АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

№ 8, вып. 2 СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК 1970

УДК 519.3 : 51 : 62—50

А. А. БОЛОНКИН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

1. Пусть состояние системы характеризуется элементом x, совокупность этих элементов образует множество X. На X определен функционал $I(x)$, ограниченный снизу. Связи, наложенные на систему, выделяют из этого множества некоторое подмножество допустимых состояний X^*, $X^* \subseteq X$. Традиционная постановка задачи оптимизации состоит в следующем: а) найти абсолютную минималь x^* функционала $I(x)$ на X^*. Наряду с данной задачей мы будем рассматривать также следующие задачи: б) найти подмножество $M \subset X^*$, содержащее абсолютную минималь $x^* \in X^*$; в) найти подмножество $N \subset X^*$ такое, что $I(x) \leqslant c$ на N, где c — некоторое число, $c \geqslant I(x^*)$; г) найти оценки снизу $I(x)$ на X^*. Для простоты предполагается, что x^* на X^* существует и единственно.

2. Введем множество $Y=\{y\}$ и определим на $X \times Y$ ограниченный функционал $\beta(x, y)$. Назовем его β-*функционалом*. Построим обобщенный функционал $\boldsymbol{I}(x, y)=I(x)+\beta(x, y)$. Зафиксируем y. Назовем нашу исходную задачу, отыскание x^* и $I(x^*)=\inf\limits_{X^*} I(x)=m$, задачей 1, а задачу отыскания абсолютной минимали $\bar{x}(y)$ и $\bar{\boldsymbol{I}}(\bar{x}(y)y)=\inf\limits_{X}[I(x)+\beta(x, y)]$ — задачей 2. Предполагается, что $\bar{x}(y)$ на $X \times Y$ существует.

Теорема 1. Пусть $X^*=X$, $\bar{x}(y)$ — абсолютная минималь задачи 2. Тогда: 1) абсолютная минималь задачи 1 находится в множестве $M=\{x:\beta(x, y) \geqslant \beta(\bar{x}(y), y), y \in Y\}$; 2) множество $N=\{x : \boldsymbol{I}+I \leqslant \bar{\boldsymbol{I}}+\boldsymbol{I}, y \in Y\}$ содержит такие или лучшие решения (т. е. на $N I(x) \leqslant I(\bar{x})$); 3) множество $P=\{x : \beta(x, y) \leqslant \beta(\bar{x}(y), y), y \in Y\}$ содержит такие или худшие решения (т. е. на $P\, I(x) \geqslant I(\bar{x})$).

Доказательство. 1.3. Вычитая неравенства $I(x)+\beta(x, y) \geqslant I(\bar{x}(y))+\beta(\bar{x}(y), y)$ и $\beta(x, y) \leqslant \beta(\bar{x}(y)y)$, получим $I(x) \geqslant I(\bar{x})$ на P. Отсюда очевидным образом следует п. 1 теоремы. 2. Вычитая неравенства $\boldsymbol{I}+I \leqslant \bar{\boldsymbol{I}}+\bar{I}$ и $\boldsymbol{I} \ngeq \bar{\boldsymbol{I}}$, получим $I(x) \leqslant I(\bar{x})$ на N. Теорема 1 доказана.

Следствия. 1. Если $X^* \subseteq P$, то $\bar{x}$ — является абсолютной минималью задачи 1. В этом случае $M=\{\bar{x}\}$. 2. Теорема 1 верна и для случая $X^* \neq X$, когда M, N, P содержат элементы из X^*. Если же $X^* \cap M=\varnothing$, то $I(\bar{x})$ есть оценка снизу $I(x)$ на X^* (ибо в этом случае $X^* \subseteq P$).

Зависимость множеств M, N, P от y может быть использована для изменения «размеров» этих множеств.

Из теоремы 1 вытекает **алгоритм 1** (метод выделения подмножества, содержащего абсолютную минималь). Задаемся $\beta_i(x, y)$ таким, чтобы задача 2 решалась просто. Находим множества M_i. Тогда $M = \prod_i M_i$ есть множество, содержащее x^*.

