p}$$

et donc nécessairement

$$\sum_{j=0}^{n-1} (x + y)^{n-1-j} z^j \equiv 0 \pmod{p}$$

De plus

$$\begin{aligned} z \equiv 0 &\implies z^n \equiv 0 \pmod{p} \\ &\iff x^n + y^n \equiv 0 \pmod{p} \\ &\iff (x + y)^n \equiv 0 \pmod{p} \\ &\iff x + y \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Mais nous venons juste de montrer que

$$x + y \not\equiv 0 \pmod{p}$$

et donc

$$z \not\equiv 0 \pmod{p} \tag{3.5}$$

Dans les deux cas,  $(x + y) - z$  et  $\sum_{j=0}^{n-1} (x + y)^{n-1-j} z^j$  ne peuvent s'annuler simultanément dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Aussi

$$(\forall x \in \mathbb{N}^*) (\forall y \in \mathbb{N}^*) (\forall z \in \mathbb{N}^*) (x^n + y^n = z^n) (z \not\equiv 0 \pmod{p}) \tag{3.6}$$

## 3.5 Troisième point

Avant de pouvoir aborder la démonstration de la conjecture de Fermat, il nous reste à faire deux remarques. Dans ce qui suit, nous continuons à nous placer dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, *)$ , où  $p$  est un entier premier divisant  $x^2 + xy + y^2$ .

### 3.5.1 Première remarque

Rappelons que dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$(\forall a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) (a \not\equiv 0 \pmod{p}) (a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p})$$

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers naturels non nuls tels que

$$a - b \equiv c \pmod{p}$$

Nous avons

$$a^{p-1} = a^{p-2}a \equiv 1 \pmod{p}$$

et nous pouvons écrire

$$a - b \equiv c \pmod{p} \iff 1 - a^{p-2}b \equiv a^{p-2}c \pmod{p}$$

Nous conviendrons d'écrire, par abus de notation

$$(\forall a \in \mathbb{N}^*) \left( a^{-1} = \frac{1}{a} \equiv a^{p-2} \pmod{p} \right)$$

Posons

$$\frac{x + y}{z} = (x + y)z^{-1} \equiv u_n \pmod{p}$$

où  $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $y \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{N}^*$ , satisfont la relation 3.1 en page 38.

Alors (voir les relations 3.3 et 3.4 en page 39)

$$u_n^n \equiv 1 \pmod{p}$$

Clairement,

$$u_n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

et il existe  $\nu \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  tel que

$$u_n^n \equiv u_n^\nu \equiv 1 \pmod{p}$$

Remarquons que dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $\nu$  est nécessairement un diviseur de  $p - 1$ . Alors

$$u_n^n \equiv 1 \pmod{p} \iff (\exists k_p \in \mathbb{N}^*) (n = k_p \nu)$$

mais,  $n$  est supposé premier et par conséquent

$$n = \nu$$

Nous en déduisons que  $n < p$  et que  $p - 1$  est multiple de  $n$ .

### 3.5.2 Deuxième remarque

Les entiers  $x$  et  $y$  étant chacun distincts de  $p$

$$(\exists u_3 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) (u_3 \not\equiv 1 \pmod{p}) \left( \sum_{j=0}^2 u_3^j \equiv 0 \iff u_3^3 \equiv 1 \pmod{p} \right)$$

### 3.6 Une démonstration de la conjecture

Posons

$$u_3 = xy^{-1} \quad (3.7)$$

Considérons

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{x+y}{z} \right)^j &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \left( 1 + \frac{x}{y} \right)^j \\ &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \sum_{k=0}^j C_j^k u_3^k \pmod{p} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} (C_j^{3k+0} u_3^0 + C_j^{3k+1} u_3^1 + C_j^{3k+2} u_3^2) \pmod{p} \quad (3.9)$$

soit encore

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{x+y}{z} \right)^j &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} (C_j^{3k+0} u_3^0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} (C_j^{3k+1} u_3^1) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} (C_j^{3k+2} u_3^2) \pmod{p} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{x+y}{z} \right)^j &\equiv u_3^0 \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} (C_j^{3k+0}) \\ &\quad + u_3^1 \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} (C_j^{3k+1}) \\ &\quad + u_3^2 \sum_{j=2}^{n-1} \left( \frac{y}{z} \right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} (C_j^{3k+2}) \pmod{p} \end{aligned}$$

puisque  $u_3^{3k+r} \equiv u_3^{3k} u_3^r \equiv u_3^r \pmod{p}$  avec  $r \in \{0, 1, 2\}$ . Et nous pouvons écrire

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{x+y}{z} \right)^j \equiv \mathcal{A}_0 u_3^0 + \mathcal{A}_1 u_3^1 + \mathcal{A}_2 u_3^2 \pmod{p} \quad (3.10)$$

avec, en reprenant les notations utilisées dans les relations 2.3, 2.4 et 2.5 en page 23

