Доказательство гипотезы Коллатца

Султан К.С.

Абстракт: В статье приводиться доказательство гипотезы Коллатца. Доказано, что если вычисление функции Коллатца $C(n)$ начать с нечетных чисел вида $6m \pm 1$, $m \in \mathbb{N}$, то на каждой итерации образуются нечетные числа вида $6n \pm 1$ или единица. Далее доказано, что если провести обратное вычисление по формуле $((6n \pm 1) \cdot 2^q - 1)/3$, увеличивая на каждой итерации показатель степени двойки на 1, то каждому числу вида $6n \pm 1$ будут соответствовать бесконечное число чередующихся целых чисел вида $3t, 6m - 1$ и $6m + 1$. Затем показано, что если построить граф чисел, путем совмещения равных чисел $6n \pm 1$ и $6m \pm 1$, являющихся соответственно аргументом и частным значением функции, то образуется фрактальный граф-дерево. Фрактальный граф-дерево, каждая вершина которого соответствует числам вида $6m \pm 1$, является доказательством гипотезы Коллатца, так как любая его вершина связана с конечной вершиной, связанной с единицей.

Ключевые слова: гипотеза Коллатца, проблема $3n + 1$, сиракузская проблема, доказательство.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза Коллатца, известная также как проблема $3n + 1$, сиракузская проблема, является одной из нерешенных проблем математики. Можно отметить следующие работы посвященные проблеме $3n + 1$ [1, 2, 3, 4, 5].

Функция Коллатца $C(n)$ определяется на натуральных числах следующим образом:

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & \text{если} \quad n - \text{четное}, \\ 3n + 1, & \text{если} \quad n - \text{нечетное}. \end{cases} \tag{1}$$

Для объяснения гипотезы Коллатца, берем любое натуральное число n, если оно четное, то делим его на 2, а если нечетное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем $3n + 1$). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее. Гипотеза Коллатца заключается в том, что какое бы начальное число n ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

2. СТАРТОВОЕ ЧИСЛО

По условию гипотезы вычисление функции Коллатца можно начать с любого натурального числа. Тем не менее, очевидно, что эффективнее стартовать с нечетного числа, так как любое четное число при делении на 2 (один или несколько раз) превратится в нечетное число.

Поскольку нечетных чисел можно разделить на нечетные числа, которые делятся на 3 и нечетные числа, которые не делятся на 3, возникает следующий вопрос:

Вопрос 1. С каких нечетных чисел эффективнее начать вычисление?

Известно, что все натуральные числа, за исключением 1, можно представить по формулам: 1) $3t$; 2) $3t-1$; 3) $3t+1$, где $t = 1, 2, 3 \dots$. Также известно, что все нечетные числа неделимые на 3 можно представить в виде $6m-1$; $6m+1$, где $m = 1, 2, 3 \dots$.

Если нечетные числа вида $3t$ умножить на 3 и прибавить 1, то очевидно, что получиться числа имеющий вид $3t+1$. При этом если число имеющий вид $3t+1$ является нечетным, то, безусловно, оно будет числом вида $6m+1$. А если число вида $3t+1$ является четным числом, то, при делении на 2 (один или несколько раз) до получения нечетного числа, образуется число вида $6m-1$ или $6m+1$, так как число вида $3t+1$ не делиться на 3.

Таким образом, можно утверждать, что все натуральные числа кратные 3 через одну операцию $3m+1$, и деления на определенные степени двойки, в случае образования четного числа, превращается в нечетные числа имеющие виды $6n-1$ и $6n+1$. Исключением являются числа, которые после операции $3m+1$ будут равными степени двойки.

Из вышесказанного следует, что эффективнее начать вычисление функции Коллатца с нечетных чисел имеющих вид $6m-1$ или $6m+1$. Таким образом, в дальнейшем все вычисления мы будем начать только с чисел вида $6m \mp 1$.

Теперь ответим на следующий вопрос:

Вопрос 2. Какого вида числа образуются из чисел вида $6m+1$ *и* $6m-1$ *в результате вычисления функции Коллатца?*

Понятно, что все числа вида $6m+1$ и $6m-1$ являются нечетными числами вида $3t+1$ или $3t-1$, так как не являются числами кратными 3. Если умножить такие числа на 3 и прибавить 1, то естественно получиться четные числа вида $3s+1$. А при делении четных чисел вида $3s+1$ на два (один или несколько раз) до получения нечетного числа, то полученные нечетные числа будут иметь вид $6n-1$ или $6n+1$, так как числа вида $3s+1$ не делятся на 3.

Из вышесказанного следует, что в результате вычисления функции Коллатца на основе чисел вида $6m+1$ и $6m-1$ образуются числа вида $6n-1$ или $6n+1$, т.е. вид числа не меняется.

В дальнейшем иногда будем использовать следующие обозначения: $k^-=6m-1$ и $k^+=6m+1$, т.е. индекс буквы будет указывать на знак формулы, при этом k^- будет называться «минус» числом, а k^+ будет называться «плюс» числом.

Примечание. Разные буквы m *и* n *используется в обозначениях чисел одинакового вида* $6m\mp1$ *и* $6n\mp1$ *для отличия аргумента (переменной) и частного значения функции Коллатца.*

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЕЛ

3.1. ПРЯМОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Прежде чем приступить к доказательству гипотезы Коллатца проведем исследование чисел образуемых в результате вычисления функции Коллатца и установим их закономерности.

Сначала исследуем нечетные числа кратные 3, для этого составим таблицу 1.1 (Приложение 1), где показаны результаты вычисления функции Коллатца на основе чисел кратных 3 по формуле

$$C = (3 \cdot 3m + 1)/2^q, \textit{ где } m, q \in N. \qquad (2)$$

В Таблице 1.1 (Приложение 1) приведены примеры того что числа, полученные в результате вычисления функции Коллатца на основе чисел кратных 3, образуют последовательность чисел имеющих вид $6n - 1$ и $6n + 1$ на шести столбцах Таблицы 1.1, которых можно вычислить по формулам:

$$q = 1, \;\; k^+ = 19 + 18t; \qquad (3)$$

$$q = 2, \;\; k^- = 5 + 18t; \qquad (4)$$

$$q = 3, \;\; k^+ = 7 + 18t; \qquad (5)$$

$$q = 4, \; k^- = 17 + 18t; \qquad (6)$$

$$q = 5, \; k^+ = 13 + 18t; \qquad (7)$$

$$q = 6, \; k^- = 11 + 18t. \qquad (8)$$

Безусловно, что числа, полученные на основе вышеприведенных шести формул (3-8) образуют бесконечную последовательность чисел имеющих вид $6n - 1$ и $6n + 1$. Например, при $t = 0$ получиться шесть начальных числа вышесказанной последовательности: 5, 7, 11, 13, 17, 19, при $t = 1$ получиться второй комплект из шести чисел вышесказанной последовательности: 23, 25, 29, 31, 35, 37 и т.д.

Отметим, что вышеприведенные 6 арифметических прогрессий получены путем деления арифметической прогрессии $1 + 9n$ на степень двойки, поэтому тут вопросы не должны возникать.

Таким образом, путем вычисления функции Коллатца на основе последовательности чисел кратных 3 можно получить бесконечную последовательность чисел имеющих вид $6n \mp 1$. Это означает, что если вычисление функции Коллатца начать с чисел кратных 3, то на следующем шаге вычисления образуется число вида $6n \mp 1$, что было сказано ранее.

При этом нужно отметить следующий важный момент - если вычисления проводить при больших показателях степени двойки, то можно увидеть, что при вычислении повторно получается ранее полученные числа вида $6n - 1$ и $6n + 1$. Например, если провести вычисление функции Коллатца на основе чисел 9 и 597, которые кратны 3, то в обоих случаях получиться число 7.

Данную закономерность можно выразить следующим равенством

$$(3t \cdot 3 + 1)/2^q = (3s \cdot 3 + 1)/2^{q+6a}, \qquad (9)$$

где $t, s = 1, 2, 3, \dots;\ q, a = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Например, $(9 \cdot 3 + 1)/2^2 = 28/4 = 7$; $(597 \cdot 3 + 1)/2^{2+6}$= $1792/256$=7.

Ответим на следующий вопрос:

Вопрос 3: По какой причине при вычислении функции Коллатца на основе чисел кратных 3 происходит повторение чисел вида $6n - 1$ *и* $6n + 1$, *которые ранее были получены при малых показателях степени двойки?*

Пояснение повторения чисел вида $6n \mp 1$ при вычислении функции Коллатца на основе чисел кратных 3 приведено в Приложении 2.

Доказательство гипотезы Коллатца, предложенное автором, основано на закономерностях чисел вида $6n \mp 1$, образуемых в результате расчета функции Коллатца на основе других чисел вида $6m \mp 1$. В этой связи проведем анализ чисел вида $6n \mp 1$, образуемых в результате расчета функции Коллатца на основе других чисел вида $6m \mp 1$, для этого используем следующие формулы:

Формула для расчета на основе чисел вида $k^{-} = 6m - 1$:

$$C(k^{-}) = (3(6m-1)+1)/2^{q};\ \ C(k^{-}) = (18m-2)/2^{q}. \qquad (10)$$

Формула для расчета на основе чисел вида $k^{+} = 6m + 1$:

$$C(k^{+}) = (3(6m+1)+1)/2^{q};\ \ C(k^{+}) = (18m+4)/2^{q}. \qquad (11)$$

В таблицах 1.2 и 1.3 (Приложение 1) приведены результаты вычисления соответственно по формулам (10) и (11).

