A deflexão da luz pelo Sol. O cálculo newtoniano
(The deflection of light by the Sun. The Newtonian calculation)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – Calculamos o ângulo de deflexão sofrido pela luz ao passar nas proximidades de uma grande massa *M*, o Sol, primeiramente usando a mecânica de Newton, e depois a Relatividade Geral. Verificamos que com a solução obtida na Relatividade Geral para o movimento da luz ocorre colisão da luz com o Sol, antes desta tangenciá-lo, o que não ocorre com a teoria de Newton. Vimos também que para grandes excentricidades, num movimento hiperbólico, a energia total *E* do fóton segundo a Mecânica Newtoniana tende à famosa equação de Einstein: $E = mc^2$. Sugerimos mais verificações experimentais do ângulo de deflexão da luz das estrelas, tanto na decorrência de um período de 6 meses, sem eclipse algum, quanto também na comparação das posições das estrelas na ocorrência de um eclipse em relação a data próxima à ocorrência deste eclipse.

ABSTRACT – We calculate the angle of deflection suffered by the light passing near a large mass *M*, the Sun, first using Newtonian Mechanics, and then the General Relativity. We found that with the solution obtained in General Relativity to the movement of light occurs collision of light with the Sun, before it touches it, which does not occur with Newton's theory. We have also seen that for large eccentricities, in a hyperbolic motion, the total energy *E* of the photon according to Newtonian Mechanics tends to Einstein's famous equation $E = mc^2$. We suggest more experimental checks of starlight deflection angle, both due to a period of 6 months without any eclipse, as in the comparison of the positions of the stars in the occurrence of an eclipse in relation to the early date of the occurrence of this eclipse.

Palavras-chave: deflexão, luz, Sol, Johann Georg von Soldner, mecânica newtoniana, Newton, relatividade geral, hipérbole, excentricidade, energia total, equação de Einstein, eclipse solar.

Keywords: deflection, light, sun, Johann Georg von Soldner, Newtonian mechanics, Newton, general relativity, hyperbole, eccentricity, total energy, Einstein's equation, solar eclipse.

1. Introdução

Johann Georg von Soldner (1776-1833), físico, matemático e astrônomo alemão, no início do século XIX calculou a deflexão da luz ao passar pelo Sol usando as teorias de Newton da gravitação e corpuscular da luz e obteve o valor de 0'',84[1]. Também calcularemos o valor desta deflexão, mas não repetiremos aqui os cálculos de Soldner. Aplicaremos as regras fundamentais da gravitação newtoniana, considerando que a luz é composta por fótons de massa m (a matéria da luz), e estes fótons não interagem entre si, com força alguma. Na realidade calcularemos o movimento provocado em um único elemento deste grupo de fótons, admitindo que os demais fótons emitidos pelo corpo luminoso que produziu o raio de luz, uma estrela distante, obedecem todos ao mesmo movimento. Os diversos raios de luz também não interagem entre si, outra simplificação do modelo (não só newtoniano; estas simplificações também são usadas na Relatividade Geral). Como sabemos que a luz é uma onda eletromagnética, um campo elétrico e magnético oscilantes no tempo, e o Sol evidentemente possui um considerável campo eletromagnético, o efeito exato produzido pelo Sol na luz das estrelas deveria levar em consideração também a influência eletromagnética, mas não levaremos em consideração aqui esta componente. Estamos interessados neste momento apenas na influência gravitacional.

O cálculo da deflexão sob a influência de uma massa M se fará então admitindo que a luz é composta por fótons de massa m e o movimento deles é dado por uma seção cônica (hipérbole), estando a massa M no foco desta cônica. Resolve-se então um problema de Kepler, um cálculo orbital, no caso especial de que a energia E é maior que zero, a excentricidade é maior que 1, e assim o movimento não é periódico, a luz não entra em órbita elíptica ao redor de M (o Sol, por exemplo), como se fosse um planeta, mas segue ao infinito ao passar por M.