Алгоритм 2 (метод спуска по множеству лучших решений). Берем любую точку x_1 из X^* и конструируем вспомогательный функционал $I_1(x)$ таким образом, чтобы эта точка была его минималью. Находим множество таких или лучших решений N_1. Берем из этого множества точку x_2, по тому же принципу строим $I_2(x)$, находим множество N_2 и т. д. Очевидно, что $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$. Предположим, что в результате множество N_i выродилось в точку. Обозначим ее x_N.

Теорема 2. Пусть $I(x)$, $I(x)$ — непрерывны и дифференцируемы (по Фреше) на X^*. Если $N = x_N$, то точка x_N является стационарной точкой функционала $I(x)$ на X^*.

Доказательство. Точка x_N — минималь $I(x)$, поэтому из непрерывности и дифференцируемости $I(x)$ следует, что $I'(x_N)=0$. Так как x_N — единственная точка N на X^*, то на X^* имеет место неравенство $I(x) + I(x) \geqslant I(x_N) + I(x_N)$, т. е. $I_1(x_N) = \inf\limits_{X^*} [I(x) + I(x)]$.

Вследствие непрерывности и дифференцируемости $I(x)$, $I(x)$ получаем $I'(x_N) + I'(x_N) = 0$. Учитывая, что $I'(x_N) = 0$, находим, что и $I'(x_N) = 0$. Теорема доказана.

Преимущество спуска по множеству лучших решений по сравнению с градиентным методом в том, что можно шагать крупно, не рискуя получить худших значений функционала.

Теорема 3. Пусть $\beta(x, y)$ определено и ограничено на $X \times Y$. Имеет место оценка снизу: $I(x) \geqslant \sup\limits_{Y} [I(\bar{x}(y)) - \beta(\bar{x}(y), y) - \sup\limits_{X} \beta(x, y)]$ на $X^* \times Y$.

Доказательство. Складывая неравенства $I + \beta \geqslant \bar{I} + \bar{\beta}$ и $-\beta \geqslant -\sup\limits_{X} \beta$ и максимизируя эту сумму на Y, получим искомую оценку.

Алгоритм 3 (метод совмещения экстремумов). Берем некоторый ограниченный функционал $\beta(x, y)$, где y — элемент множества Y. Решаем задачу $\inf\limits_{X^*} [I(x) + \beta(x, y)]$, находим минималь $\bar{x}_1 = \bar{x}_1(y)$. Из условия $\sup\limits_{X^*} \beta(x, y)$ находим $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(y)$. Приравниваем $\bar{x}_2(y) = \bar{x}_2(y)$ и из полученного уравнения (уравнения совмещения экстремумов) находим корни y_i. Эти корни определяют минималь задачи 1: $\bar{x} = \bar{x}_1(y_i) = \bar{x}_2(y_i)$. В самом деле, множество P в этом случае будет совпадать с X^*, ибо $\beta(x, y_i) \leqslant \beta(\bar{x}, y_i)$ всюду на X^* и применимо следствие 1.

3. Частным случаем β-функционала является *α-функционал*, определенный на $X \times Y$, и такой, что $\alpha(x, y) = 0$ на X^* при $\forall y \in Y$.

Теорема 4. Пусть $\alpha(x, y) = 0$ на X^* при $\forall y \in Y$ и существует $x^* \in X^*$. Для того чтобы $\bar{x}(y_1)$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^*, достаточно существования $\alpha(x, y)$ и y_1 таких, что

$$1)\ I(\bar{x}(y_1), y_1) = \inf [I(x) + \alpha(x, y)],\ x \in X, \tag{1}$$

$$2)\ \bar{x}(y_1) \in X^*,\ y_1 \in Y.$$

Доказательство. Так как $\bar{x}(y_1) \in X^*$, то $\alpha(\bar{x}(y_1), y_1) = 0$ и $I(\bar{x}(y_1), y_1) = \inf\limits_{X} [I(x) + \alpha(x, y)] = \inf\limits_{X^*} I(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. α-Функционалы существуют, и число их бесконечно. Утверждение теоремы очевидно, так как $\alpha(x, y)$ на $X \times Y$ может быть задано бесконечным числом способов.