Числа, полученные в результате вычисления функции Коллатца на основе чисел $k^{-} = 6m - 1$, т.е. числа, полученные по формуле (10), образуют последовательность чисел имеющих вид $k^{-} = 6n - 1$ и $k^{+} = 6n + 1$ на шести столбцах Таблицы 1.2 (Приложение 1), соответствующих показателю двойки q: 1, 2, 3, 4, 5, 6, которых можно вычислить по формулам:

$$q = 1,\ \ k^{-} = 17 + 18t; \qquad (12)$$

$$q = 2,\ \ k^{+} = 13 + 18t; \qquad (13)$$

$$q = 3,\ k^{-} = 11 + 18t; \qquad (14)$$

$$q = 4,\ k^{+} = 19 + 18t; \qquad (15)$$

$$q = 5,\ \ k^{-} = 5 + 18t; \qquad (16)$$

$$q = 6,\ \ k^{+} = 7 + 18t, \qquad \text{где } t = 0, 1, 2, 3 \dots\ . \qquad (17)$$

Данные Таблицы 1.2 показывают, что вычисление функции Коллатца на основе чисел вида $6m - 1$ приведет к образованию новых чисел вида $6n \mp 1$. Из Таблицы 1.2 следует, что числа вида $6n \mp 1$, расположенные на шести столбцах соответствующих определенному показателю степени двойки, составляют бесконечную последовательность чисел вида $6n \mp 1$: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37 и т.д.

Вышеприведенные шесть формул арифметической прогрессии (12-17), были получены из арифметической прогрессии $18m - 2$, поэтому не требуют доказательств.

Числа, полученные в результате вычисления функции Коллатца на основе чисел $k^{+} = 6m + 1$, т.е. числа, полученные по формуле (11), образуют последовательность чисел имеющих вид $k^{-} = 6n - 1$ и $k^{+} = 6n + 1$ на шести столбцах Таблицы 1.3 (Приложение 1), соответствующих показателю двойки q: 1, 2, 3, 4, 5, 6, которых можно вычислить по формулам:

$$q = 1,\ k^{-} = 11 + 18t; \qquad (18)$$

$$q = 2,\ k^{+} = 19 + 18t; \qquad (19)$$

$$q = 3,\ k^{-} = 5 + 18t; \qquad (20)$$

$$q = 4,\ k^{+} = 7 + 18t; \qquad (21)$$

$$q = 5,\ k^{-} = 17 + 18t; \qquad (22)$$

$$q = 6, \quad k^{+} = 13 + 18t,\ \text{где } t = 0, 1, 2, 3 \dots . \qquad (23)$$

Данные Таблицы 1.3 показывают, что вычисление функции Коллатца на основе чисел вида $6m + 1$ также приведет к образованию новых чисел вида $6n \mp 1$. Из Таблицы 1.3 следует, что числа вида $6n \mp 1$, расположенные на шести столбцах соответствующих определенному показателю степени двойки, составляют бесконечную последовательность чисел вида $6n \mp 1$: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37 и т.д.

В таблицах 1.2. и 1.3 некоторые числа вида $6m \mp 1$ в результате вычисления функции Коллатца соответствуют единице, например, 5, 85, 341 и т.д. В этой связи возникает следующий вопрос.

Вопрос 4. Какие числа вида $6m \mp 1$ *в результате вычисления функции Коллатца будут равны единице?*

Чисел вида $6m \mp 1$, при умножении которых на 3 и прибавлении 1 образуется четное число равное степени двойки, бесконечно много. Такие числа соответствуют четным показателям степени двойки q (начиная с $q = 4$), за исключением четных показателей степени кратных 3. Таких чисел можно вычислить по формуле

$$6m \mp 1 = (2^q - 1)/3, \qquad (24)$$

где $q \geq 4$ – четное число, не кратное числу 3.

Например, если числа 5, 85 и 341, которые соответствуют числам вида $6m \mp 1$, умножить на 3 и прибавить 1, то образуются четные числа 16, 256 и 1024, которые являются степенями двойки.

Отметим, если любые четные числа, полученные путем умножения на 3 и прибавлении 1 чисел вида $6m - 1$ или $6m + 1$, при делении на степень двойки дают равные числа, то отношение этих чисел кратно 64. Например, отношение четных чисел 16 и 1024, которые получены путем умножения на 3 и прибавлении 1 соответственно чисел 5 и 341, которые являются числами одинакового вида $6m - 1$, равно 64. Число 1 получается из четного числа 4, а если 4 умножить на 64 получится 256. Четное число 256 получается на основе 85, которое является числом вида $6m + 1$. Если такие числа назовем парными числами, то вторую пару рассматриваемого числа вида $k^- = 6m - 1$ или $k^+ = 6m + 1$ можно вычислить и по следующим формулам

$$k_2^- = k_1^- \cdot 64 + 21; \qquad k_2^+ = k_1^+ \cdot 64 + 21; \qquad (25)$$

Примеры: 1·64+21=85; 5·64+21=341; 13·64+21=853; 53·64+21=3413.

Если при вычислении функции Коллатца продолжать повышать числа вида $6m \mp 1$ и показатель степени двойки q, т.е. расширить границу расчета, то можно заметить, что в процессе вычисления образуются новые числа вида $6n \mp 1$, которые уже были получены при вычислении малых чисел. Например, на ячейке, которая соответствует строке 78 и столбцу 10 Таблицы 1.3 (Приложение 1), где показатель двойки равен 7, находится число 11. Такое же число находиться и на строке 1 данной таблицы. Первое число 11 получено в результате вычисления на основе числа 7 (при q=1), а второе число 11 получено в результате вычисления на основе числа 469 (при q=7). Данная закономерность выражается следующими равенствами:

$$(k_i^- \cdot 3 + 1)/2^q = (k_j^- \cdot 3 + 1)/2^{q+6a}, \text{ где } a=1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

$$(k_i^+ \cdot 3 + 1)/2^q = (k_j^+ \cdot 3 + 1)/2^{q+6a}, \text{ где } a=1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

Пример вычисления функции Коллатца на втором отрезке показателя двойки $q = 7 – 12$ на основе чисел вида $6m - 1$ приведены в Таблице 1.4 (Приложение 1).

Пояснение повторения чисел вида $6m - 1$ и $6m + 1$ при вычислении функции Коллатца на основе разных показателей степени двойки приведено в Приложении 2.

3.2. МНОЖЕСТВО ЧИСЕЛ

Если использовать термины теории множества, то при вычислении функции Коллатца на основе чисел вида $6m - 1$, когда показатель степени двойки ограничен числовым отрезком длиной 6, начиная с первого отрезка $\mathrm{q} = 1 – 6$, каждому элементу множества

$$G_i = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\} \quad (28)$$

сопоставляется ровно один элемент множества

$$K^{-} = \{k^{-} | k^{-} = 6m - 1, m \in N\}. \quad (29)$$

В обозначении множества G_i индекс $i -$ показывает номер числового отрезка соответствующего показателям степени двойки. Например, если рассматривается первый интервал показателя степени двойки $q = 1$ – 6, то множество будет иметь обозначение G_1.

При этом не все элементы множества K^{-} соответствуют элементам множества G_1, это объясняется тем, что некоторые элементы множества K^{-} соответствуют элементам других множеств G_i, которые образованы в других отрезках показателя степени двойки, например, на отрезках $q = 7$ – 12, $q = 13$ – 18, и т.д., к тому же определенные элементы множества K^{-} будут соответствовать единице. Например, числа 5, 341, 21845 и т.д., которые являются числами вида $k^{-} = 6m - 1$, при вычислениях будут соответствовать 1. Такие числа будем называть порождающими числами.

В случаях, когда вычисление функции Коллатца проводится на основе чисел вида $6m + 1$, ограничением показателя степени двойки числовым отрезком длиной 6, начиная с первого отрезка q $= 1$ – 6, каждому элементу множества

$$G_i = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}, \quad (30)$$

сопоставляется ровно один элемент множества

$$K^{+} = \{k^{+} | k^{+} = 6m + 1, m \in N\}. \quad (31)$$

Известно, что при вычислении функции Коллатца все пути замыкаются на числах, которые непосредственно связанные с единицей, т.е. на порождающих числах, например, числа 5, 85, 341 и т.д. Отметим, что первым порождающим числом вида $k^{-} = 6m - 1$, которое непосредственно связано с единицей, является число 5, а вторым числом является 341, таких чисел бесконечно много. Это означает, что все числа, которые при вычислениях будут соответствовать 1, формируют свои пути, т.е. свои множества чисел.

Из вышесказанного следует, что в результате вычисления функции Коллатца на основе чисел $k^- = 6m - 1$ и $k^+ = 6n + 1$ при $q = 1 - 6$ образуется две одинаковых последовательностей чисел вида $6n \mp 1$.

Так как объединение подмножеств K^- и K^+ образует множество

$$K = \{k|k = 6m \mp 1, m \in N\}, \quad \text{т.е. } K = K^- \cup K^+, \tag{32}$$

то каждый элемент множества $G_i = \{g|g = 6n \mp 1, n \in N\}$ сопоставляется сразу двум элементам множества $K = \{k|k = 6m \mp 1, m \in N\}$.

Таким образом, при вычислении функции Коллатца на основе элементов множества $K^- = \{k|k = 6m - 1, m \in N\}$ и $K^+ = \{k|k = 6m + 1, m \in N\}$, каждому элементу этих множеств сопоставляется один элемент другого множества $G_i = \{g|g = 6n \mp 1, n \in N\}$ за исключением чисел, которые в результате вычисления будут равны степени двойки, т.е. соответствуют единице.

Следует подчеркнуть, что существует только одно множество K, когда для каждого числового отрезка степени двойки существует свое множество $G_i = \{g|g = 6n \mp 1, n \in N\}$, т.е. множеств G_i бесконечно много.

Таким образом, при вычислении функции Коллатца каждое число вида $6n \mp 1$ на числовом интервале степени двойки длиной 6 непременно является результатом вычисления на основе двух разных чисел вида $6m - 1$ и $6m + 1$. Образно говоря, при вычислении функции Коллатца каждое число вида $6n \mp 1$ будет иметь двух родителей, один из них будет $6m - 1$, а другое будет $6m + 1$. Если учитывать числа кратные 3, то каждое число вида $6n \mp 1$ будет иметь трех родителей. Таким образом, при вычислении функции Коллатца каждое число вида $6n \mp 1$ на интервале степени двойки длиной 6 образуется непременно с трех нечетных чисел: $6m - 1$, $6m + 1$ и $3t$.

3.3. ОБРАТНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Числа, из которых при вычислении функции Коллатца получится рассматриваемое число, назовем числами-предшественниками. Чисел-предшественников для любого элемента множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ можно установить путем проведения обратного вычисления. Для этих целей используем следующую формулу

$$r = (d \cdot 2^q - 1)/3 \text{, где } q = 0,1,2,3 \ldots, d \text{ −нечетные числа.} \qquad (33)$$

Примеры вычислений по формуле (33) на основе последовательности нечетных чисел, приведенные в Таблице 3.1 (Приложении 3). Подчеркнем, что на основе формулы (33) мы охватываем все нечетные числа.