Seguindo o famoso *Mecânica*, de Landau & Lifschitz[2], se $E > 0$ a excentricidade $e > 1$, i.e., a trajetória da luz será uma hipérbole que contorna o centro do campo (foco). A distância do periélio ao centro é

$$r_{min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1), \tag{1}$$

onde

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E} \tag{2}$$

é o "semi-eixo" da hipérbole (a meia distância entre os vértices dos dois ramos da hipérbole) e

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} = \text{parâmetro da órbita} \tag{3.1}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \text{excentricidade} \tag{3.2}$$

$$\alpha = GMm \tag{3.3}$$

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} = -\frac{GMm}{r} = \text{energia potencial} \tag{3.4}$$

$$E = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{m\dot{r}^2}{2} = \text{energia total} \tag{3.5}$$

$$L = mr^2\dot{\varphi} = cte. = \text{momento angular} \tag{3.6}$$

A equação da trajetória em coordenadas polares, considerando o foco na origem, é

$$\frac{p}{r} = 1 + ecos\varphi, \tag{4}$$

tal como no movimento elíptico, onde a escolha da origem de φ foi feita de modo que $\varphi = 0$ corresponda ao periélio da órbita, i.e., ao ponto mais próximo do foco (e também do centro).

2. O cálculo clássico

2.1 O cálculo das constantes do movimento

Consideremos o movimento da luz no plano XY e que o centro de *M*, imóvel, está no foco da hipérbole (H) e também na origem O do sistema, o ponto (0, 0). Os focos de H estão sobre o eixo horizontal X, e nos interessará, evidentemente, apenas um dos ramos de H, o que tem o foco em O. A estrela que emite a luz está numa posição muito distante de *M*, emitindo luz em todas as direções, mas o raio (fóton) que analisaremos estará se movendo sobre H, sendo assim "capturado" pela força gravitacional de *M* (o Sol) numa posição arbitrária qualquer de H, mas por hipótese ainda muito distante de *M*. Consideraremos também, por simplicidade, que H cruza o centro da estrela.

Para calcular as constantes de momento angular *L* e energia total *E* vemos que para $\varphi = 0$, onde $r = r_{min}$, temos a velocidade radial $\dot{r} = 0$, donde, de (3.6) vem

$$L = mr_{min}^2\dot{\varphi}_{max} = mcr_{min}, \tag{5}$$

sendo

$$\dot{\varphi}_{max} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\Big|_{\varphi=0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y / r_{min}}{\Delta y / c} = \frac{c}{r_{min}}, \tag{6}$$

e de (3.5), usando (5), temos

$$E = -\frac{GMm}{r_{min}} + \frac{L^2}{2mr_{min}^2} = -\frac{GMm}{r_{min}} + \frac{mc^2}{2}. \tag{7}$$

Para que o movimento seja hiperbólico devemos ter $E > 0$, i.e.,

$$\frac{mc^2}{2} > \frac{GMm}{r_{min}} \tag{8}$$

ou

$$r_{min} > 2\frac{GM}{c^2}, \tag{9}$$

o raio de Schwarzschild, que para a massa do Sol $M = 1{,}9887973 \times 10^{30}$ kg, constante gravitacional $G = 6{,}674287 \times 10^{-11}$ $\text{m}^3\ \text{kg}^{-1}\ \text{s}^{-2}$ e velocidade da luz $c = 299\ 792\ 458$ m/s dá $r_{min} > 2953{,}82$ m.

De (1) e usando (3.1) e (5) obtemos

$$r_{min} = \frac{p}{e+1} = \frac{L^2}{(e+1)\, m\alpha} = \frac{c^2 r_{min}^2}{(e+1)\, GM} \tag{10}$$

ou

$$r_{min} = \frac{GM}{c^2}\ (e+1), \tag{11}$$

para $e > 1$, conforme (9).

Usando (11) em (5) e (7) obtemos, respectivamente,

$$L = \frac{GMm}{c}(e+1) \tag{12}$$

e

$$E = mc^2\left(\frac{e}{e+1}\right). \tag{13}$$

Isolando o valor de $(e + 1)$ em (12) e (13) podemos encontrar o valor da excentricidade e:

$$e + 1 = \frac{c}{GMm} L = \frac{mc^2}{E} e, \tag{14}$$

ou seja,

$$e = \frac{c}{GMm} L \frac{E}{mc^2} = \frac{c^2 r_{min}}{GM} \frac{e}{e+1}, \tag{15}$$

usando (5) e novamente (13), donde

$$e + 1 = \frac{c^2 r_{min}}{GM}, \tag{16}$$

e finalmente

$$e = \frac{c^2 r_{min}}{GM} - 1. \tag{17}$$

Para que a excentricidade obtida em (17) corresponda a uma hipérbole é necessário que $e > 1$, ou seja,

$$\frac{c^2 r_{min}}{GM} > 2, \tag{18}$$

conforme (9).