Теорема 6. Если в (1) $\bar{x} \notin X^*$, то получаем оценку снизу величины функционала $I(x)$ на X^* : $I(\bar{x}(y), y) \leqslant I(x)$ при $\forall y \in Y$. Оценка следует из $\alpha(x, y)=0$ на X^* при $\forall y \in Y$ и $X^* \subset X$. В частности, можно взять $\alpha=\alpha(x)$. Тогда из теоремы 4 получаем лемму [2].

Из теоремы 4 вытекает **алгоритм 4** (метод подбора α). **Берем** ограниченный снизу функционал α, определенный на $X \times Y$ (или X). Решаем задачу 2. Если $\bar{x} \in X^*$, то мы получили минималь задачи 1, если $\bar{x} \notin X^*$, то мы получили оценку снизу величины функционала и информацию о множествах M, N, P (теорема 1).

4. Алгоритм 4 неудобен тем, что он оставляет открытым вопрос о подборе $\alpha(x)$ такого, чтобы $\bar{x} \in X^*$. Следующая ниже теорема дает алгоритм, в значительной мере лишенный этого недостатка.

Теорема 7 (принцип оптимальности). 1) Пусть $\alpha(x, y)=0$ только на X^* при $\forall y \in Y$. 2) $\alpha(x, y)$ таково, что для $\forall x \in (X - X^*)$ найдется $y \in Y$ такое, что $I(x)+\alpha(x, y)>m$. 3) Существует пара $\bar{x}, \bar{y}$, удовлетворяющая условию

$$I(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{Y} \inf_{X} [I(x) + \alpha(x, y)]. \qquad (2)$$

4) $I(\bar{x}, y) \leqslant I(\bar{x}, \bar{y})$ на Y. Тогда: 1) элемент $\bar{x}$ принадлежит X^*; 2) $\bar{x}$ является абсолютной минималью задачи 1.

Доказательство. 1) Пусть $\bar{x} \notin X^*$. Из теоремы 6 имеем $\inf I \leqslant m$. Так как это неравенство справедливо при любом $y \in Y$, то $I(\bar{x}, \bar{y}) = \sup\limits_{Y} \inf\limits_{X} I \leqslant m$ и $I(\bar{x}, y) \leqslant I(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant m$ на Y. Но это неравенство противоречит п. 2 условия теоремы. Следовательно, $\bar{x} \in X^*$. 2) Из $\bar{x} \in X^*$ и $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ следует, что $I(\bar{x}, \bar{y}) = \inf I(x)$, $x \in X^*$, т. е. $x^* = \bar{x}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть имеется α-функционал и элемент $\bar{x} \in X^*$, удовлетворяющие (2). Тогда любой элемент $x_1 \in X^*$ удовлетворяющий (2), есть абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* и любая абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* удовлетворяет условию (2).

Доказательство. Из $x_1 \in X^*$ и (2) следует $I(x_1) = \inf\limits_{X^*} I(x) = I(x_1)$. Обратно: пусть x_1 — абсолютная минималь $I(x)$ на X^*. Из $x_1 \in X^*$ получаем $I(x_1) = \inf\limits_{X^*} I(x) = I(\bar{x}, \bar{y}) = \sup\limits_{Y} \inf\limits_{X} [I(x) + \alpha(x, y)]$.

Замечание 2. Можно показать, что $I(\bar{x}, \bar{y})$, удовлетворяющее теореме 7, является седловой точкой $I(x, y)$ и наоборот [3, стр. 25].

Аналогично теореме 5 можно показать, что существует бесконечное число α-функционалов, удовлетворяющих теореме 7.

Теорема 8. Пусть $\alpha(x, y)=0$ только на X^* при $\forall y \in Y$. Тогда (2) дает оценку снизу $I(x)$ на X^*.

Доказательство. $I(\bar{x}(y), y) = \inf\limits_{X} I(x, y) \leqslant m$, при $\forall y \in Y$. Следовательно, $\sup\limits_{Y} I(\bar{x}(y), y) \leqslant m$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 7 вытекает **алгоритм 5:** чтобы найти x^*, надо решить задачу (2) (и проверить условия 1—4 теоремы 7).

