

Das elementare Gesetz der Induktion

Walter Orlov

Abstract

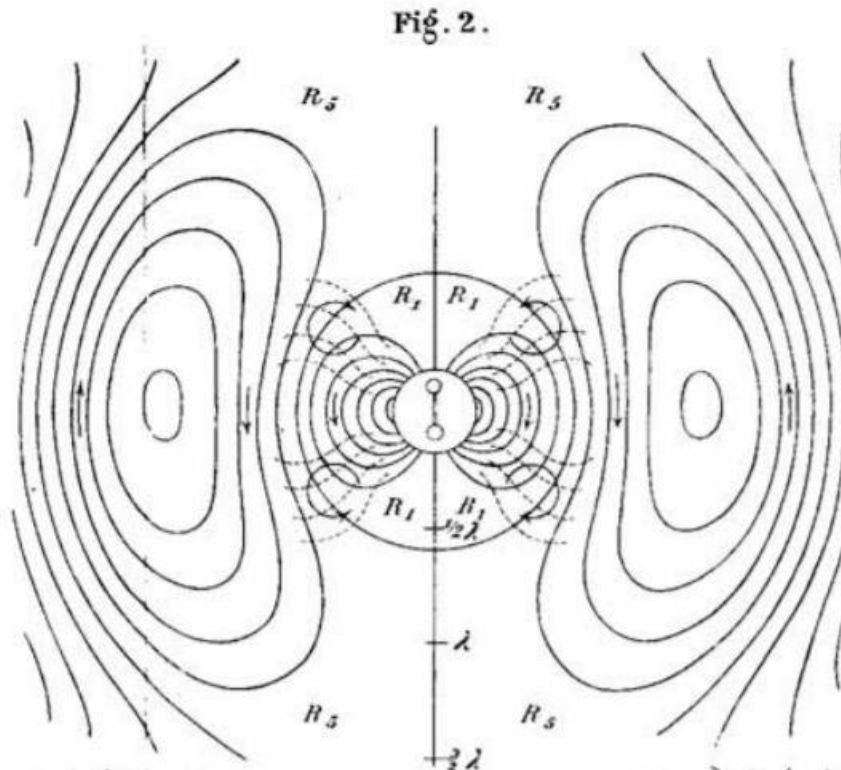
The elementary law of the induction:

$$\vec{E} = - \oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{l}$$

Faraday experimentierte mit einem Wendeldraht und Maxwell kam später zur Vorstellung eines rotierenden elektrischen Feldes. Spiralförmiger Draht ist aber eine Hilfskonstruktion, die zur Verstärkung des Effekts diente. Heutzutage hätte man zum selben Zweck einen Operationsverstärker genommen. Damals gab es aber weder Halbleiter noch Röhren. So wickelte Faraday den Draht mehrfach, um den durch veränderliches Magnetfeld induzierten Strom so weit zu verstärken, um mit Hilfe von einem Galvanometer sichtbar zu machen.

Nun interpretierte Maxwell geometrische Form eines vom Mensch geschaffenen Objekts als physikalische Realität. Dies sollte sogar durch Hertz experimentell bestätigt worden sein und zwar zeichnete er in seiner Publikation "Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie" geschlossene Linien des elektrischen Feldes. Dabei beschrieb er aber deren Entstehung folgend:

"Die Kraftlinien nämlich, welche sich am meisten vom Nullpunkt entfernt haben, erhalten bei dem Bestreben, sich zusammenzuziehen, eine seitliche Einbiegung, und indem diese Einbiegung sich mehr und mehr gegen die z-Axe zusammenzieht, schnürt sich von jeder der ausseren Kraftlinien eine in sich geschlossene Kraftlinie ab, welche selbständig in den Raum fortschreitet..."