No caso que nos interessa no momento, o cálculo do ângulo de deflexão da luz na passagem pelo Sol, ao fazermos r_{min} igual ao raio R_S do Sol, $r_{min} = R_S = 6{,}960 \times 10^8$ m, obtemos de (17) o valor $e \approx 471253$, uma excentricidade bastante alta, bem maior que 2.

Interessante observar que para grandes excentricidades, como é o caso no presente estudo, a energia total E em (13) tende à famosa equação de Einstein: $E = mc^2$.

2.2 O ângulo de deflexão

Calculadas as constantes do movimento vamos à questão que é a de mais difícil entendimento: a obtenção do ângulo de deflexão da luz.

Quanto mais afastado da origem O do sistema, i.e., do centro de M (o Sol), mais o movimento do fóton tende a uma das assíntotas de H. O ângulo φ que uma assíntota faz em relação ao eixo X, antes da passagem da luz pelo Sol, pode então ser obtido tomando o limite $r \to +\infty$ em (4), a equação da trajetória em coordenadas polares, ou seja,

$$1 + e\, cos\varphi = 0 \tag{19.1}$$

$$cos\varphi = -\frac{1}{e} = -sen(\varphi - \frac{\pi}{2}). \tag{19.2}$$

Fazendo $\theta = \varphi - \pi/2$ em (19.2) obtemos

$$sen\,\theta = \frac{1}{e} \approx \theta \tag{20}$$

e então, usando (17),

$$\theta \approx \frac{GM}{c^2 r_{min}}, \tag{21}$$

ângulo medido em relação ao eixo vertical Y no sentido anti-horário.

Neste modelo idealizado a luz antes da passagem pelo Sol se movia "aproximadamente" por uma das assíntotas e concluída sua passagem pelo Sol vai se aproximando da outra assíntota em direção ao infinito, sempre sobre a hipérbole H. Isto dá então o ângulo de deflexão total

$$\beta = 2\theta \approx 2\frac{GM}{c^2 r_{min}} \approx 0'',875, \tag{22}$$

a metade do valor da Relatividade Geral, para $r_{min} = R_S = 6{,}960 \times 10^8$ m, havendo teoricamente uma simetria perfeita no movimento da luz em relação aos eixos coordenados.

É preciso entender que o ângulo entre as duas semi-retas que limitam o movimento do fóton, as metades das assíntotas que formam o ângulo que contém M, não é igual a β, e sim $180° - \beta$, seu suplemento, quase um ângulo de 180° completo, e assim o movimento total da luz difere muito pouco de uma única linha reta perfeita.

Se só considerássemos o desvio do fóton após a passagem pelo Sol, em relação ao eixo vertical Y, este ângulo seria de θ, metade de β, mas como a luz veio de outra direção antes da passagem pelo Sol, também com um ângulo θ em relação ao eixo vertical Y, o desvio total é o dobro, $\beta = 2\theta$.

3. Colisões

Em [3] percebemos que a luz emitida de uma estrela, ao passar na posição que tangencia o raio do Sol, acabaria por colidir com ele, na realidade antes mesmo de tangenciá-lo. Isto não acontecerá com a luz obedecendo ao movimento newtoniano, ao contrário do que ocorreria segundo a Relatividade Geral, conforme mostraremos a seguir.

A equação do movimento da luz sobre a hipérbole é dada por (4), ou

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \tag{23}$$

enquanto a equação em coordenadas polares de um círculo centrado em (0, 0) e raio r_{min} é

$$r = r_{min}. \tag{24}$$

Igualando (23) e (24) e usando (1) obtemos

$$\frac{(e+1)r_{min}}{1+ecos\varphi} = r_{min}, \tag{25}$$

e então

$$cos\varphi = 1, \tag{26}$$

que dá a solução esperada $\varphi = 0$, e mais as correspondentes voltas completas $2k\pi$, k inteiro, sem nenhuma outra solução diferente do ponto (r_{min}, 0).

Vejamos agora o que ocorre usando a Relatividade Geral.