5. Рассмотрим обычную задачу оптимизации, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями [1],

$$I = F(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x, u)\,dt, \quad \dot{x}_i = f_i(t, x, u), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Пусть $u \in U$, $x \in G(t)$, t_1, t_2 заданы. Обозначим через D множество непрерывных кусочно-дифференцируемых функций $x(t)$, через V множество кусочно-непрерывных (с разрывами I-го рода) функций $u(t)$, через Q множество допустимых пар $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих уравнениям (3). Возьмем дифференцируемую функцию $\psi(t, x, y)$ и построим конструкции $A = F + \psi|_1^2$, $B = f_0 - \psi_{x_i} f_i - \psi_t$. Обозначим W множество непрерывных кусочно-дифференцируемых n-мерных вектор-функций $y(t)$ с $y \in Y(t)$. Из теоремы 7 следует

Теорема 9. Пусть существует непрерывная дифференцируемая функция $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющая условиям: 1) для $\forall x, u \notin Q$ найдется $y \in W$ такая, что $I > m$;*

$$2)\ I(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) = \sup_{W}\Big(\inf_{G_1\times G_2} A + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{G\times U} B\,dt\Big);\ 3)\ \bar{x}(t) \in D,\ \bar{u}(t) \in V; \tag{4}$$

4) $I(\bar{x}, \bar{u}, y) \leqslant I(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ на W. Тогда $\bar{x}\,\bar{u} \in Q$ и $\bar{x}, \bar{u}$ является абсолютной минималью функционала I (3) на Q.

Замечание 3. Условие 2 теоремы 9 можно заменить более жесткими:

$$2\sup_{Y_1\times Y_2}\inf_{G_1\times G_2} A,\quad \sup_{Y}\inf_{G\times U} B \text{ на } (t_1, t_2); \tag{4'}$$

4) для сильного относительного минимума достаточно вместо п. 2 (4) выполнения $\max\limits_{y_1, y_2}\min\limits_{x_1, x_2} A$, $\max\limits_{y}\min\limits_{x}\inf\limits_{U} B$; 5) если t_1 или t_2 не фиксированы, то последнее требование в (4′) заменяется условием $\sup\limits_{Y}\inf\limits_{G\times U} B = 0$ на (t_1, t_2); 6) для выполнения $I(\bar{x}, \bar{u}, y) \leqslant I(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ достаточно выполнения $A(\bar{x}, y_\cdot) \leqslant A(\bar{x}, \bar{y})$, $B(\bar{x}, \bar{u}, y) \leqslant B(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$.

Из теоремы 8 следует **теорема 10.** Пусть $\psi(t, x, y)$ — непрерывная дифференцируемая функция. Имеют место оценки снизу:

$$1)\ I \geqslant \sup_{W}\Big(\inf_{G_1\times G_2} A + \int_{t_1}^{t_2}\inf_{G\times U} B\,dt\Big),\quad 2)\ I \geqslant \sup_{Y_1\times Y_2}\inf_{G_1\times G_2} A + \int_{t_1}^{t_2}\sup_{Y}\inf_{G\times U} B\,dt. \tag{5}$$

6. Для решения задачи п. 2 (4), можно использовать, в частности, следующий **алгоритм 5.** Задаемся $\psi^{(1)}(t, x, y)$ и решаем задачу

$$\inf_{x, u}\,[f_0 - \psi^{(1)}_{x_i} f_i - \psi^{(1)}_{y_i}\dot{y}_i - \psi^{(1)}_t] = B^{(1)}(t, y, \dot{y}),$$

$$\inf_{x_1, x_2}(F + \psi^{(1)}_2 - \psi^{(1)}_1) = A^{(1)}(y_1, y_2). \tag{6}$$

При этом находим $\bar{u} = \bar{u}(t, x, y)$, $\bar{x} = \bar{x}(t, y, \dot{y})$. Рассматриваем $I' = A^{(1)}(y_1, y_2) + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}(t, y, v)\,dt$ как новый функционал для системы $\dot{y}_i = v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где новые управления $v \in V_1(t, y)$ — мно-

---

* Это требование можно заменить более простым: $\psi_{x_i}(t, x, y)$ неограничены сверху по y при $\forall x \in G$.