Данные Таблицы 3.1 показывают, что каждому нечетному числу вида $6n \mp 1$ при обратном вычислении функции Коллатца будет соответствовать бесконечно много строго чередующихся целых чисел вида $3t$, $6m + 1$, $6m - 1$. Также из данных Таблицы 3.1 следует, что при обратном вычислении функции Коллатца нечетные числа кратные 3 не имеют целых чисел-предшественников.

Таким образом, при обратном вычислении функции Коллатца каждому элементу множества $G = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ и числу 1 сопоставляется элементы соответственно множеств

$$R(3) = \{v, r | v = 3t;\ r = 6m \mp 1;\ t, m \in N\}, \qquad (34)$$

$$R(3)_1 = \{v_1, r_1 | v_1 = 3t;\ r_1 = 6m \mp 1, t, m \in N\},$$

где $R(3)$- множество чисел-предшественников, включая чисел кратных 3, сопоставляемые одному элементу g множества G; $R(3)_1$-множество чисел-предшественников, включая чисел кратных 3, сопоставляемые числу 1.

Множества чисел-предшественников элементов множества G и числа 1 без чисел кратных 3 выразим следующим образом

$$R = \{r|\ r = 6m \mp 1;\ t, m \in N\}, \qquad (35)$$

$$R_1 = \{r_1|\ r_1 = 6m \mp 1, t, m \in N\}.$$

Не сложно понять, что объединение всех множеств чисел-предшественников $R(3)_g$ и $R(3)_{1g}$ образует множество нечетных чисел, когда объединение всех множеств чисел-предшественников R_g и R_{1g} образует множество $K = \{k|k = 6m \mp 1, m \in N\}$.

Таким образом, на каждом числовом интервале показателя степени двойки длиной 6 существует три целых числа вида $3t$, $6m + 1$ и $6m - 1$, которые при расчете функции Коллатца превращаются в одно и то же число имеющего вид $6n - 1$ или $6n + 1$. Это означает, что каждое число вида $6n \mp 1$ на интервале показателя степени двойки длиной 6 как бы расщепляется на три целых числа $3t$, $6m + 1$ и $6m - 1$. Схема расщепления числа вида $6n \mp 1$, названная полным микрографом, показано на рисунке 1.

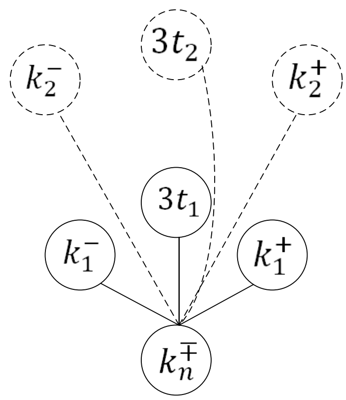

Рисунок 1. Полный микрограф чисел вида $k^\mp = 6n \mp 1$

Примечание: $k^- = 6m - 1$, $k^+ = 6m + 1$, $k^\mp = 6n \mp 1$.

На рисунке 1 пунктирными линиями показано расщепление числа $k^\mp$ на три числа на втором интервале степени двойки $q = 7 - 12$. Отметим, что каждое число вида $k^\mp = 6n \mp 1$ будет расщепляться на три числа на каждом отрезке степени двойки, т.е. бесконечно.

Так как нечетные числа кратные 3 ($3t$) после одной операции превращаются в числа вида $6m \mp 1$, то можно их исключить из вычислений. Тогда можно считать, что при обратном расчете каждое число вида $6n \mp 1$ на каждом интервале показателя степени двойки длиной 6 расщепляется на два целых числа $6m + 1$ и $6m - 1$.

В таблице 3.2 (Приложение 3) показаны результаты вычислений по формуле (33) на основе чисел вида $6n \mp 1$, т.е. в этом случае исключены нечетные числа кратные 3. Как видно из таблицы 3.2, числа всех столбцов выражаются арифметической прогрессией.

Все нечетные числа шести столбцов Таблицы 3.2, получаемых при обратном вычислении функции Коллатца, образуют 12 арифметических прогрессий, т.е. на каждый столбец приходиться по 2 арифметических прогрессий. Если объединить все 12 арифметических прогрессий, то получается бесконечная последовательность чисел вида $6m \mp 1$, образуемого из двух арифметических прогрессии $6m - 1$ и $6m + 1$.

Отметим, что числа-предшественники имеют закономерности не только по столбцам таблицы, но и по строкам таблицы.

На первых строках Таблиц 3.1 и 3.2 приведены числа, которые являютя предшественниками числа 1, т.е. если вычисления функции Коллатца произвести на основе целых чисел расположенных на первых строках таблиц 3.1 и 3.2, то получится 1.

Не трудно понять, что все множества $R = \{r \,|\, r = 6m \mp 1;\ t, m \in N\}$, соответствующие каждому числу вида $6n \mp 1$, которые состоят из элементов являющихся числами-предшественниками чисел вида $6n \mp 1$, являются непересекающимся множествами. Иными словами, элементы множества R сопоставляемые одному числа вида $6n \mp 1$ не будет повторяться во множестве элементы которых сопоставляются любому другому числу такого вида. Тем не менее, ниже математически докажем невозможность повтора чисел в разных множествах.

Пусть два числа вида $6m \mp 1$, образованные из двух разных чисел вида $6n \mp 1$ в результате вычисления по формуле (33), будут равны, т.е.

$$((6n_1 \mp 1) \cdot\ 2^{q_1} - 1)/3 = ((6n_2 \mp 1) \cdot\ 2^{q_2} - 1)/3. \qquad (36)$$

Из этого уравнения после сокращения получим $(6n_1 \mp 1) \cdot\ 2^{q_1} = (6n_2 \mp 1) \cdot\ 2^{q_2}$. Отсюда имеем следующее уравнение

$$\frac{(6n_1 \mp 1)}{(6n_2 \mp 1)} = 2^{q_2 - q_1}. \qquad (37)$$

Очевидно, что вышеприведенное уравнение (37) не имеет решений в натуральных числах, так как левая часть уравнения, если даже она будет целым числом, то будет нечетным, а правая часть уравнения всегда будет четным числом.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ

Таким образом, на основе результатов описанных в предыдущих пунктах можно утверждать следующее:

Утверждение 1. Чтобы доказать верность гипотезы Коллатца достаточно доказать ее верность при старте вычисления функции Коллатца с любого числа вида $6m \mp 1$*, причем достаточно доказать гипотезу для первого интервала степени двойки* $q = 1$ *- 6, так как закономерности других интервалов степени двойки полностью повторяют закономерности первого интервала* $q = 1$ *- 6.*

Из Утверждения 1 следует, что доказательством верности гипотезы Коллатца на основе графа является следующее утверждение:

Утверждение 2. Если вычисление функции Коллатца начать с любого числа вида $6m \mp 1$*, то все возможные пути чисел образуемых при вычислении функции Коллатца на любом интервале степени двойки длиной 6 образуют фрактальный ориентированный граф-дерево, показанный на рис. 2.*

Фрактальный граф-дерево, показанный на рисунке 2, формируются, если объединить все пути чисел образуемых при вычислении функции Коллатца, когда стартовым числом является число вида $6m \mp 1$. Особенностью представленного графа является то, что каждая его вершина бесконечно расщепляется на две вершины, начиная с конечной вершины. Такая форма графа гарантирует стыковку всех возможных путей на конечной вершине, которая напрямую связана с числом 1.

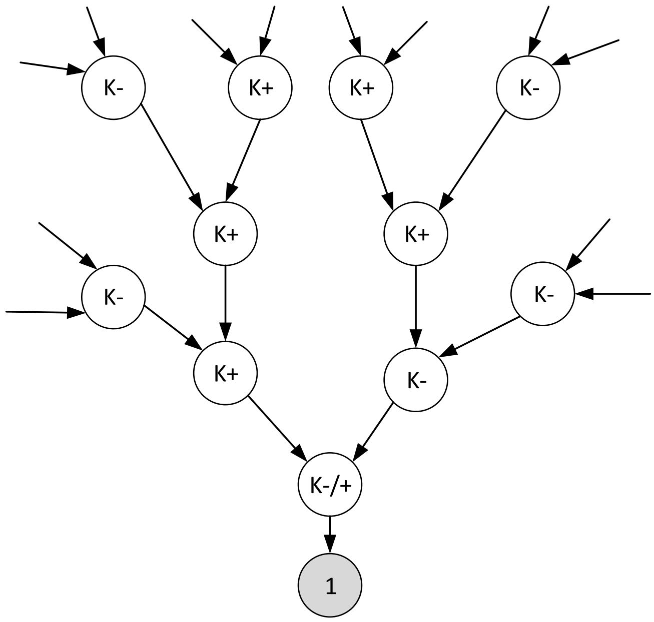

Рисунок 2. Ориентированный фрактальный граф-дерево

Прежде чем приступить к доказательству Утверждения 2 покажем схему строительства графа-дерева путем объединения микрографов.

Как было сказано ранее, если ограничить степень двойки числовым интервалом длиной 6 ($q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), то при обратном вычислении каждому члену числовой последовательности вида $6n \mp 1$ будет соответствовать два числа такого же вида. Эти два числа являются предшественниками рассматриваемого числа. Если сказанное выразить в виде графа, то получим сокращенный микрограф, который состоит из двух дуг (ребер) и трех вершин: одного нижнего и двух верхних вершин.

На рисунке 3 показаны сокращенные микрографы соответствующие начальным восьми членам числовой последовательности вида $6n \mp 1$.

