Introduction to quantum gravitation

Introduction à la gravitation quantique

Alaya Kouki

Abstract

In this article we had do a link between the gravitational field and the square of the speed of a corpuscle exactly as the intuition of Henri Poincare. This theory is the zone of meeting of classical mechanics, restraint relativity, quantum mechanics and the theory of gravitation.

Résumé

Dans cet article on a réalisé la liaison entre le champs gravitationnel et les carrées multiples de la vitesse d'un corpuscule exactement l'intuition d'Henri Poincaré il y a un siècle. Cette théorie est la zone de rencontre entre la mécanique classique, la relativité restreinte, la mécanique quantique et la théorie de la gravitation.

Key Words :

mechanical impedance of vacuum, inertial time, inertial length, harmonic oscillator, Poincare intuition.

Mots clés:

impédance mécanique du vide, temps inertiel, longueur inertielle, oscillateur harmonique , intuition de Poincaré.

1)Introduction :

Dès 1900 Planck a fait la remarque suivante : la combinaison de sa constante $\hbar$ avec celle de la vitesse de la lumière dans le vide c et la constante gravitationnelle G forme un système d'unités absolu dans lequel ces constantes valent un [1] :

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar.c}{G}} = 2.18\ \ 10^{-8}\,Kg \quad (1)\ ,$$

$$L_P = \sqrt{\frac{\hbar.G}{c^3}} = 1.6\ \ 10^{-35}\,m \quad (2)\ ,$$

$$T_P = \sqrt{\frac{\hbar.G}{c^5}} = 5.39\ \ 10^{-44}\,s \quad (3).$$

D'après ce système l'extension spatio-temporelle est alors équivalente à la masse donc c'est si l'espace-temps est rempli d'énergie et alors il influence le mouvement de tout corpuscule. On peut déduire cette éventualité directement de la notion de dualité onde-corpuscule : le module de la fonction d'onde représente la probabilité de présence d'un corpuscule dans une région limitée d'espace-temps ainsi un corpuscule peut influencer le mouvement de tout autre corpuscule par cette possibilité de présence.

Soit alors un corpuscule de masse m assimilé à un point matériel en mouvement dans un référentiel d'inertie $R(O,x,y,z,t)$, soit un référentiel $R'(O',x',y',z',t')$ en mouvement rectiligne uniforme de vitesse V par rapport au référentiel Rsuivant l'axe (O,x)et dont les origines se coïncident au début du mouvement. Ce référentiel est aussi considéré comme un référentiel d'inertie. Les transformations de l'espace et du temps entre les deux référentiels ou transformations de Lorentz sont les suivantes [2]:

$$x' = \frac{x-V.t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

$$t' = \frac{t-x.V/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (5)$$

La question posée est quel est l'équation du mouvement de ce corpuscule ?.

2)Le principe de moindre action :

2-1)Les équations d'Euler-Lagrange :

Un corpuscule ayant les coordonnées spatiales généralisés $\{q_i\ , i = 1,2,3\}$ suit une trajectoire qui se développe dans le temps t et dont l'équation est[3] :

$$q = q_i(t), \;\; i = 1,2,3 \qquad (6)$$

Ici par référence à R, $(q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z)$.

La composante de la vitesse généralisée est définit par :

$$\dot{q_\iota} = \frac{d\ q_i(t)}{dt}\ , i = 1,2,3 \quad (7)$$

L'action S associée au corpuscule est définit comme suit :

$$S = \int L.dt \qquad (8)$$

Où L est une fonction des $q_i(t)$, des $\dot{q_\iota}(t)$ et possiblement de t .

La quantité Sest en principe la moindre pour la bonne trajectoire du corpuscule et alors on a :

$$dS = 0 \qquad (9)$$

En posant que les q_i sont indépendants les uns des autres et que les variations de la fonction L s'effectue à temps constant on aboutit aux équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\iota}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (10)$$

Les solutions des équations (10) définissent bien la trajectoire du corpuscule.