жество, являющееся следствием U, G и вида $f_1(t, x, u)$. Еще раз задаемся $\psi^{(2)}(t, x)$ и решаем задачу

$$\sup_{y, v \in V} (B^{(1)} - \psi_y^{(2)} v - \psi_t^{(2)}) = B^{(2)}(t), \quad \sup_{y_1, y_2} (A^{(1)} + \psi_2^{(2)} - \psi_1^{(2)}) = A^{(2)}. \quad (7)$$

Найденные из (6) $\bar{y}(t)$, $\bar{v}(t)$ вставляем в $\bar{x}(t, y, \dot{y})$, $\bar{u}(t, \bar{x}, y)$, получаем $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$. Если $\bar{x}, \bar{u} \in Q$ и $x(t_1), x(t_2) \in G_1 \times G_2$ то полученное решение есть минималь задачи 1, если нет, то $I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ дает оценку снизу функционалу I (3).

Если в (7) взять $\psi^{(2)} = \psi^{(2)}(t, y, z)$, $z \in Z$, то $B^{(2)} = B^{(2)}(t, z, \dot{z})$, $A^{(2)} = A^{(2)}(z_1, z_2)$ и выражение $I^2 = A^2 + \int_{t_1}^{t_2} B^{(2)}(t, z, w)\, dt$ можно рассматривать как новый функционал для системы $\dot{z}_l = w_l$ и т. д.

Эта процедура может быть продолжена неограниченное число раз. Решение любой из этих задач позволяет без всяких интеграций найти решение исходной задачи.

7. Рассмотрим численную реализацию основного условия принципа оптимальности (4) для задачи (3). Пусть t_1, t_2, $x(t_1)$, $x(t_2)$ заданы. Положим $\psi - y_i x_i$ и составим обобщенный функционал $I(x, y, u) = x_i y_i |_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - y_i f_i - \dot{y}_i x_i)\, dt = A + \int_{t_1}^{t_2} B\, dt$. Исключим u из B при помощи условия $B = \inf_U B(t, x, u, y, \dot{y})$, получим $\bar{u} = \bar{u}(t, x, y)$ и $\hat{I}(x, y) = A + \int_{t_1}^{t_2} \hat{B}(t, x, y, \dot{y})\, dt$. Пусть $\hat{I}(x, y)$ — непрерывная и дифференцируемая функция x, y. Зададимся некоторой траекторией $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям с $x \in G$ и непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией $\tilde{y}(t)$, подставим их в $\hat{I}$ и вычислим вариацию функционала $\hat{I}$ относительно $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$:

$$\delta \hat{I} = \delta A + \int_{t_1}^{t_2} (B_{x_i} \delta x_i + B_{u_j} \bar{u}_{x_i}^j \delta x_i B_{y_i} \delta y_i + B_{u_j} \bar{u}_{y_i}^j \delta y_i + B_{\dot{y}_i} \delta \dot{y}_i)\, dt. \quad (8)$$

Слагаемые $B_{u_j} \bar{u}_{x_i}^j = B_{u_j} \bar{u}_{y_i}^j = 0$, ибо в открытой области $B_{u_j} \equiv 0$, а на границе $\bar{u}_{x_i}^j = \bar{u}_{y_i}^j \equiv 0$, так как граница $U(t)$ не зависит ни от x, ни от y. $\delta A = y_i \delta x_i |_1^2 + x_i \delta y_i |_1^2$. Последнее слагаемое под интегралом в (8) проинтегрируем по частям: $\int_{t_1}^{t_2} B_{\dot{y}_i} \delta \dot{y}_i\, dt = - x_i \delta y_i |_1^2 - \int_{t_1}^{t_2} \dot{B}_{\dot{y}_i} \delta y_i \cdot dt$.