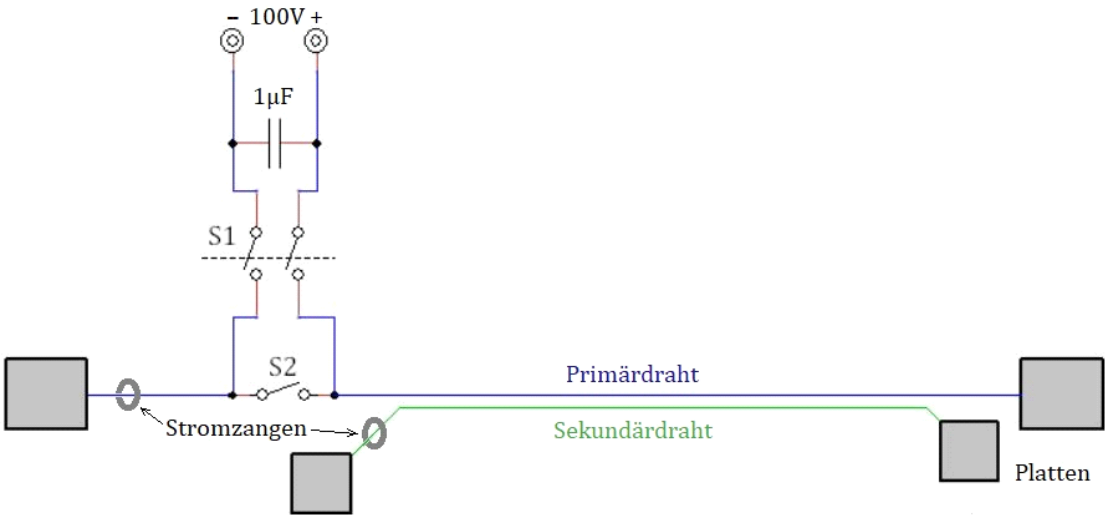


Hertz'sche Beschreibung weicht von Maxwell'scher Vorstellung über Induktionsgesetz stark ab. Jedenfalls entstünden Hertz'sche geschlossene Kraftlinie nicht durch veränderliches Magnetfeld. Sie sind eher die Folge der Überlagerungen von den Feldlinien.

Dass die Induktion auch bei geraden Drähten und ohne geschlossene Stromkreise auftritt, lässt sich durchaus zeigen. Kompliziert ist das nicht. Dafür braucht man etwa folgende Einrichtung.

Um die Anwendung und Entstehung von hohen Spannungen (über 100V) zu meiden, benutzen wir für unseren Versuch leitende Körper mit möglichst großer Oberfläche. Zwei voneinander entfernte leitende Körper sollen zuerst aufgeladen und danach entladen werden. Der Strom wird dabei genauso geradlinig fließen, wie gerade der verbindende Draht ist. Auf diese Weise wird die Bildung des geschlossenen Stromkreises ausgeschlossen. Diesen Draht nennen wir "Primärdräht". Ein zweiter gerader Draht wird neben dem ersten gelegt. Diesen nennen wir "Sekundärdräht". An seine Enden werden zwei weitere leitende Körper angeschlossen. Genauso wie beim Primärdräht wird hier die Bildung des

geschlossenen Stromkreises verhindert. Eine entsprechende Schaltanordnung ist unten skizziert.