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} C_j^{3k+0} \quad (p) \\ &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,0} \quad (p)\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &\equiv \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} C_j^{3k+1} \quad (p) \\ &\equiv \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,1} \quad (p)\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &\equiv \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} C_j^{3k+2} \quad (p) \\ &\equiv \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,2} \quad (p)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Egalement, il est évident que pour chacune des sommes 3.11, 3.12 et 3.13, lorsque  $r$  prend les valeurs 0, 1 et 2

$$(\forall j) (\forall k) (3k + r \leq j)$$

Reprenons les égalités 3.11 en page 43, 3.12 et 3.13 en cette page 43 et écrivons

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1 &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,0} - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,1} \quad (p) \\ &\equiv a_{0,0} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,0} - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,1} \quad (p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_2 &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,0} - \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,2} \quad (p) \\ &\equiv a_{0,0} + a_{1,0} \frac{y}{z} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,0} - \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,2} \quad (p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 &\equiv \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,1} - \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,2} \quad (p) \\ &\equiv a_{1,1} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,1} - \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j a_{j,2} \quad (p)\end{aligned}$$

Posons

$$a_{j,0} - a_{j,1} = \alpha_{j,(0,1)} \iff a_{j,0} = a_{j,1} + \alpha_{j,(0,1)} \quad (3.14)$$

$$a_{j,0} - a_{j,2} = \alpha_{j,(0,2)} \iff a_{j,0} = a_{j,2} + \alpha_{j,(0,2)}$$

$$a_{j,1} - a_{j,2} = \alpha_{j,(1,2)} \iff a_{j,1} = a_{j,2} + \alpha_{j,(1,2)}$$

Remarquons que ces trois dernières égalités entraînent

$$\alpha_{j,(0,2)} = \alpha_{j,(0,1)} + \alpha_{j,(1,2)} \quad (3.15)$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1 &\equiv a_{0,0} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \alpha_{j,(0,1)} \quad (p) \\ &\equiv a_{0,0} + \alpha_{1,(0,1)} \frac{y}{z} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \alpha_{j,(0,1)} \quad (p) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_2 \equiv a_{0,0} + a_{1,0} \frac{y}{z} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \alpha_{j,(0,2)} \quad (p) \quad (3.17)$$

$$\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 \equiv a_{1,1} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \alpha_{j,(1,2)} \quad (p) \quad (3.18)$$

et nous avons aussi en sommant les égalités 3.16 et 3.18 en cette page 44 (voir aussi l'égalité 3.15 en page 44)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_2 &\equiv a_{0,0} + \alpha_{1,(0,1)} \frac{y}{z} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \alpha_{j,(0,1)} + a_{1,1} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \alpha_{j,(1,2)} \quad (p) \\ &\equiv a_{0,0} + \alpha_{1,(0,1)} \frac{y}{z} + a_{1,1} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{y}{z}\right)^j \alpha_{j,(0,2)} \quad (p) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$a_{0,0} + \alpha_{1,(0,1)} \frac{y}{z} + a_{1,1} \equiv a_{0,0} + a_{1,0} \frac{y}{z} \iff \alpha_{1,(0,1)} \frac{y}{z} + a_{1,1} \equiv a_{1,0} \frac{y}{z} \quad (p) \quad (3.19)$$

mais en accord avec les égalités 2.6 en page 24, 2.11 en page 26 et 2.17 en page 28

$$a_{0,0} = C_0^0 = 1$$

$$a_{1,0} = C_1^0 = 1$$

et de même, en accord avec les égalités 2.7 en page 24, 2.12 en page 26 et 2.18 en page 28

$$a_{1,1} = C_1^1 = 1$$

et en accord avec la relation 3.14 en cette page 44

$$\alpha_{1,(0,1)} = a_{1,0} - a_{1,1} = 0$$

et donc la relation 3.19 en cette page 44 s'écrit

$$1 \equiv \frac{y}{z} \iff z \equiv y \quad (p)$$

Nous remarquons alors qu'en permutant  $x$  et  $y$ , nous pouvons aussi écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{x+y}{z} \right)^j &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{x}{z} \right)^j \left( 1 + \frac{y}{x} \right)^j \\ &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{x}{z} \right)^j \sum_{k=0}^j C_j^k u_3^k \quad (p) \\ &\equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{x}{z} \right)^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{3} \rfloor} (C_j^{3k+0} u_3^0 + C_j^{3k+1} u_3^1 + C_j^{3k+2} u_3^2) \quad (p) \end{aligned}$$

avec cette fois ci

$$u_3 = x^{-1}y$$

et nous en déduisons

$$1 \equiv \frac{x}{z} \iff z \equiv x \quad (p)$$

Mais alors

$$x \equiv y \implies x^2 + xy + y^2 \equiv 3x^2 \equiv 3y^2 \equiv 0 \quad (p) \quad (3.20)$$

or nous avons montré (voir conclusion de la section 3.5.1 en page 41)

$$p > n > 3 \implies x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \quad (p) \quad (3.21)$$

ce qui contrevient aux hypothèses de départ dans la section 3.3 en page 38.

La conjecture est ainsi démontrée pour tout entier premier  $n > 3$ . **QED.**