С учетом этих замечаний запишем выражение (8) в виде $\delta \hat{I} = y_i \delta x_i |_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} [B_{x_i} \delta x_i + (B_{y_i} - \dot{B}_{\dot{y}_i}) \delta y_i]\, dt$, где $B_{x_i} \equiv - \dot{y}_i - H_{x_i}$, $B_{\dot{y}_i} - \dot{B}_{\dot{y}_i} \equiv \dot{x}_i - f_i$, $\delta x_i|_1 = \delta x_i|_2 = 0$, так как концы $x(t)$ фиксированы, а $H = y_i f_i - f_0$. Положим (по i — не сумма):

$$\delta x_i = - \tau_{i1} B x_i = \tau_{i1} (\dot{y}_i + H_{x_i}), \quad \delta y_i = \tau_{i2} (\dot{x}_i - f_i), \quad (9)$$

где $\tau_{i1} = c > 0$ на (t_1, t_2), $\tau_{i1} = 0$, когда $t = t_1$, $t = t_2$. $\tau_{i2} = c > 0$ на $[t_1, t_2]$. Новая траектория будет такой:

$$x_{i, \beta+1} = x_{i, \beta} + \delta x_{i, \beta}, \quad y_{i, \beta+1} = y_{i, \beta} + \delta y_{i, \beta}. \quad (10)$$

Здесь $\beta=1, 2, \ldots$ — номер итерации. Она может быть взята в качестве новой опорной траектории и т. д. Известно, что, если шаг τ выбрать достаточно малым, то процесс (9), (10) приводит в седловую точку функционала (3). Отсюда следует (4), т. е. точка пара $\bar{x}, \bar{u} \in Q$ является, согласно замечаниям 2, 4, сильной относительной минималью функционала (4).

Если конец $x_i(t_2)$ свободен, то полагаем соответствующие $y_i(t_2)=0$, $\tau_{i1}(t_2)=\tau$, а $\tau_{i2}(t_2)=0$. Аналогично для $x_i(t_1)$. Если имеются ограничения на фазовые координаты вида $\Gamma_{1i}(t) \leqslant x_i \leqslant \Gamma_{2i}(t)$, то значения $x_{i,\beta}(t)$, выходящие за границу, следует полагать равными граничным значениям.

8. Рассмотрим метод градиентного спуска в пространстве состояний для задачи (3). Заменим задачу (3) задачей

$$\hat{I}(x, u, a)=\int_{t_1}^{t_2}\left[f_0+\frac{a_i}{2}(v_i-f_i)^2\right]dt,\ \dot{x}_i=v_i,\ i=1, 2, \ldots, n, \quad (11)$$

где $a_i>0, t_i, t_2, x(t_1), x(t_2)$ заданы. Нетрудно видеть, что добавка в (11) представляет собой α-функционал, ибо на допустимых кривых $v_i=f_i$ и $\alpha\equiv 0$. Положим $\psi=p_i(t)\,x_i$. Тогда

$$I=p_i\,x_i|_1^2+\int_{t_1}^{t_2}\left[f_0+\frac{a_i}{2}(v_i-f_i)^2-p_i v_i-\dot{p}_i x_i\right]dt=$$

$$=p_i\,x_i|_1^2+\int_{t_1}^{t_2}B\,dt. \quad (12)$$

Исключим u из B при помощи условия $\bar{B}=\inf\limits_U B$, получим $\bar{u}^j=u^j(t, x, y)$.

Зададимся некоторой траекторией $\widetilde{x}(t)$, удовлетворяющей заданным краевым условиям с $x\in G$, подставим ее в (12) и вычислим вариацию δI относительно $\widetilde{x}(t)$, учитывая, что концы $x(t)$ фиксированы. Получим

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}(B_{v_i}\delta v_i+B_{u_j}\bar{u}^j_{v_i}\delta v_i+B_{x_k}\delta x_k+B_{u_j}\bar{u}^j_{x_i}\delta x_i)\,dt. \quad (13)$$

В силу тех же причин, что и в п. 1, $B_{u_j}\bar{u}^j_{v_i}=B_{u_j}\bar{u}^j_{x_i}\equiv 0$. Выбираем $p_i(t)$ так чтобы

$$B_{v_i}\equiv a_i(v_i-f_i)-p_i=0,\quad i=1, 2, \ldots, n. \quad (14)$$

Тогда вариацию (13) можно переписать:

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}B_{x_k}\delta x_k\,dt,\ \text{где}\ B_{x_k}\equiv\frac{\partial f_0}{\partial x_k}-p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\dot{p}_k,\ k=1,2,\ldots, n. \quad (15)$$

Положим в (15) $\delta x_k=-\tau_k B_{x_k}$, где $\tau_k(t)>0$ на (t_1, t_2) и $\tau_k(t_1)=\tau_k(t_2)=0$. Тогда (15) можно переписать: $\delta I=-\int_{t_1}^{t_2}\tau_k(t)\,B^2_{x_k}\,dt$.