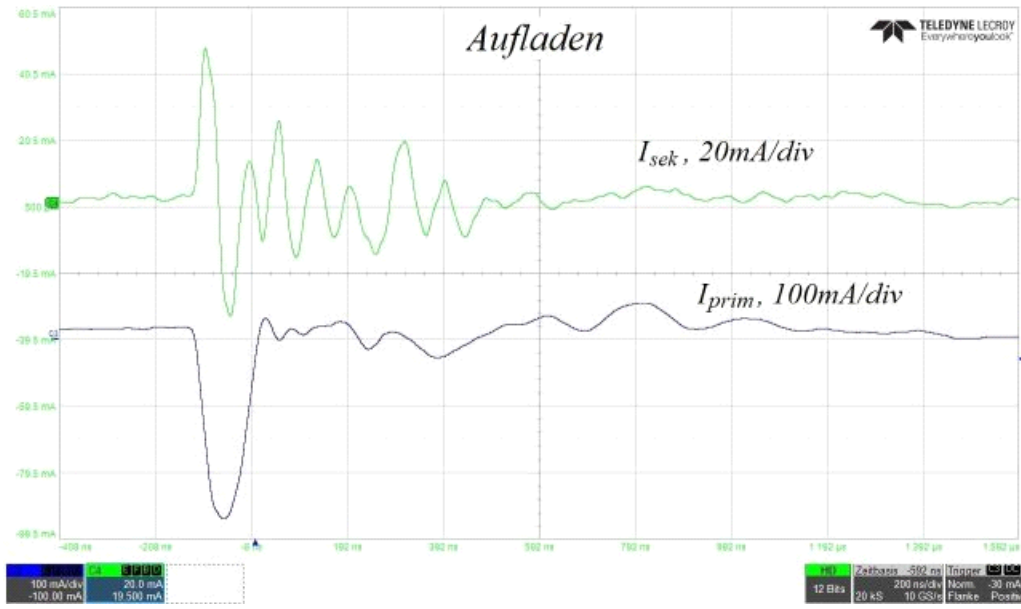
Die Stromzangen werden gleichsinnig – Stromrichtung nach links – an die Drähte angebracht. Nächstes Foto zeigt verwendete Ausrüstung.



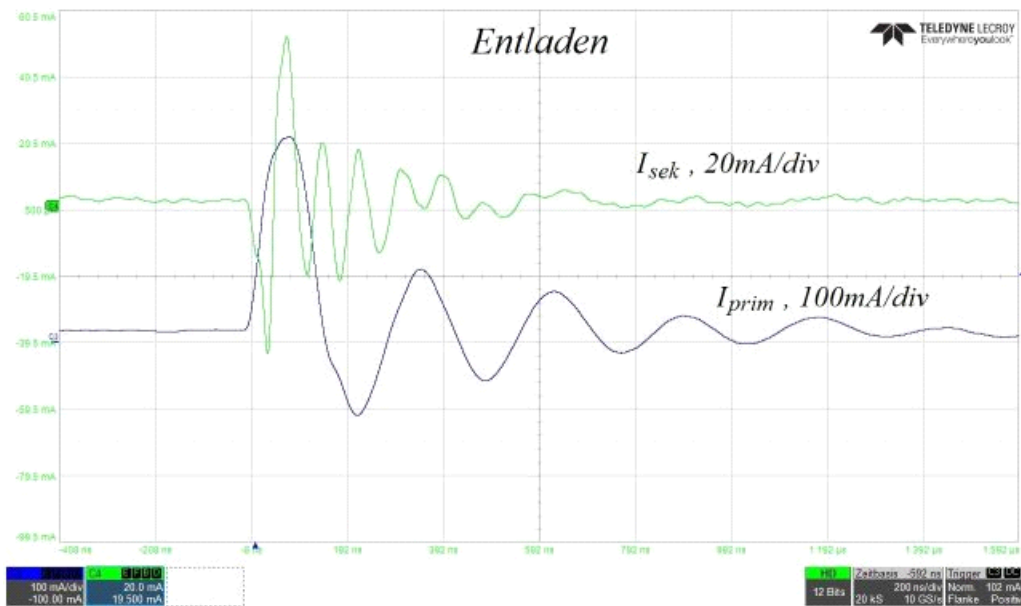
Als leitende Körper des Primärdrahtes dienten die Alu-Platten 0.8m x 1m im Abstand von ca. 4.5m voneinander. Der Sekundärdraht wurde an die Eisenbleche 0.5m x 0.5m angeschlossen. Abstand zwischen ihnen betrug ca. 2.2m. Die Entfernung zu den Alu-Platten des Primärdrahtes war mehr als 1m. Wo die Drähte zusammen verliefen (ca. 2m), wurde zweiaderiges Kabel (0.14mm² je Draht) ohne Schirm genommen. Dazu kamen ein einfacher und ein zweifacher Leitungsschutzschalter. Das war also alles, was ich gerade zur Hand hatte. Und hier ist das Foto von der Messeinheit mit den Stromzangen.