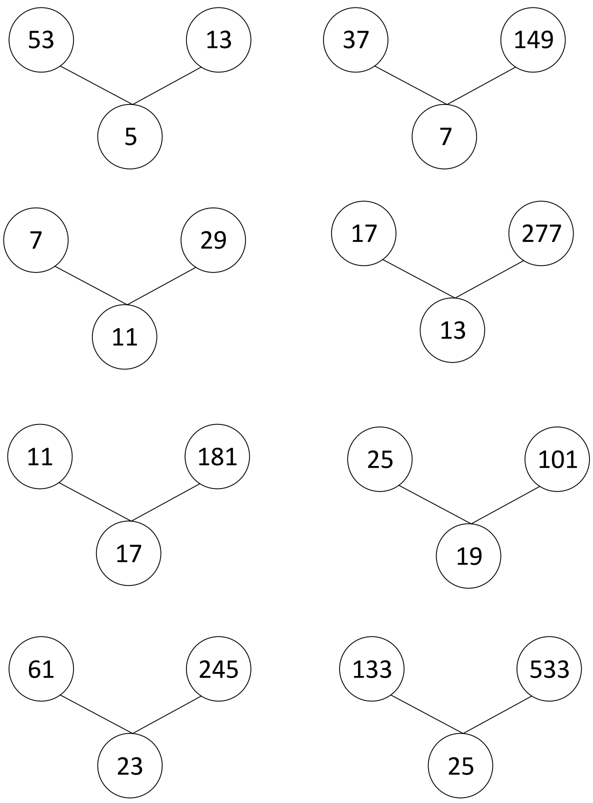

Рисунок 3. Сокращенные микрографы начальных чисел вида $6n \mp 1$

Отметим, что количество микрографов бесконечно.

Так как числа соответствующие нижним вершинам является элементами множества $G_i = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$, а числа верхних вершин соответствуют элементам множеств $K_i^- = \{k^- | k^- = 6m - 1, m \in N\}$ и $K_i^+ = \{k^+ | k^+ = 6m + 1, m \in N\}$, повтора чисел не будет.

Как как было показано в главе 3, при вычислении функции Коллатца на основе элементов множества $K_i^- = \{k|k = 6m - 1, m \in N\}$ и $K_i^+ = \{k|k = 6m + 1, m \in N\}$, каждому элементу этих множеств сопоставляется один элемент другого множества $G_i = \{g|g = 6n \mp 1, n \in N\}$ за исключением чисел, которые соответствуют единице. Отсюда следует, что каждому числу верхней вершины любого микрографа непременно найдется такое же число соответствующего нижней вершине другого микрографа. Это означает, что все микрографы могут быть объединены в один граф-дерево.

Далее объединением таких микрографов строится общий граф-дерево, который показывает все возможные пути нечетных чисел вида $6n \mp 1$ образуемых при вычислении функции Коллатца. На рисунке 4 показан пример объединения двух сокращенных микрографов.

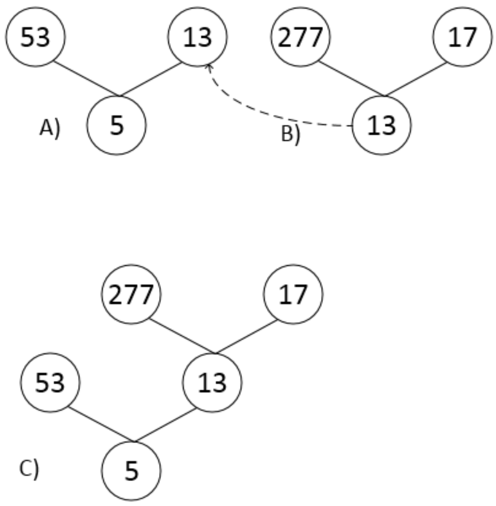

Рисунок 4. Пример объединения двух микрографов

Если при вычислении функции Коллатца начать с любого нечетного числа, включая числа кратные 3, то граф-дерево будет иметь вид, как это показано на рисунке 5.

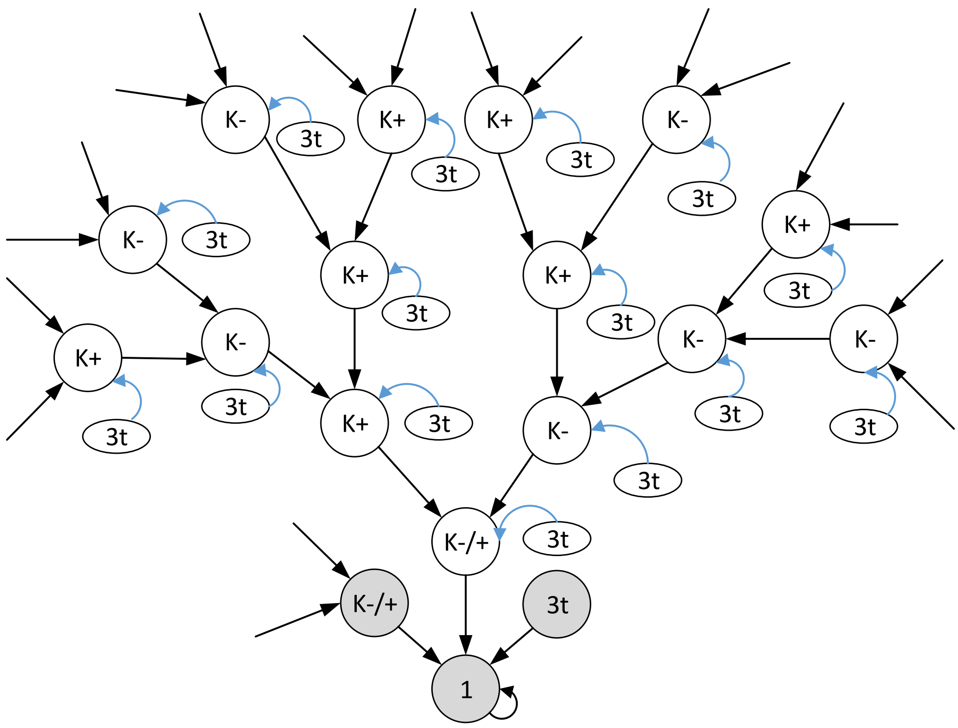

Рисунок 5. Ориентированный граф-дерево, включающий чисел кратных 3

Из графа, показанного на рисунке 5, следует, что каждая вершина имеет свое число кратное 3. Вместе с тем, числа кратные 3, как показано на рисунке 5, не оказывают влияния на формирования структуры графа. Если начать вычисление с чисел кратных 3, то путь стыкуются с вершиной, соответствующей числу вида $6n \mp 1$, а далее путь будет продолжена по структуре графа. Данная структура соответствует утверждению о том, что при вычислении функции Коллатца числа кратные 3 превращаются в числа вида $6n \mp 1$.

На рисунке 5 две нижние закрашенные вершины со знаками $K -/+$ и $3t$, которые связаны с вершиной 1, символизируют, что чисел вида $6n \mp 1$ и чисел кратных 3, которые при вычислении функции Коллатца будут равны степени двойки, бесконечно много. При этом такие числа вида $6n \mp 1$ формируют свои ветви в графе-дереве.

Стрелка, исходящая из вершины 1 и направленная туда же (петля) показывает, что если вычисление функции Коллатца начать с числа 1, то получиться 1.

Если на графе-дереве показать и четные числа $(2t)$, то получим следующий рисунок

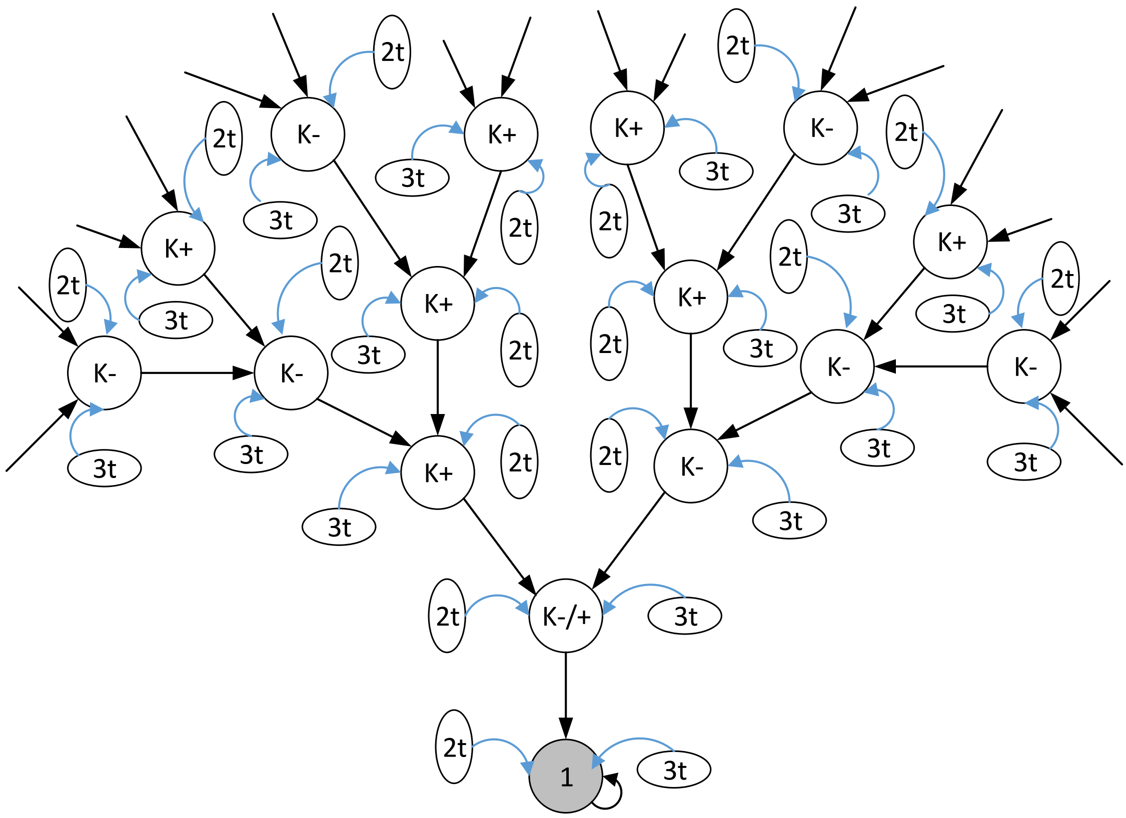

Рисунок 6. Граф-дерево с четными и нечетными числами.