Segundo [4], a equação do movimento para partículas-teste no espaço-tempo de Schwarzschild é

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2\varepsilon^2 - b}{l^2} + \frac{2mb}{l^2}u + 2mu^3, \tag{27}$$

para $u = 1/r$, ε e l constantes do movimento e $m = GM/c^2$.

Para partículas-teste com massa usamos $b = c^2$, e para partículas não massivas usamos $b = 0$. Então no caso do movimento da luz, considerando que o fóton não possua massa, (27) fica

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2\varepsilon^2}{l^2} + 2mu^3, \tag{28}$$

que se transforma em

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2 \tag{29}$$

ao derivar os dois membros de (28) em relação a φ.

A solução aproximada de (29), pelo método das perturbações, é

$$u = \frac{1}{R_0}cos\varphi + \frac{m}{R_0^2}(1 + sen^2\varphi), \tag{30}$$

onde R_0 representa a distância de máxima aproximação da partícula com respeito à origem, em $\varphi = 0$.

Aplicando procedimento semelhante ao utilizado na seção 2.2, no infinito temos $u \to 0$ e chegamos a

$$0 = \frac{1}{R_0}\Delta + 2\frac{m}{R_0^2} + O(\Delta^2), \qquad (31)$$

donde

$$\Delta = -\frac{2m}{R_0}, \qquad (32)$$

com $\Delta \approx sen\Delta \approx sen\delta = sen\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, sendo δ o ângulo complementar de φ e Δ o ângulo que a assíntota da trajetória forma com o eixo Y.

O ângulo de deflexão total é o dobro de Δ, em valor absoluto,

$$D = |2\Delta| = \frac{4GM}{c^2 R_0}, \qquad (33)$$

que para $R_0 = R_S$ o raio do Sol dá o conhecido valor de 1'',75, o dobro do obtido com a Mecânica Newtoniana.

Analisemos agora a solução (30):

1) Para $\varphi = 0$ temos cosφ = 1 e senφ = 0, donde

$$u(\varphi = 0) = \frac{1}{R_0} + \frac{m}{R_0^2} = \frac{1}{R_0}\left(1 + \frac{m}{R_0}\right) \qquad (34)$$

e

$$r(\varphi = 0) = \frac{1}{u(\varphi=0)} = R_0 \frac{1}{1+\frac{m}{R_0}} < R_0, \qquad (35)$$

ou seja, o fóton, nesta aproximação, avança pelo interior do Sol, significando obviamente que houve uma colisão anterior em sua superfície.

2) Igualando (30) a $1/R_0$, a fim de obtermos o ângulo φ em que o fóton colide com o Sol, de raio R_o, vem

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_0} cos\varphi + \frac{m}{R_0^2}(1 + sen^2\varphi), \qquad (36)$$

ou

$$\frac{m}{R_0} cos^2\varphi - cos\varphi + \left(1 - 2\frac{m}{R_0}\right) = 0, \qquad (37)$$

cuja solução matematicamente aceitável $(-1 \leq cos\varphi \leq +1)$ é

$$cos\varphi = \frac{1-\sqrt{1-4\frac{m}{R_0}(1-2\frac{m}{R_0})}}{2\frac{m}{R_0}}. \qquad (38)$$

Vemos que $\varphi = 0$ não é de fato uma solução de (36), ou de (38), e assim não é correto dizer que o fóton tangencia o Sol em $\varphi = 0$, sem nenhuma colisão anterior, ao contrário do que é possível na Mecânica Clássica.

Como m/R_0 é pequeno, da ordem de 2 x 10^{-6}, podemos aproximar (38) para

$$cos\varphi \approx 1 - 2\frac{m}{R_0}, \qquad (39)$$

que para ângulos φ também pequenos fornece

$$\varphi \approx 2\sqrt{\frac{m}{R_0}}, \qquad (40)$$

um ângulo muito pequeno, a raiz quadrada do ângulo obtido em (33) para a deflexão da luz, mas que não é nulo. Se um fóton emitido por uma estrela distante tivesse um movimento que obedecesse a solução (30) para as equações (29) ou (28), este fóton acabaria por colidir com o Sol, e não chegaria à Terra. Se todos os fótons emitidos pela estrela que viessem em nossa direção tivessem esta mesma trajetória claro que a estrela se tornaria invisível para nós.