Die Schalthandlungen waren folgende: Das DC-Netzteil wurde an 1µF Kondensator über Bananen-Stecker angeschlossen und die Ausgangsspannung auf 100V eingestellt. Während einfacher Schalter *S2* weiterhin offen blieb, wurde zweifacher Schalter *S1* zugeschaltet. Das Oszilloskop triggerte auf Primärstrompuls und zeichnete folgende Kurvenverläufe.



Danach wurde zweifacher Schalter $S1$ abgeschaltet und einfacher Schalter $S2$ sofort geschlossen. Das Ergebnis der Umschaltungen ist in nächstem Oszillogramm gezeigt:



Relevant sind die Anfänge der Pulse, also solange die Ströme noch erzwungen werden und es keine Nachschwingungen gibt.

In den Oszillogrammen erkennen wir, dass der Sekundärstrom I_{sek} zuerst in entgegengesetzte Richtung fließt als Primärstrom I_{prim} . Das ist ein klares Indiz dafür, dass wir hier mit dem induzierten Strom, also, mit der Induktionserscheinung im allgemein zu tun haben. Dafür spricht auch die Höhe des Sekundärstromes und zwar sie ist nur ca. fünfmal kleiner als Höhe des Primärstromes, d.h. der Sekundärstrom kann nicht die Folge der Einstrahlung von den Funkwellen sein. Außerdem benutzte ich hier keinen elektronischen Verstärker, dessen Fehlverhalten bei Störstrahlung zu falschen Ergebnissen führen könnte.

Somit ist anfängliche Vermutung, dass die Induktion auch bei geraden Leitungen stattfinden kann, experimentell bewiesen!

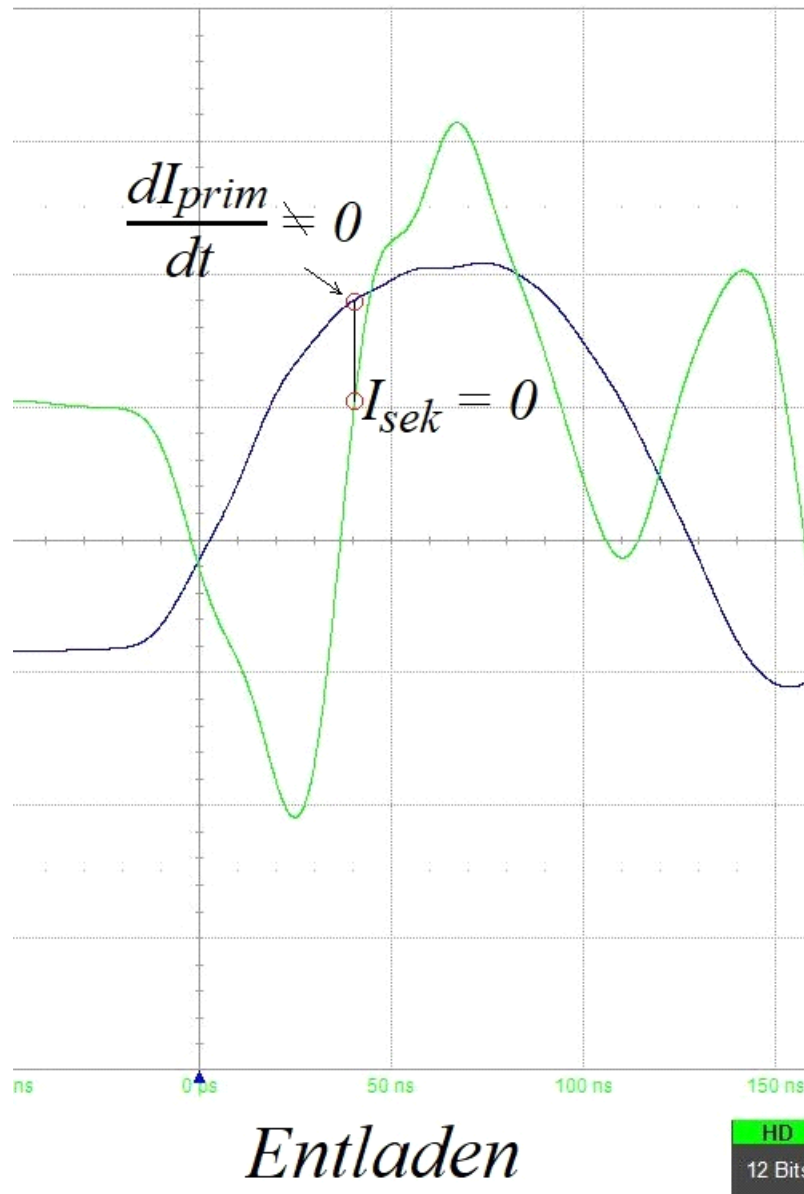
Eigentlich deutet die Selbstinduktionserscheinung schon in gleiche Richtung hin. Obwohl man dabei üblicherweise gewickelte Drahtspulen betrachtet, besitzt gerader Draht auch eine gewisse Induktivität. Sie ist sehr klein, aber im Prinzip ist sie da und deshalb wird die der Änderung des Stromes entgegenwirkende Spannung auch in geraden Drähten induziert.