La quantité L est liée à l'énergie du corpuscule et on l'appelle souvent le potentiel cinétique qui est la différence entre l'énergie cinétique du corpuscule et son énergie potentielle (dans le cas où les forces agissants sur le corpuscule dérivent d'un potentiel c.à.d. des forces conservatrices).

Dans le cas où il y a des forces non conservatrices, les équations d'Euler-Lagrange sont les suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (11)$$

Où Q_i : force généralisée.

L'importance du formalisme de Lagrange est qu'au lieu de traiter avec des quantités vectorielles telle que force et accélération dans la mécanique classique on utilise des quantités scalaires où apparait uniquement les positions et les vitesses.

2-2)Les équations d'Hamilton :

On définit les moments généralisés comme suit :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (12)$$

On définit la fonction d'Hamilton comme suit :

$$H = \sum \dot{q}_i \,.\, p_i - L \quad (13)$$

Partant que les q_i et les p_i sont indépendants, on aboutit aux équations d'Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (14)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (16)$$

L'Hamiltonien d'un corpuscule est l'énergie totale de celui-ci, c'est aussi la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. L'avantage pour les équations d'Hamilton est quelles sont du premier ordre alors que celles de Lagrange sont du second ordre. Aussi dans les équations d'Hamilton est qu'on a affaire aux moments et aux positions , la notion d'inertie n'apparait pas explicitement.

2-3)Formalisme canonique :

Pour simplifier les équations, soit un système dynamique à un seul degré de liberté. Sa configuration est complètement déterminée par la donnée de deux variables dynamiques q & p appelées variables conjuguées. Son évolution est déterminée par la donnée de la fonction d'Hamilton $H(q,p)$ qui caractérise le système et à partir de laquelle on peut avoir les équations du mouvement suivantes [4] :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = [q, H] \qquad (17)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = [p, H] \qquad (18)$$

Les équations (17) et (18) sont les équations canoniques du système ou les équations d'Hamilton du système. Le symbole [,] est appelé crochet de Poisson définit comme suit:

$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q}$ (19)

Ou f & g sont n'importe quelles fonctions des variables dynamiques q & p.

En particulier on a :

$[q,p] = 1$ (20)

Un remplacement réversible de variables $Q\ (q,p)$ & $P(q,p)$ est canonique si les nouvelles variables satisfont l'équation (20) :

$[Q,P] = 1$ (21)

C'est l'unique condition demandée pour la conservation du crochet de Poisson avec ce changement de variables c.à.d. :

$[f,g]_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial Q} \cdot \frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{\partial g}{\partial Q} = [f,g]_{Q,P}$ (22)

Et l'unique condition demandée pour conserver la forme canonique des équations du mouvement :

$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} = [Q,H]$ (23)

$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = [P,H]$ (24)

Considérons ce cas : ayant une donnée $P(q,p)$ peut on lui associer une fonction $Q(p,q)$ dans le but d'avoir un remplacement de variables dynamiques qui sera définit canonique ?. Comme indiqué il est suffisant d'assurer que la transformation est réversible c.à.d. d'assurer que :

$\frac{\partial P}{\partial q}$ & $\frac{\partial P}{\partial p}$ ne s'annulent pas simultanément (25).

Donc la condition (21) devient une dérivée partielle qui détermine (q,p) .

Remarquons que la condition (25) est uniquement une condition locale c.à.d. qu'elle ne peut assurée la réversibilité de la transformation uniquement dans une certaine proximité du plan (q,p) .

3)L'équation du mouvement :

Le principe de relativité est que les équations de la Nature restent invariantes par transformations de Lorentz. Supposons que le corpuscule est au repos par rapport au référentiel R', l'action associée à ce corpuscule pourra être exprimée comme suit [5] :

$S = \int \alpha . dt'$ (26)

Où α est une constante qu'on cherchera. Cette constante est en principe le potentiel cinétique du corpuscule au repos. La différence avec la mécanique classique est qu'une masse m au repos peut avoir un potentiel cinétique au repos : elle n'est pas tout à fait inerte et ne sert à rien sauf de résister au mouvement du corpuscule.