Для удобства анализа введем следующую классификацию ориентированных графов, соответствующих вычислениям функции Коллатца:

1. Плоский ориентированный граф-дерево – это ориентированный граф-дерево соответствующее одному интервалу степени двойки длиной 6 (например, интервалу $q = 1$ - 6);

1.1. Одиночный плоский ориентированный граф-дерево – это ориентированный граф-дерево соответствующее одному порождающему числу (например, числу 5) и одному интервалу степени двойки длиной 6 (например, интервалу $q = 1$ - 6);

1.2. Многочисленный плоский ориентированный граф-дерево – это ориентированный граф-дерево соответствующее конечному числу порождающих чисел (например, числу 5, 85, 341 и т.д.) и одному интервалу степени двойки длиной 6 (например, интервалу $q = 1$ - 6);

2. Объемный ориентированный граф-дерево – это ориентированный граф-дерево соответствующее конечному числу интервалов степени двойки длиной 6 (например, интервалам $q = 1 – 6; q = 7 – 12; q = 13 – 18$ и т.д.);

2.1. Одиночный объемный ориентированный граф-дерево – это ориентированный граф-дерево соответствующее одному порождающему числу (например, числу 85) и конечному числу интервалов степени двойки длиной 6 (например, интервалам $q = 1 – 6; q = 7 – 12; q = 13 – 18$ и т.д.);

2.2. Многочисленный объемный ориентированный граф-дерево – это ориентированный граф-дерево соответствующее конечному числу порождающих чисел (например, числу 5, 85, 341 и т.д.) и конечному числу интервалов степени двойки длиной 6 (например, интервалам $q = 1 – 6; q = 7 – 12; q = 13 – 18$ и т.д.);

3) Абсолютный ориентированный граф-дерево – это ориентированный граф-дерево соответствующее бесконечным порождающим числам и бесконечным интервалам степеней двойки. Вышеприведенные виды ориентированного графа-дерева являются частными случаями Абсолютного ориентированного графа-дерева.

Отметим, что все графы-деревья состоят из множества одиноких плоских графов-деревьев, которые образуются по одним и тем же закономерностям и имеют одинаковую конструкцию.

Из Утверждения 2 следует другое утверждение.

Утверждение 3. Чтобы доказать верность гипотезы Коллатца на основе графа достаточно доказать, что все пути чисел образуемых при вычислении функции Коллатца, образуют ориентированный граф-дерево, причем именно такой формы, какая показана на рисунке 5.

В последнем утверждении из вычислений не исключаются числа кратные 3, т.е. Утверждение 3 подразумевает, что если при вычислении функции Коллатца стартовать с любого нечетного числа, то образуются ориентированный граф-дерево, показанное на рисунке 5.

Чтобы соответствовать Утверждению 3 граф-дерево, образуемый при вычислении функции Коллатца, должен отвечать следующим требованиям:

1) Все ветви любого плоского графа-дерева, образуемого при вычислении функции Коллатца, должны иметь возможность расти бесконечно, поэтому рост ветвей и плоского графа-дерево должен ограничиваться только границей вычисления. В противном случае это будет означать конечность чисел, для которых гипотеза Коллатца верна;

2) В любой части плоского графа-дерева, образуемого при вычислении функции Коллатца, не должен образоваться контур (замкнутый путь). В противном случае гипотеза Коллатца будет неверной, так как образование контура в графе является графическим представлением бесконечного продолжения вычисления;

3) Абсолютный граф-дерево, образуемый при вычислении функции Коллатца, должен содержать все числа вида $6m \mp 1$ и нечетные числа кратные 3, т.е. все нечетные числа.

Как было отмечено выше, все графы состоят из множества плоских графов-деревьев, которые образуются на основе одинаковых закономерностей и имеют одинаковую конструкцию. Отсюда следует, что если будут доказано соответствие вышеприведенным трем требованиям любого плоского графа-дерева, то это будет означать, что все графы-деревья соответствуют вышеприведенным требованиям.

Ниже приводятся доказательства соответствие плоского графа-дерева, образуемого при вычислении функции Коллатца, вышеперечисленным требованиям в форме вопроса-ответа.

Вопрос 5. Может ли рост некоторых ветвей плоского графа-дерево остановиться?

Ответ: Плоский граф-дерево растет бесконечно, его рост ограничивается только границей вычисления. Это объясняется тем, что все нижние вершины плоского графа-дерева являются неповторяющимися числами вида $6n \mp 1$, при этом расщепление любого числа вида $6n \mp 1$, соответствующего нижней вершине, на два числа вида $6m \mp 1$, соответствующих двум верхним вершинам, которые также не повторяются, происходить бесконечно.

Вопрос 6. Может ли в плоском ориентированном графе-дереве образоваться контур, т.е. замкнутый путь?

Из теории графов известно, что дерево – это связанный ацикличный граф. При этом связанность устанавливается наличием путей между любой парой вершин, а ацикличность (отсутствие циклов) определяется тем, что между парами вершин имеется только по одному пути. Отсюда следует, что в плоском графе-дереве контур образоваться не может по определению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, доказано, что если при вычислении функции Коллатца каждый раз стартовать с чисел вида $6n \mp 1$, то все пути образуют фрактальный граф-дерево, каждая вершина которого связана с конечной вершиной, связанной с единицей. Отсюда следует, что гипотеза Коллатца верна, и она доказана.

Ссылки

[1] L. Collatz, On the motivation and origin of the (3n + 1) – Problem, J. Qufu Normal University, Natural Science Edition, 12(3) (1986) 9–11.

[2] J. C. Lagarias, The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem, American Mathematical Society, 2010.

[3] J. C. Lagarias, The 3x + 1 problem: An annotated bibliography (1963–1999), http://arxiv.org/abs/math/0309224v13.

[4] J. C. Lagarias, The 3x + 1 Problem: An Annotated Bibliography, II (2000–2009), http://arxiv.org/abs/math/0608208v6.

[5] R. E. Crandall, On the “3x+1” Problem, Math. Comp., 32(144) (1978) 1281–1292.

Приложение 1.

Таблица 1.1. Вычисление функции Коллатца на основе чисел кратных 3

n	3n	9n+1	(9n+1)/2	(9n+1)/4	(9n+1)/8	(9n+1)/16	(9n+1)/32	(9n+1)/64
1	3	10	5	2,5	1,25	0,625	0,3125	0,15625
2	6	19	9,5	4,75	2,375	1,1875	0,59375	0,296875
3	9	28	14	7	3,5	1,75	0,875	0,4375
4	12	37	18,5	9,25	4,625	2,3125	1,15625	0,578125
5	15	46	23	11,5	5,75	2,875	1,4375	0,71875
6	18	55	27,5	13,75	6,875	3,4375	1,71875	0,859375
7	21	64	32	16	8	4	2	1
8	24	73	36,5	18,25	9,125	4,5625	2,28125	1,140625
9	27	82	41	20,5	10,25	5,125	2,5625	1,28125
10	30	91	45,5	22,75	11,375	5,6875	2,84375	1,421875
11	33	100	50	25	12,5	6,25	3,125	1,5625
12	36	109	54,5	27,25	13,625	6,8125	3,40625	1,703125
13	39	118	59	29,5	14,75	7,375	3,6875	1,84375
14	42	127	63,5	31,75	15,875	7,9375	3,96875	1,984375
15	45	136	68	34	17	8,5	4,25	2,125
16	48	145	72,5	36,25	18,125	9,0625	4,53125	2,265625
17	51	154	77	38,5	19,25	9,625	4,8125	2,40625
18	54	163	81,5	40,75	20,375	10,1875	5,09375	2,546875
19	57	172	86	43	21,5	10,75	5,375	2,6875
20	60	181	90,5	45,25	22,625	11,3125	5,65625	2,828125
21	63	190	95	47,5	23,75	11,875	5,9375	2,96875
22	66	199	99,5	49,75	24,875	12,4375	6,21875	3,109375
23	69	208	104	52	26	13	6,5	3,25
24	72	217	108,5	54,25	27,125	13,5625	6,78125	3,390625
25	75	226	113	56,5	28,25	14,125	7,0625	3,53125
26	78	235	117,5	58,75	29,375	14,6875	7,34375	3,671875
27	81	244	122	61	30,5	15,25	7,625	3,8125
28	84	253	126,5	63,25	31,625	15,8125	7,90625	3,953125
29	87	262	131	65,5	32,75	16,375	8,1875	4,09375
30	90	271	135,5	67,75	33,875	16,9375	8,46875	4,234375
31	93	280	140	70	35	17,5	8,75	4,375
32	96	289	144,5	72,25	36,125	18,0625	9,03125	4,515625
33	99	298	149	74,5	37,25	18,625	9,3125	4,65625
34	102	307	153,5	76,75	38,375	19,1875	9,59375	4,796875
35	105	316	158	79	39,5	19,75	9,875	4,9375
36	108	325	162,5	81,25	40,625	20,3125	10,15625	5,078125
37	111	334	167	83,5	41,75	20,875	10,4375	5,21875
38	114	343	171,5	85,75	42,875	21,4375	10,71875	5,359375
39	117	352	176	88	44	22	11	5,5