Zurück zu unseren Oszillogrammen. Der Sekundärstrom beginnt abzunehmen noch während der Primärstrom steil steigt. Dies kann so erklärt werden, dass durch Aufladen der Platten an Enden des Sekundärdrahtes die Spannung entsteht, die dem induzierten Strom entgegenwirkt. Es handelt sich logischerweise um induzierte Spannung. Fällt der Sekundärstrom bis auf null, hat diese Spannung ihren Scheitelwert erreicht. Bemerkenswert ist es aber, dass der Primärstrom in diesem Punkt weiterhin steigt (nächstes Oszillogramm). Seine aktuelle Steigung wird also durch induzierte Spannung exakt ausgeglichen.

Deshalb können wir annehmen, dass induzierte Spannung U_{ind} , die den Sekundärstrom stoppt, noch bevor der Primärstrom zu wachsen aufhört, mindestens zur ersten Ableitung des Primärstromes nach der Zeit proportional ist:

$$U_{ind} \propto \frac{dI_{prim}}{dt}$$

Die Kurven sind an dieser Stelle abgerundet, deshalb schreibe ich "mindestens zur ersten Ableitung". Es könnten also zweite oder dritte Ableitungen sein, aber der Nulldurchgang passiert schnell und deshalb nehmen wir an, dass es sich doch um erste Zeitableitung handelt. Außerdem gingen Faraday und Maxwell beim Induktionsgesetz davon aus.



Der Primärstrom erzeugt rotierendes Magnetfeld (Amperesches Gesetz):

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

wobei \vec{j} die Stromdichte ist. Somit

$$U_{ind} \propto \frac{d}{dt}\text{rot}\vec{B}$$

Die Induktionsspannung wird durch die Integration der elektrischen Feldstärke über die Länge des Drahtes berechnet. Deshalb können wir auch schreiben

$$\vec{E} \propto \frac{d}{dt} \text{rot} \vec{B}$$

Nun wollen wir einen Ersatz für Faraday-Maxwell-Gleichung

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

finden. Um gleiche Einheiten von beiden Seiten bei unserer Gleichung zu bekommen, müssen wir als analog zur Stromdichte noch die Dichte elektrischer Feldstärke einführen:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{E}}{A}, (V/m^3)$$

wobei A die Fläche ist, durch die das elektrische Feld durchdringt. Sie liegt stets senkrecht zu den Feldlinien. Mit der Berücksichtigung der Polarität induzierter Spannung ist gesuchte Formel:

$$\vec{\mathcal{E}} = - \text{rot} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