4. Conclusão

Conforme vimos, é possível calcular pela teoria de Newton o ângulo de deflexão sofrido pela luz ao passar nas proximidades de uma grande massa *M*, ao contrário do que algumas vezes se diz, como em [5]: "... confirmando a hipótese de que a Teoria da Relatividade Geral é uma solução que se reduz à Teoria Newtoniana, que não prevê deflexão". O ângulo de deflexão obtido independe da massa do fóton, o que nos faz acreditar que poderia, teoricamente, tender a zero.

Vimos também que para grandes excentricidades, como é o caso no presente estudo, a energia total *E* do fóton segundo a Mecânica Newtoniana tende à famosa equação de Einstein: $E = mc^2$.

Confirmamos que a solução aproximada para a equação da trajetória da luz obtida com a Relatividade Geral leva à colisão da luz com o Sol, ao invés de fazer com que ela passe tangenciando pelo Sol, fato que é desconhecido (ou então ignorado) pela comunidade científica. Isto não ocorre na teoria de Newton.

Se esta mesma solução que prediz o desvio de 1'',75 para o ângulo de deflexão da luz também leva antes à colisão da luz, parece claro que *a priori* ela não pode ser adotada para o cálculo desta deflexão, despreocupadamente, sem maior análise. Precisamos de melhor solução, e que não leve a nenhuma previsão indesejável.

Em [3] mencionamos que a deflexão esperada para o raio de luz que passa pelo Sol é menor ou igual a 1'',75, já que o ângulo de deflexão obtido com a Relatividade Geral (e também com a Mecânica Newtoniana) é inversamente proporcional à distância da luz ao centro do Sol, e é mais difícil encontrarmos estrelas nas proximidades da borda do Sol do que mais afastadas dela. Como em várias medidas os desvios observados são maiores que 1'',75[6], tal fato pode não ser devido apenas a "erros" experimentais, e sim indicação de que há um grave problema com a teoria.

É possível mesmo que os diversos desvios observados sejam devidos aos deslocamentos naturais das estrelas, ou da Terra. Por isso em [3] também sugerimos mais verificações experimentais do ângulo de deflexão da luz das estrelas, tanto na decorrência de um período de 6 meses, sem eclipse algum, ou seja, na ausência da influência mais direta da massa *M* do Sol, quanto também na comparação das posições das estrelas na ocorrência de um eclipse solar em relação a dia (noite) próximo à ocorrência deste eclipse, por exemplo, na mesma noite, noite anterior ou na noite do dia seguinte. Poderíamos, para grande surpresa, concluir que não houve deflexão alguma provocada pelo Sol, ou que a deflexão encontrada está em desacordo com a Relatividade Geral.

Segundo um *site* da NASA[7], o próximo eclipse solar ocorrerá em 20/03/2015, visível na Islândia, Europa, norte da África, norte da Ásia, e será total no Atlântico Norte, Ilhas Faeroe (Dinamarca) e Svalbard (Noruega), com duração de 2 min 47 s. Um bonito *site* sobre essa data encontra-se em [8].

Bibliografia

1. Soldner, J.G., Ueber die Ablenkung eines Lichtstrals von seiner geradlinigen Bewegung, *Berliner Astronomisch Jahrbuch*, pp. 161-172 (1804), trad. do alemão para o inglês em http://en.wikisource.org/wiki/Translation:On_the_Deflection_of_a_Light_Ray_from_its_Rectilinear_Motion.

2. Landau, L. e Lifschitz, E., *Mecânica*. São Paulo: Hemus Livraria Editora Ltda. (1974).

3. Godoi, V.M.S., *The Deflection of Light by the Sun. The Einstein's Calculation in 1916*, http://www.vixra.org/abs/1412.0141 (2014).

4. Lorenci, V. de, *Teoria da Gravitação*, em *Programa Mínimo de Cosmologia*, cap. 1, org. Mario Novello et al. Rio de Janeiro: Jauá Editora (2010).

5. Berman, M.S. e Gomide, F.M., *Cálculo Tensorial e Relatividade Geral – Uma Introdução*, p. 71. São Paulo: Ed. McGraw-Hill Ltda. (1987).

6. Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, pp. 193-194. New York: John Wiley & Sons, Inc. (1972).

7. http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEdecade/SEdecade2011.html

8. http://xjubier.free.fr/en/site_pages/solar_eclipses/TSE_20150320_pg01.html