FLORENTIN SMARANDACHE

Où se trouve la faute ?
(equations diophantiennes)

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”.
Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984.

Enoncé :

(1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $14x + 26y = -20$.

"Résolution" : La solution générale entière est :

$$\begin{cases} x = -26k + 6 \\ y = 14k - 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $15x - 37y + 12z = 0$.

"Résolution" : La solution générale entière est :

$$\begin{cases} x = k + 4 \\ y = 15k \\ z = 45k - 5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $3x - 6y + 5z - 10w = 0$.

"Résolution" : l'équation s'écrit :

$3(x - 2y) + 5z - 10w = 0$.

Puisque x, y, z, w sont des variables entières, il en résulte que 3 divise z et que 3 divise w. C'est-à-dire :

$z = 3t_1$ $(t_1 \in \mathbb{Z})$ et $w = 3t_2$ $(t_2 \in \mathbb{Z})$.

Donc : $3(x - 2y) + 3(5t_1 - 10t_2) = 0$ ou $x - 2y + 5t_1 - 10t_2 = 0$.

Alors : $$\begin{cases} x = 2k_1 + 5k_2 - 10k_3 \\ y = k_1 \\ z = 3k_2 \\ w = 3k_3 \end{cases} \quad \text{avec } (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3,$$

constitue la solution générale entière de l'équation.

Trouver la faute de chaque "résolution" ?

SOLUTIONS.

(1) $x = -26k + 6$ et $y = 14k - 4$ $(k \in \mathbb{Z})$, est une solution entière pour l'équation (parce qu'elle la vérifie), mais elle n'est pas la solution générale : puisque $x = -7$ et $y = 3$ vérifient l'équation, ils en sont une solution entière particulière, mais :

$$\begin{cases} -26k + 6 = -7 \\ 14k - 4 = 3 \end{cases} \quad \text{implique que } k = 1/2 \text{ (n'appartient pas à } \mathbb{Z}).$$

Donc on ne peut pas obtenir cette solution particulière de la "solution générale" antérieure.

La vraie solution générale est : $\begin{cases} x = -13k + 6 \\ y = 7k - 4 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$. (cf [1])

(2) De même, $x = 5$ et $y = 3$ et $z = 3$ est une solution particulière de l'équation, mais qui ne peut pas se tirer de la "solution générale" puisque : $$\begin{cases} k + 4 = 5 & \Rightarrow & k = -1 \\ 15k = 3 & \Rightarrow & k = 1/5 \\ 45k - 5 = 3 & \Rightarrow & k = 8/45 \end{cases}$$, contradictions.

La solution générale entière est : $\begin{cases} x = k_1 \\ y = 3\,k_1 + 12\,k_2 \\ z = 8\,k_1 + 37\,k_2 \end{cases}$

(avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$)

cf. [1] .

(3) L'erreur est que : "3 divise $(5z - 10\,w)$" n'implique pas que "3 divise z et 3 divise w". Si on le croit on perd des solutions, ainsi $(x,y,z,w) = (-5,0,5,1)$ constitue une solution entière particulière qui ne peut pas s'obtenir à partir de la "solution" de l'énoncé.

La résolution correcte est :

$3(x - 2y) + 5(z - 2w) = 0$, c'est-à-dire $3p_1 + 5p_2 = 0$,

avec $p_1 = x - 2y$ dans $\mathbb{Z}$, et $p_2 = z - 2w$ dans $\mathbb{Z}$.

Il en résulte : $\begin{cases} p_1 = -5k = x - 2y \\ p_2 = 3k = z - 2w \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'où l'on tire la solution générale entière :

$$\begin{cases} x = 2k_1 - 5k_2 \\ y = k_1 \\ z = 3k_2 + 2k_3 \\ w = k_3 \end{cases} \quad \text{avec } (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 .$$

[1] On peut trouver ces solutions en utilisant : Florentin SMARANDACHE -"Un algorithme de résolution dans l'ensemble des nombres entiers pour les équations linéaires".