In Integralform können wir auf neue Größe $\vec{\mathcal{E}}$ verzichten:

$$\vec{E} = - \oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{l}$$

wobei $d\vec{l}$ ist ein Linienelement des Randes von betrachteter Fläche A . Das war keine strenge Herleitung. Mehr von mir kann man aber auch nicht erwarten, denn ich beschäftige mich mit der Physik nur hobbyweise.

Man fragt sich selbstverständlich, ob man aus dieser neuen Gleichung die "alte" Gleichung von Maxwell herleiten kann? Wie gesagt ist die Leiterschleife ein künstliches Objekt. Dass dabei aber eine einfache Formel für das Induktionsgesetz rauskommt, ist selbstverständlich beachtlich. Ich Wirklichkeit ist dies gar nicht verwunderlich, wenn man in Erinnerung die Versuchsanordnung von Faraday ruft.



Sein Induktionsring war im Grunde genommen ein Transformator. Es gab keine relative Bewegung zwischen den Spulen, die Krümmung von magnetischen Feldlinien war immer gleich. Daher fand die Änderung der Rotation des Magnetfeldes allein durch die Änderung der Feldstärke. So konnte die geometrisch bedingte Rotation und halt gesamte Rotation außer Acht gelassen werden. So bliebe von rechter Seite nur $-d\vec{B}/dt$.

Von linker Seite macht man die Integration elektrischer Feldstärke entlang der Sekundärwicklung und mit Hilfe vom Integralsatz von Stokes geht man zur Rotation des elektrischen Feldes über: $rot\vec{E}$.

Man fragt sich auch, ob sich die Wellengleichung mit neuer Formel herleiten lässt? Das darf prinzipiell möglich sein. Mit der Berücksichtigung vom Maxwell'schen Verschiebungsstrom

$$rot\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

von dem wir noch eine Zeitableitung machen

$$rot \frac{d\vec{B}}{dt} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$$

bekommen wir die Gleichung

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{E}$$

die dem Hookeschen Gesetz der Mechanik ähnelt. Lediglich brauchen wir die Fläche A , durch die das elektrische Feld durchdringt, quasi wie eine Masse im Federpendel zu behandeln und so bekommen wir Hookesches Gesetz der Elektrodynamik:

$$A \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{E}$$

Daraus ergibt sich die Federkonstante

$$k = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Fläche A hat offensichtlich eine besondere physikalische Bedeutung. Sie bestimmt die Eigenfrequenz, mit der das induzierte Elektrofild nach seiner Erzeugung zu schwingen beginnt:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2}{A}} = \frac{1}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{A}}$$

Diese Fläche sei so etwas wie der Querschnitt des gesamten induzierten Bündels des elektrischen Feldes. Zusammen mit induziertem Wirbel des Magnetfeldes drum herum bildet es eine schwingende Einheit. In der Elektrotechnik würde solche Einheit als Schwingkreis bezeichnet. Der Querschnitt entspreche dann der LC-Kombination. Von einer Seite kann die Fläche an sich für die Kapazitive Eigenschaft des Raumes verantwortlich gemacht werden und von anderer Seite sorgen magnetische Wirbel innerhalb der Fläche für Induktive Eigenschaft des Raumes.

Gehen wir davon aus, dass das schwingende Bündel rund ist und elektromagnetische Wellen aussendet, haben diese die Wellenlänge:

$$\lambda = 2\pi^{3/2} r$$

wobei r der Radius des Bündels ist.