==

証明の要点 (全空間におけるＮＳＩＶＰの時間大域可解性の時間変換解析)

時間大域可解性は、先験的評価として得られる解２乗ノルムの非増加性 $\|\boldsymbol{u}\|_2 \le \|\boldsymbol{a}\|_2$ を利用して、解の満たす積分方程式に基く解の上限評価を行うことにより、証明される。

但し、積分方程式 (1.3) とヘルダー不等式やヤング不等式の単純な組合せによる評価には限界があり、必要な結果は得られない。

$$(1.3)\quad \boldsymbol{u}_t = K_t{*}\boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}{*}{\cdot}\boldsymbol{u}_\tau\boldsymbol{u}_\tau)$$

例えば、単純に上式に $\|\boldsymbol{u}\|_2 \le \|\boldsymbol{a}\|_2$ を適用すると、形式的に次の不等式が得られる。

$$\|\boldsymbol{u}_t\|_q \le \|\boldsymbol{a}\|_q + C\|\boldsymbol{a}\|_2^2\int_0^t d\tau\, \|\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}\|_q$$

このとき因子 $\|\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}\|_q$ は $c(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}$ となり、$n \ge 3, q \in (n,\infty]$ の場合、同因子は τ での積分に関して発散し、この形式的な不等式は有効な評価式を与えない。

同論文では、時間変換積分方程式 (1.4) の利用により、このような発散を回避して有用な評価式を構成することにより、時間大域可解性が証明される。

$$(1.4)\quad \boldsymbol{u}_t^{\varPhi} = K_t^{\varPhi}{*}\boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}^{\varPhi}{*}\varphi_\tau{\cdot}\boldsymbol{u}_\tau^{\varPhi}\boldsymbol{u}_\tau^{\varPhi})$$

上式に $\|\boldsymbol{u}\|_2 \le \|\boldsymbol{a}\|_2$ を適用すると、次式が得られる。

$$\|\boldsymbol{u}_t^{\varPhi}\|_q \le \|\boldsymbol{a}\|_q + C\|\boldsymbol{a}\|_2^2\int_0^t d\tau\, \varphi_\tau\|\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}^{\varPhi}\|_q$$

このとき因子 $\|\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}^{\varPhi}\|_q$ は $c(\varPhi(t-\tau))^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}$ となり、$n \ge 3, q \in (n,\infty]$ であっても、適当な時間変換関数 $\varPhi = \varPhi(t)$ の採用により、$n \ge 3, q \in (n,\infty]$ の場合にも、同因子は τ が積分に関して発散せず、被積分因子 φ を考慮しても積分が有限確定となり、有用な評価式が得られる。

$$\|\boldsymbol{u}_t^{\varPhi}\|_q \le \|\boldsymbol{a}\|_q + Cc\|\boldsymbol{a}\|_2^2\int_0^t d\tau\, \varphi_\tau \varPhi_{t-\tau}{}^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}$$

==