Dans ce cas on a $x = V.t$ et alors d'après (5) on a :

$$dt' = dt.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad (27)$$

En remplaçant l'expression de dt' donnée par (29) dans (27) on aura :

$$S = \int \alpha.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.dt \quad (28)$$

On déduit alors que le lagrangien du corpuscule est :

$$L = \alpha.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad (29)$$

Et alors pour les faibles vitesses on doit retrouver l'expression classique de l'énergie cinétique. On a pour $V \ll c$:

$$L \approx \alpha - \frac{1}{2}.\alpha.\frac{V^2}{c^2} \quad (30)$$

Ce qui nous amène à conclure que :

$$\alpha = -m.c^2 \quad (31)$$

D'après (29) et (31) on aura alors :

$$L = -m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad (32)$$

On généralise l'équation (33) quelque soit la vitesse du corpuscule. On aura :

$$L = -m.c^2.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (33)$$

Et alors d'après (12) le moment du corpuscule (ou quantité de mouvement ou impulsion) est :

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{m.v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (34)$$

On définit l'inertie du corpuscule comme étant le ratio de son moment à sa vitesse :

$$\xi = \frac{p}{v} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (35)$$

Si ce corpuscule est en mouvement c'est qu'il subira une influence universelle de l'espace-temps environnant caractérisée à la limite semi-classique(juste au dessus de la relativité restreinte dont l'espace-temps est parfaitement plat et juste en dessous de la relativité générale-théorie de la gravitation- dont l'espace-temps est courbe c.à.d. au plan tangent) par une force de frottement universel dû à l'action du vide qui n'est autre que l'espace-temps lui-même . Rappelons que définir un référentiel inertiel signifie donc une extension dans l'espace temps qui d'après Planck est équivalente à une certaine ''vapeur'' de masse agissant sur le mouvement du corpuscule (ou autrement dit d'après la théorie quantique l'influence de la probabilité de présence d'autres corpuscules dans l'espace-temps environnant). Cette action peut être une série de coefficients relatifs aux exposants de la vitesse . La force de frottement agit toujours dans le sens opposée du mouvement. On se contente ici du premier ordre et alors la force de frottement est :

$$\boldsymbol{f} = -a.\boldsymbol{v} \qquad (36)$$

Ce frottement est bien entendu indépendant du corpuscule , il est universel. Le coefficient de frottement $''a''$ est déclaré constante universelle.

Ceci est tout à fait prévisible . L'action du corpuscule est d'après (26) et (33) :

$$S = \int -m.c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.dt = -m.c\int ds \qquad (37)$$

Avec $ds = c.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.dt$ intervalle dans l'espace-temps de Minkowski.

L'action doit être minimale pour une vrai trajectoire du corpuscule ce qui nous conduit à conclure que d'après (37) le mouvement ne peut être qu'avec courbure : jamais une particule libre se meut dans une ligne d'Univers droite dans un espace-temps de Minkowski. Cette linéarité du mouvement ne peut se produire que si le corpuscule est au repos ou bien en mouvement avec une vitesse égale à celle de la lumière : la linéarité du mouvement est uniquement locale juste au plan tangent relativité de Minkowski-relativité générale.

L'énergie du corpuscule est l'Hamiltonien de celui-ci et on a d'après (13):

$$E = H = \boldsymbol{p}.\boldsymbol{v} - L = \frac{m.c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \xi.c^2 \quad (38)$$

On associe au corpuscule un temps inertiel tel que :

$$\xi = a.\tau \qquad (39)$$

Son temps inertiel au repos est tel que :

$$m = a.\tau_0 \ (40)$$

C'est aussi identique pour une longueur inertielle :

$$l = c.\tau \quad (41)$$

Et une longueur inertielle au repos :

$$l_0 = c.\tau_0 = \frac{m.c}{a} \quad (42)$$

On a toujours cette relation pour le temps inertiel :

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (43)$$

On peut exprimer H sous cette forme :

$H = a.\tau.c^2$ (44)

Si on considère $''a.\tau.c''$ la composante temporelle de l'impulsion du corpuscule alors la vitesse du corpuscule suivant cette dimension est d'après (14) :

$\frac{\partial H}{\partial(a.\tau.c)} = c$ (45)

La coordonnée inertielle du corpuscule suivant l'axe du temps est par définition "$c.\tau$" et la force de frottement du vide suivant cette dimension est d'après (15) :

$\frac{-\partial H}{\partial(c.\tau)} = -a.c$ (46)

C'est comme ci le corpuscule est animé d'une vitesse égale à celle de la lumière par rapport à sa dimension inertielle et il subit une force de frottement égale à $'' - a.c''$.