Таблица 1.2. Результаты вычисления по формуле $C(k^{-}) = (18m - 2)/2^{q}$

m	k^{-}	$3k+1$	q=1	q=2	q=3	q=4	q=5	q=6	q=7
1	**5**	16	8	4	2	1			
2	**11**	34	17	8,5	4,25	2,125	1,0625	0,53125	0,265625
3	**17**	52	26	13	6,5	3,25	1,625	0,8125	0,40625
4	**23**	70	35	17,5	8,75	4,375	2,1875	1,09375	0,546875
5	**29**	88	44	22	11	5,5	2,75	1,375	0,6875
6	**35**	106	53	26,5	13,25	6,625	3,3125	1,65625	0,828125
7	**41**	124	62	31	15,5	7,75	3,875	1,9375	0,96875
8	**47**	142	71	35,5	17,75	8,875	4,4375	2,21875	1,109375
9	**53**	160	80	40	20	10	5	2,5	1,25
10	**59**	178	89	44,5	22,25	11,125	5,5625	2,78125	1,390625
11	**65**	196	98	49	24,5	12,25	6,125	3,0625	1,53125
12	**71**	214	107	53,5	26,75	13,375	6,6875	3,34375	1,671875
13	**77**	232	116	58	29	14,5	7,25	3,625	1,8125
14	**83**	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625	1,953125
15	**89**	268	134	67	33,5	16,75	8,375	4,1875	2,09375
16	**95**	286	143	71,5	35,75	17,875	8,9375	4,46875	2,234375
17	**101**	304	152	76	38	19	9,5	4,75	2,375
18	**107**	322	161	80,5	40,25	20,125	10,0625	5,03125	2,515625
19	**113**	340	170	85	42,5	21,25	10,625	5,3125	2,65625
20	**119**	358	179	89,5	44,75	22,375	11,1875	5,59375	2,796875
21	**125**	376	188	94	47	23,5	11,75	5,875	2,9375
22	**131**	394	197	98,5	49,25	24,625	12,3125	6,15625	3,078125
23	**137**	412	206	103	51,5	25,75	12,875	6,4375	3,21875
24	**143**	430	215	107,5	53,75	26,875	13,4375	6,71875	3,359375
25	**149**	448	224	112	56	28	14	7	3,5
26	**155**	466	233	116,5	58,25	29,125	14,5625	7,28125	3,640625
27	**161**	484	242	121	60,5	30,25	15,125	7,5625	3,78125
28	**167**	502	251	125,5	62,75	31,375	15,6875	7,84375	3,921875
29	**173**	520	260	130	65	32,5	16,25	8,125	4,0625
30	**179**	538	269	134,5	67,25	33,625	16,8125	8,40625	4,203125
31	**185**	556	278	139	69,5	34,75	17,375	8,6875	4,34375
32	**191**	574	287	143,5	71,75	35,875	17,9375	8,96875	4,484375
33	**197**	592	296	148	74	37	18,5	9,25	4,625
34	**203**	610	305	152,5	76,25	38,125	19,0625	9,53125	4,765625
35	**209**	628	314	157	78,5	39,25	19,625	9,8125	4,90625
36	**215**	646	323	161,5	80,75	40,375	20,1875	10,09375	5,046875
37	**221**	664	332	166	83	41,5	20,75	10,375	5,1875
38	**227**	682	341	170,5	85,25	42,625	21,3125	10,65625	5,328125
39	**233**	700	350	175	87,5	43,75	21,875	10,9375	5,46875
40	**239**	718	359	179,5	89,75	44,875	22,4375	11,21875	5,609375

Продолжение таблицы 1.2.

41	**245**	736	368	184	92	46	23	11,5	5,75
42	**251**	754	377	188,5	94,25	47,125	23,5625	11,78125	5,890625
43	**257**	772	386	193	96,5	48,25	24,125	12,0625	6,03125
44	**263**	790	395	197,5	98,75	49,375	24,6875	12,34375	6,171875
45	**269**	808	404	202	101	50,5	25,25	12,625	6,3125
46	**275**	826	413	206,5	103,25	51,625	25,8125	12,90625	6,453125
47	**281**	844	422	211	105,5	52,75	26,375	13,1875	6,59375
48	**287**	862	431	215,5	107,75	53,875	26,9375	13,46875	6,734375
49	**293**	880	440	220	110	55	27,5	13,75	6,875
50	**299**	898	449	224,5	112,25	56,125	28,0625	14,03125	7,015625
51	**305**	916	458	229	114,5	57,25	28,625	14,3125	7,15625
52	**311**	934	467	233,5	116,75	58,375	29,1875	14,59375	7,296875
53	**317**	952	476	238	119	59,5	29,75	14,875	7,4375
54	**323**	970	485	242,5	121,25	60,625	30,3125	15,15625	7,578125
55	**329**	988	494	247	123,5	61,75	30,875	15,4375	7,71875
56	**335**	1006	503	251,5	125,75	62,875	31,4375	15,71875	7,859375
57	**341**	1024	512	256	128	64	32	16	8
58	**347**	1042	521	260,5	130,25	65,125	32,5625	16,28125	8,140625
59	**353**	1060	530	265	132,5	66,25	33,125	16,5625	8,28125
60	**359**	1078	539	269,5	134,75	67,375	33,6875	16,84375	8,421875
61	**365**	1096	548	274	137	68,5	34,25	17,125	8,5625
62	**371**	1114	557	278,5	139,25	69,625	34,8125	17,40625	8,703125
63	**377**	1132	566	283	141,5	70,75	35,375	17,6875	8,84375
64	**383**	1150	575	287,5	143,75	71,875	35,9375	17,96875	8,984375
65	**389**	1168	584	292	146	73	36,5	18,25	9,125
66	**395**	1186	593	296,5	148,25	74,125	37,0625	18,53125	9,265625
67	**401**	1204	602	301	150,5	75,25	37,625	18,8125	9,40625
68	**407**	1222	611	305,5	152,75	76,375	38,1875	19,09375	9,546875
69	**413**	1240	620	310	155	77,5	38,75	19,375	9,6875
70	**419**	1258	629	314,5	157,25	78,625	39,3125	19,65625	9,828125
71	**425**	1276	638	319	159,5	79,75	39,875	19,9375	9,96875
72	**431**	1294	647	323,5	161,75	80,875	40,4375	20,21875	10,10938
73	**437**	1312	656	328	164	82	41	20,5	10,25
74	**443**	1330	665	332,5	166,25	83,125	41,5625	20,78125	10,39063
75	**449**	1348	674	337	168,5	84,25	42,125	21,0625	10,53125
76	**455**	1366	683	341,5	170,75	85,375	42,6875	21,34375	10,67188
77	**461**	1384	692	346	173	86,5	43,25	21,625	10,8125
78	**467**	1402	701	350,5	175,25	87,625	43,8125	21,90625	10,95313
79	**473**	1420	710	355	177,5	88,75	44,375	22,1875	11,09375
80	**479**	1438	719	359,5	179,75	89,875	44,9375	22,46875	11,23438
81	**485**	1456	728	364	182	91	45,5	22,75	11,375

Таблица 1.3. Результаты вычисления по формуле $C(k^{+}) = (18m + 4)/2^{q}$

m	k^{+}	$3k+1$	q=1	q=2	q=3	q=4	q=5	q=6	q=7
1	**7**	22	11	5,5	2,75	1,375	0,6875	0,34375	0,171875
2	**13**	40	20	10	5	2,5	1,25	0,625	0,3125
3	**19**	58	29	14,5	7,25	3,625	1,8125	0,90625	0,453125
4	**25**	76	38	19	9,5	4,75	2,375	1,1875	0,59375
5	**31**	94	47	23,5	11,75	5,875	2,9375	1,46875	0,734375
6	**37**	112	56	28	14	7	3,5	1,75	0,875
7	**43**	130	65	32,5	16,25	8,125	4,0625	2,03125	1,015625
8	**49**	148	74	37	18,5	9,25	4,625	2,3125	1,15625
9	**55**	166	83	41,5	20,75	10,375	5,1875	2,59375	1,296875
10	**61**	184	92	46	23	11,5	5,75	2,875	1,4375
11	**67**	202	101	50,5	25,25	12,625	6,3125	3,15625	1,578125
12	**73**	220	110	55	27,5	13,75	6,875	3,4375	1,71875
13	**79**	238	119	59,5	29,75	14,875	7,4375	3,71875	1,859375
14	**85**	256	128	64	32	16	8	4	2
15	**91**	274	137	68,5	34,25	17,125	8,5625	4,28125	2,140625
16	**97**	292	146	73	36,5	18,25	9,125	4,5625	2,28125
17	**103**	310	155	77,5	38,75	19,375	9,6875	4,84375	2,421875
18	**109**	328	164	82	41	20,5	10,25	5,125	2,5625
19	**115**	346	173	86,5	43,25	21,625	10,8125	5,40625	2,703125
20	**121**	364	182	91	45,5	22,75	11,375	5,6875	2,84375
21	**127**	382	191	95,5	47,75	23,875	11,9375	5,96875	2,984375
22	**133**	400	200	100	50	25	12,5	6,25	3,125
23	**139**	418	209	104,5	52,25	26,125	13,0625	6,53125	3,265625
24	**145**	436	218	109	54,5	27,25	13,625	6,8125	3,40625
25	**151**	454	227	113,5	56,75	28,375	14,1875	7,09375	3,546875
26	**157**	472	236	118	59	29,5	14,75	7,375	3,6875
27	**163**	490	245	122,5	61,25	30,625	15,3125	7,65625	3,828125
28	**169**	508	254	127	63,5	31,75	15,875	7,9375	3,96875
29	**175**	526	263	131,5	65,75	32,875	16,4375	8,21875	4,109375
30	**181**	544	272	136	68	34	17	8,5	4,25
31	**187**	562	281	140,5	70,25	35,125	17,5625	8,78125	4,390625
32	**193**	580	290	145	72,5	36,25	18,125	9,0625	4,53125
33	**199**	598	299	149,5	74,75	37,375	18,6875	9,34375	4,671875
34	**205**	616	308	154	77	38,5	19,25	9,625	4,8125
35	**211**	634	317	158,5	79,25	39,625	19,8125	9,90625	4,953125
36	**217**	652	326	163	81,5	40,75	20,375	10,1875	5,09375
37	**223**	670	335	167,5	83,75	41,875	20,9375	10,46875	5,234375
38	**229**	688	344	172	86	43	21,5	10,75	5,375
39	**235**	706	353	176,5	88,25	44,125	22,0625	11,03125	5,515625
40	**241**	724	362	181	90,5	45,25	22,625	11,3125	5,65625

Продолжение таблицы 1.3.