Отсюда видно, что, выбирая $\tau_k(t)$ с достаточно малым $\max\limits_t \tau_k(t)$, мы уменьшаем величину функционала. Новая траектория такова:

$x_{k,\beta+1} = x_{k,\beta} + \delta x_{k,\beta}$, $\beta = 1, 2, \ldots$, где β — номер итерации. Если конец $x_i(t_2)$ свободен, то полагаем соответствующее $\tau_i(t_2) = \text{const} > 0$. В случае ограничений вида $\Gamma_{1i}(t) \leqslant x_i \leqslant \Gamma_{2i}(t)$ значения $x_{k,\beta}(t)$, выводящие за границу, следует брать равными граничным значениям. Доказано, что при $a_i \to \infty$ этот метод приводит в сильный относительный минимум.

9. Пусть $I(x, a)$ зависит от параметра a, $a \in A$. Назовем задачей оптимального синтеза задачу отыскания $x^*(a)$. Любую зависимость $x(a)$ такую, что $x(a) \in X^*(a)$, назовем *синтезом*. Пусть $\alpha(x, a)$ есть α-функционал при $\forall a \in A$ и дано множество синтезов $\{x(a)\} = \Omega$ и множество $\{\alpha(a)\} = \Lambda$. Поставим задачу — найти оценки для синтеза. Очевидно, что для любых фиксированных $\alpha \in \Lambda$ и $x(a) \in \Omega$ имеем оценку $\Delta = \sup\limits_{A} [I(x(a), a) - \inf\limits_{X} \boldsymbol{I}(x, a)]$, где $\boldsymbol{I} = I + \alpha$. Стремясь эту оценку минимизировать на $\Lambda \times \Omega$, получим

$$\Delta = \inf_{\Lambda\times\Omega} \sup_{A} [I(x(a), a) - \inf_{X} \boldsymbol{I}(x, a)], \quad \Delta \geqslant 0. \tag{16}$$

Применим оценку (16) к задаче (3). Пусть мы задались некоторым семейством синтезов $u = u(t, x, b)$, где b — параметр, приводящий систему (3) в заданные граничные условия на правом конце. Зададимся функциями $\psi_1(t, x, y), \psi_2(t, x, y)$ и построим, как обычно, функции $B(t, x, y, \dot{y}, u(t, x, b))$ и $B(t, x, y, \dot{y}, u)$ соответственно, а также $\widetilde{A} = F + \psi_1 \Big|_2^1$, $A = F + \psi_2 \Big|_1^2$. Из (16) следует: для задачи (3) имеет место оценка синтеза

$$\Delta = \inf_{y_1, y_2} \sup_{G_1} (\sup_{G_2} \widetilde{A} - \inf_{G_2} A) + \inf_{W} \int_{t_1}^{t_2} (\inf_{b} \sup_{G} \widetilde{B} - \inf_{G\times U} B)\, d\,t. \tag{17}$$

Огрубляя ее, найдем

$$\Delta = \inf_{y_1, y_2} \sup_{G_1} (\sup_{G_2} \widetilde{A} - \inf_{G_2} A) + \int_{t_1}^{t_2} (\inf_{b\times V_1} \sup_{G} \widetilde{B} - \inf_{G\times U} B)\, d\,t. \tag{18}$$

Московский авиационный технологический институт

Поступила в редакцию 4/VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Болонкин. Сб. «Сложные системы управления». Киев, «Наукова думка», 1965.
2. В. Ф. Кротов. АиТ, 1962, № 12.
3. Д. М. Кинси. Введение в теорию игр. Физматгиз, 1960.