41	**247**	742	371	185,5	92,75	46,375	23,1875	11,59375	5,796875
42	**253**	760	380	190	95	47,5	23,75	11,875	5,9375
43	**259**	778	389	194,5	97,25	48,625	24,3125	12,15625	6,078125
44	**265**	796	398	199	99,5	49,75	24,875	12,4375	6,21875
45	**271**	814	407	203,5	101,75	50,875	25,4375	12,71875	6,359375
46	**277**	832	416	208	104	52	26	13	6,5
47	**283**	850	425	212,5	106,25	53,125	26,5625	13,28125	6,640625
48	**289**	868	434	217	108,5	54,25	27,125	13,5625	6,78125
49	**295**	886	443	221,5	110,75	55,375	27,6875	13,84375	6,921875
50	**301**	904	452	226	113	56,5	28,25	14,125	7,0625
51	**307**	922	461	230,5	115,25	57,625	28,8125	14,40625	7,203125
52	**313**	940	470	235	117,5	58,75	29,375	14,6875	7,34375
53	**319**	958	479	239,5	119,75	59,875	29,9375	14,96875	7,484375
54	**325**	976	488	244	122	61	30,5	15,25	7,625
55	**331**	994	497	248,5	124,25	62,125	31,0625	15,53125	7,765625
56	**337**	1012	506	253	126,5	63,25	31,625	15,8125	7,90625
57	**343**	1030	515	257,5	128,75	64,375	32,1875	16,09375	8,046875
58	**349**	1048	524	262	131	65,5	32,75	16,375	8,1875
59	**355**	1066	533	266,5	133,25	66,625	33,3125	16,65625	8,328125
60	**361**	1084	542	271	135,5	67,75	33,875	16,9375	8,46875
61	**367**	1102	551	275,5	137,75	68,875	34,4375	17,21875	8,609375
62	**373**	1120	560	280	140	70	35	17,5	8,75
63	**379**	1138	569	284,5	142,25	71,125	35,5625	17,78125	8,890625
64	**385**	1156	578	289	144,5	72,25	36,125	18,0625	9,03125
65	**391**	1174	587	293,5	146,75	73,375	36,6875	18,34375	9,171875
66	**397**	1192	596	298	149	74,5	37,25	18,625	9,3125
67	**403**	1210	605	302,5	151,25	75,625	37,8125	18,90625	9,453125
68	**409**	1228	614	307	153,5	76,75	38,375	19,1875	9,59375
69	**415**	1246	623	311,5	155,75	77,875	38,9375	19,46875	9,734375
70	**421**	1264	632	316	158	79	39,5	19,75	9,875
71	**427**	1282	641	320,5	160,25	80,125	40,0625	20,03125	10,01563
72	**433**	1300	650	325	162,5	81,25	40,625	20,3125	10,15625
73	**439**	1318	659	329,5	164,75	82,375	41,1875	20,59375	10,29688
74	**445**	1336	668	334	167	83,5	41,75	20,875	10,4375
75	**451**	1354	677	338,5	169,25	84,625	42,3125	21,15625	10,57813
76	**457**	1372	686	343	171,5	85,75	42,875	21,4375	10,71875
77	**463**	1390	695	347,5	173,75	86,875	43,4375	21,71875	10,85938
78	**469**	1408	704	352	176	88	44	22	11
79	**475**	1426	713	356,5	178,25	89,125	44,5625	22,28125	11,14063
80	**481**	1444	722	361	180,5	90,25	45,125	22,5625	11,28125
81	**487**	1462	731	365,5	182,75	91,375	45,6875	22,84375	11,42188

Таблица 1.4. Результаты вычисления при показателях двойки q=7-12

m	k^-	$3k+1$	q=7	q=8	q=9	q=10	q=11	q=12
57	**341**	1024	8	4	2	1	0,5	0,25
121	**725**	2176	17	8,5	4,25	2,125	1,0625	0,53125
185	**1109**	3328	26	13	6,5	3,25	1,625	0,8125
249	**1493**	4480	35	17,5	8,75	4,375	2,1875	1,09375
313	**1877**	5632	44	22	11	5,5	2,75	1,375
377	**2261**	6784	53	26,5	13,25	6,625	3,3125	1,65625
441	**2645**	7936	62	31	15,5	7,75	3,875	1,9375
505	**3029**	9088	71	35,5	17,75	8,875	4,4375	2,21875
569	**3413**	10240	80	40	20	10	5	2,5
633	**3797**	11392	89	44,5	22,25	11,125	5,5625	2,78125
697	**4181**	12544	98	49	24,5	12,25	6,125	3,0625
761	**4565**	13696	107	53,5	26,75	13,375	6,6875	3,34375
825	**4949**	14848	116	58	29	14,5	7,25	3,625
889	**5333**	16000	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,90625
953	**5717**	17152	134	67	33,5	16,75	8,375	4,1875
1017	**6101**	18304	143	71,5	35,75	17,875	8,9375	4,46875
1081	**6485**	19456	152	76	38	19	9,5	4,75
1145	**6869**	20608	161	80,5	40,25	20,125	10,0625	5,03125
1209	**7253**	21760	170	85	42,5	21,25	10,625	5,3125
1273	**7637**	22912	179	89,5	44,75	22,375	11,1875	5,59375
1337	**8021**	24064	188	94	47	23,5	11,75	5,875
1401	**8405**	25216	197	98,5	49,25	24,625	12,3125	6,15625
1465	**8789**	26368	206	103	51,5	25,75	12,875	6,4375
1529	**9173**	27520	215	107,5	53,75	26,875	13,4375	6,71875
1593	**9557**	28672	224	112	56	28	14	7

Приложение 2.

ОБОСНОВАНИЕ ПОВТОРЕНИЯ ЧИСЕЛ

Если последовательность чисел вида $3t$ умножить на 3 и прибавить 1, то получиться последовательность четных чисел выражаемых по формуле $2n = (1 + 18t)$. В таблице 1.1 приведенная последовательность четных чисел делятся на определенные степени двойки пока не получиться нечетные числа. Было отмечено ранее, такие нечетные числа образуют последовательность чисел вида $6n \mp 1$, причем все числа вида $6n \mp 1$ полученные при показателях степени двойки $q = 1 - 6$ повторяются при показателях степени двойки $q = 7 - 12$, и на других интервалах показателя степени двойки. Ниже приведем пояснение повторению чисел вида $6n \mp 1$ при вычислении функции Коллатца на основе чисел кратных 3 на разных показателях степени двойки.

Два числа вида $6n \mp 1$, полученные в результате вычисления функции Коллатца на основе чисел кратных 3, будут равными, если имеет решение следующее равенство

$$\frac{1+18t_1}{2^{q_1}} = \frac{1+18t_2}{2^{q_2}}. \quad (2.1)$$

Отсюда получим следующее равенство

$$2^{q_2-q_1} = (1 + 18t_2)/(1 + 18t_1). \quad (2.2)$$

Если анализировать числа в правой части равенства, получаемые в результате деления при разных значениях t_2 и фиксированном t_1, то для любого значения t_1, целые числа будут выражаться формулой $1 + 9r$. С учетом этого получим уравнение

$$2^{q_2-q_1} = 1 + 9r, \text{ где } \quad r = 0,1,2 \dots . \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) имеет бесконечное решение, первые три решения получиться при следующих данных:

1) $r = 7, 2^{q_2-q_1} = 64, q_2 - q_1 = 6;$

2) $r = 455, 2^{q_2-q_1} = 4096, q_2 - q_1 = 12;$

3) $r = 29127, 2^{q_2-q_1} = 262143, q_2 - q_1 = 18;$

Итак, если разница степеней двойки правой и левой части равенства (2.1) будет равна числу кратному 6, то это равенство имеет решение в целых числах.

Например: 1) $3\mathrm{t} = 3,$ 3·3+1=10, 10/2=5; 2) $3\mathrm{t} = 213,$ 213·3+1=640, 640/128=5; 4) 128/2=64; 640/10=64.

Если последовательность чисел вида $6m - 1$ умножить на 3 и прибавить 1, то получиться последовательность четных чисел выражаемых по формуле $2n = (16 + 18t)$, а если такую операцию проделать с последовательностью чисел вида $6m + 1$, то получиться последовательность четных чисел выражаемых по формуле $2n = (22 + 18t)$.

В таблицах 1.2 и 1.3 вышеприведенные последовательности четных чисел делятся на определенные степени двойки пока не получиться нечетные числа. Как было доказано и показано ранее, такие нечетные числа образуют последовательность чисел вида $6n \mp 1$. Также было отмечено, что все числа вида $6n \mp 1$ полученные при показателях степени двойки $q = 1 - 6$ повторяются при показателях степени двойки $q = 7 - 12$, и на других интервалах показателя степени двойки. Ниже будет дано пояснение повторению чисел при разных показателях степени двойки.

Итак, если разница степеней двойки правой и левой части равенства (2.1) будет равна числу кратному 6, то это равенство имеет решение в целых числах. Например: 1) $\mathrm{k}^{-} = 11,$ 11·3+1=34, 34/2=17; 2) $\mathrm{k}^{-} = 725,$ 725·3+1=2176, 2176/128=17; 3) $\mathrm{k}^{-} = 46421,$ 46421·3+1=139264, 139264/8192=17; 4) 128/2=8192/128=64; 2176/34=139264/2176=64.

Далее исследуем числа вида $6m + 1$. Два числа вида $6n \mp 1$, полученные в результате вычисления функции Коллатца на основе числовой последовательности вида $6m + 1$, будут равными, если имеет решение следующее равенство

$$\frac{22+18t_1}{2^{q_1}} = \frac{22+18t_2}{2^{q_2}}. \qquad (2.4)$$

Отсюда получим следующее равенство

$$2^{q_2 - q_1} = (22 + 18t_2)/(22 + 18t_1). \qquad (2.5)$$

И в этом случае, целые числа в правой части равенства (2.5) будут выражаться формулой $1 + 9r$, т.е. вместо уравнения (2.5) можно пользоваться уравнением (2.3).

Таким образом, если два числа вида $k_i^- = 6m - 1$ и $k_j^- = 6m - 1$ или $k_i^+ = 6m + 1$ и $k_j^+ = 6m + 1$ вычисленные по формулам

1) $k_i^- = (k_m^- \cdot 3 + 1)/2^{q_1}$, $k_j^- = (k_n^- \cdot 3 + 1)/2^{q_2}$ или

2) $k_i^+ = (k_m^+ \cdot 3 + 1)/2^{q_1}$, $k_j^+ = (k_n^+ \cdot 3 + 1)/2^{q_2}$

будут равны, то разница показателей степени двойки вышеприведенных формулах будет кратным числу 6, т.е. $q_2 - q_1 = 6t, t = 1,2,3 \dots$.

Приложение 3.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ КОЛЛАТЦА

Все нечетные числа Таблиц 3.1 получены по формуле (33) обратной функции Коллатца. Такие же числа приведены в таблице 3.2, которые были вычислены на основе нижеследующих 24 формул арифметической прогрессии для 6 степеней двойки $q = 1 - 6$, по 12 формул соответственно для k_{ij} и g_{ij}:

$$q = 1$$

$$k_{11} = 7 + 12t; \leftrightarrow g_{11} = 11 + 18t; \tag{3.1.1}$$

$$k_{12} = 11 + 12t; \leftrightarrow g_{12} = 17 + 18t; \tag{3.1.2}$$

$$q = 2$$

$$k_{21} = 1 + 24t; \leftrightarrow g_{21} = 1 + 18t; \tag{3.2.1}$$

$$k_{22} = 17 + 24t; \leftrightarrow g_{22} = 13 + 18t; \tag{3.2.2}$$

$$q = 3$$

$$k_{31} = 13 + 48t; \leftrightarrow g_{31} = 5 + 18t; \tag{3.3.1}$$

$$k_{32} = 29 + 48t; \leftrightarrow g_{32} = 11 + 18t; \tag{3.3.2}$$

$$q = 4$$

$$k_{41} = 5 + 96t; \leftrightarrow g_{41} = 1 + 18t; \tag{3.4.1}$$

$$k_{42} = 37 + 96t; \leftrightarrow g_{42} = 7 + 18t; \tag{3.4.2}$$

$$q = 5$$

$$k_{51} = 53 + 192t; \leftrightarrow g_{51} = 5 + 18t; \tag{3.5.1}$$

$$k_{52} = 181 + 192t; \leftrightarrow g_{52} = 17 + 18t; \tag{3.5.2}$$

$$q = 6$$

$$k_{61} = 149 + 384t; \leftrightarrow g_{61} = 7 + 18t; \tag{3.6.1}$$

$$k_{62} = 277 + 384t; \leftrightarrow g_{62} = 13 + 18t, \tag{3.6.2}$$

где $t = 0,1,2,3 \dots$.

В обозначениях k_{ij} и g_{ij} индекс i- показывает степень двойки; индекс j принимает два значение 1 и 2, которые соответственно указывает на первую и вторую формулы арифметической прогрессии для вычисления чисел столбца.

Первая цифра в нумерации вышеприведенных формул показывает степень двойки, вторая цифра вид чисел, если вторая цифра нечетная, то число имеет вид $6m-1$, а если четная то имеет вид $6m+1$. Например, обозначение (3.2) формулы $k_3 = 13 + 48t$ означает, что числа получаемые этой формулой соответствует степень двойки 3, и являются «плюс» числами вида $6m+1$.

Из вышеприведенных формул арифметических прогрессии следует, что шаги арифметических прогрессии зависят от показателя степени двойки, и у каждой пары чисел вида k_{ij}^{-} и k_{ij}^{+} будет свой одинаковый шаг, шаг чисел g_{ij}^{-} и g_{ij}^{+} будет постоянным (равным 18).

Отметим, что выше приведены формулы только для чисел вида $6m \mp 1$, а формулы для чисел кратных 3 указаны в таблице 3.2. Для наглядности в Таблицах 3.1 и 3.2 ячейки, где расположены числа $6m-1$ и $6m+1$, маркированы соответственно желтым и зеленым цветом, а ячейки содержащие чисел кратных 3 окрашены коричневым цветом. В таблице 3.2 над каждым столбцом таблицы приведены формулы арифметической прогрессии для вышеуказанных видов чисел столбца.

Далее, учитывая, что формулы для чисел g_{ij} повторяются, вышеприведенные формулы арифметических прогрессий группируем и представим в нижеследующем виде:

$$\left.\begin{aligned} k_{31} &= 13 + 48t; \\ k_{51} &= 53 + 192t; \end{aligned}\right\} \quad g_1 = 5 + 18t; \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} k_{42} &= 37 + 96t; \\ k_{61} &= 149 + 384t; \end{aligned}\right\} \quad g_2 = 7 + 18t; \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} k_{11} &= 7 + 12t; \\ k_{32} &= 29 + 48t; \end{aligned}\right\} \quad g_3 = 11 + 18t; \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} k_{22} &= 17 + 24t; \\ k_{62} &= 277 + 384t; \end{aligned}\right\} \quad g_4 = 13 + 18t; \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} k_{12} &= 11 + 12t; \\ k_{52} &= 181 + 192t; \end{aligned}\right\} \quad g_5 = 17 + 18t; \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} k_{21} &= 1 + 24t; \\ k_{41} &= 5 + 96t; \end{aligned}\right\} \qquad g_6 = 1 + 18t; \ (6)$$

где $\quad t = 0,1,2,3 \ldots.$

Следует отметить, что числа полученные на основе вышепривденных формул для $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ образуют множество чисел вида $6n \mp 1$. Группирования соответствует закономерности приведенной в Теореме 3 (пункт 3.3), а именно утверждению:

При вычислении функции Коллатца на основе элементов множества $K = \{k | k = 6m \mp 1, m \in N\}$ *каждому элементу множества* $G_i = \{g | g = 6n \mp 1, n \in N\}$ *сопоставляются ровно два элемента множества* K.

Числа, получаемые по формулам (1.1;1.2; 2.1;2.2; 3.1; 3.2; 4.1; 4.2; 5.1; 5.2; 6.1; 6.2) образуют только подмножество чисел вида $6m \mp 1$, так как отсутствуют порождающие числа (5, 85, 341 и т.д.) и числа соответствующие другим интервалам степени двойки.

Если не разделять целые числа Таблиц 3.1 и 3.2 на три вида, то целые числа по столбцам таблиц обратного вычисления вычисляется по следующей формуле арифметической прогрессии

$$s_n = s_1 + 2^{q+1}(n-1), n = 1,2,3, \ldots \qquad (3.7)$$

Задача: Необходимо вычислить пятое целое число девятого столбца Таблицы 3.1. Ответ: Первое целое число данного столбца равно 853, показатель степени равен $q = 9$, порядковый номер числа $n = 5$, тогда

$$s_5 = 853 + 2^{10}(5-1) = 4949.$$

На основе первого целого числа строк Таблиц 3.1 и 3.2 можно вычислить другие целые числа любой выбранной строки, однако в этом случае формула будет сложней, чем формула чисел по столбцам таблиц, поскольку члены формулы целых чисел каждой строки вычисляется по разным формулам.

Отметим, что закономерности, описываемые формулой арифметической прогрессии, подразумевают их доказанность, так как любая арифметическая прогрессия элементарно доказывается применением методов математической индукции и математической логики.

Таблица 3.1. Обратное вычисление функции Коллатца по формуле $r = (d \cdot 2^q - 1)/3$, где $q = 0,1,2,3$ ....

d	***q=1-6***						***q=7-12***					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	0,333333	1	2,333333	5	10,33333	21	42,33333	85	170,3333	341	682,3333	1365
3	1,666667	3,666667	7,666667	15,66667	31,66667	63,66667	127,6667	255,6667	511,6667	1023,667	2047,667	4095,667
5	3	6,333333	13	26,33333	53	106,3333	213	426,3333	853	1706,333	3413	6826,333
7	4,333333	9	18,33333	37	74,33333	149	298,3333	597	1194,333	2389	4778,333	9557
9	5,666667	11,66667	23,66667	47,66667	95,66667	191,6667	383,6667	767,6667	1535,667	3071,667	6143,667	12287,67
11	7	14,33333	29	58,33333	117	234,3333	469	938,3333	1877	3754,333	7509	15018,33
13	8,333333	17	34,33333	69	138,3333	277	554,3333	1109	2218,333	4437	8874,333	17749
15	9,666667	19,66667	39,66667	79,66667	159,6667	319,6667	639,6667	1279,667	2559,667	5119,667	10239,67	20479,67
17	11	22,33333	45	90,33333	181	362,3333	725	1450,333	2901	5802,333	11605	23210,33
19	12,33333	25	50,33333	101	202,3333	405	810,3333	1621	3242,333	6485	12970,33	25941
21	13,66667	27,66667	55,66667	111,6667	223,6667	447,6667	895,6667	1791,667	3583,667	7167,667	14335,67	28671,67
23	15	30,33333	61	122,3333	245	490,3333	981	1962,333	3925	7850,333	15701	31402,33
25	16,33333	33	66,33333	133	266,3333	533	1066,333	2133	4266,333	8533	17066,33	34133
27	17,66667	35,66667	71,66667	143,6667	287,6667	575,6667	1151,667	2303,667	4607,667	9215,667	18431,67	36863,67
29	19	38,33333	77	154,3333	309	618,3333	1237	2474,333	4949	9898,333	19797	39594,33
31	20,33333	41	82,33333	165	330,3333	661	1322,333	2645	5290,333	10581	21162,33	42325
33	21,66667	43,66667	87,66667	175,6667	351,6667	703,6667	1407,667	2815,667	5631,667	11263,67	22527,67	45055,67
35	23	46,33333	93	186,3333	373	746,3333	1493	2986,333	5973	11946,33	23893	47786,33

Таблица 3.2. Вычисление чисел-предшественников формулами арифметической прогрессии

		3+12t	1+24t	13+48t	5+96t	53+192t	21+384t	213+768t	85+1536t	853+3072t	341+6144t	3413+12288t	1365+24576t
		7+12t	9+24t	29+48t	37+96t	117+192t	149+384t	469+768t	597+1536t	1877+3072t	2389+6144t	7509+12288t	9557+24576t
		11+12t	17+24t	45+48t	69+96t	181+192t	277+384t	725+768t	1109+1536t	2901+3072t	4437+6144t	11605+12288t	17749+24576t
g		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	1		1		5		21		85		341		1365
5	2	3		13		53		213		853		3413	
7	3		9		37		149		597		2389		9557
11	4	7		29		117		469		1877		7509	
13	5		17		69		277		1109		4437		17749
17	6	11		45		181		725		2901		11605	
19	1		25		101		405		1621		6485		25941
23	2	15		61		245		981		3925		15701	
25	3		33		133		533		2133		8533		34133
29	4	19		77		309		1237		4949		19797	
31	5		41		165		661		2645		10581		42325
35	6	23		93		373		1493		5973		23893	
37	1		49		197		789		3157		12629		50517
41	2	27		109		437		1749		6997		27989	
43	3		57		229		917		3669		14677		58709
47	4	31		125		501		2005		8021		32085	
49	5		65		261		1045		4181		16725		66901
53	6	35		141		565		2261		9045		36181	