On en déduit que pour l'espace tridimensionnel normal l'équation locale du mouvement du corpuscule est :

$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f} - a.\boldsymbol{v}$ (47)

Où $\boldsymbol{f}$: toutes les forces extérieures agissantes sur le corpuscule ;

$-a.\boldsymbol{v}$: une force de frottement universel dû au vide.

Remarquons que si on écrit la position $\boldsymbol{U}$du corpuscule en quatre dimensions sous cette forme :

$\boldsymbol{U} = (c.\tau, x, y, z)$ (48)

Alors la vitesse en quatre dimensions sera comme suit :

$\boldsymbol{V} = (c.\frac{d\tau}{dt}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ (49)

Cette vitesse doit normalement coïncider avec celle de la lumière selon la dimension temporelle et alors on doit avoir toujours :

$d\tau = dt$: si l'énergie du corpuscule varie (50)

$d\tau = 0$: si l'énergie du corpuscule reste constante (autrement sa vitesse tridimensionnelle reste constante en module).

L'équation (47) pourra être écrite sous la forme suivante :

$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{f}$ (51)

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + a.\boldsymbol{X}$ (52)

Avec $\boldsymbol{p}$: impulsion du corpuscule ;

$\boldsymbol{X}$: position spatiale du corpuscule.

L'équation (52) est tout à fait analogue à une impulsion généralisée d'une charge électrique "e" en mouvement dans un champs de potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ tel que :

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \gamma.\frac{e}{c}.\boldsymbol{A}$ (53)

Avec γ : facteur de conversion choisi arbitrairement tant qu'il n'y a aucune formule reliant les charges et les potentiels vecteurs.

On déduit d'après (52) & (53) qu'on peut traiter de la même façon les champs électromagnétiques et la gravitation universelle : il y a une certaine équivalence. Aussi la nouvelle constante "a" aura certainement un rapport avec toutes les interactions naturelles à n'importe qu'elle échelle.

D'une façon générale les deux équations (52) & (53) peuvent s'écrire comme suit :

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + \mu.\boldsymbol{U}$ (54)

Avec $\mu = \gamma.\frac{e}{c}$ & $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}$: si on est en présence d'une particule chargée ;

$\mu = a$ & $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}$: si on est en présence d'une particule non chargée.

Nous devons vérifier que le changement de variable du moment généralisée dans la limite semi-classique est canonique, autrement dit que l'équation du mouvement (51) est bien locale c.à.d. qu'il n'est pas demandée qu'elle respecte l'invariance relativiste.

Prenons l'exemple du mouvement à une seule dimension spatiale :

$P_x = p_x + \mu.U_x$ (55)

$[U_x, P_x] = \frac{\partial U_x}{\partial U_x}.\frac{\partial P_x}{\partial p_x} - \frac{\partial U_x}{\partial p_x}.\frac{\partial P_x}{\partial U_x} = 1 \times 1 - 0 \times \mu = 1$ (56)

Pour une impulsion donnée $P = P(U_x, p_x) = p_x + \mu.U_x$ on peut lui associer une fonction position généralisée $Q(U_x, p_x) = U_x$ avec l'objectif que le changement de variable dynamiques soit canonique ?. Cela signifie que la transformation est réversible et alors la condition nécessaire est que $\frac{\partial P}{\partial p_x}$ & $\frac{\partial P}{\partial U_x}$ ne s'annulent pas simultanément. On a :

$\frac{\partial P}{\partial p_x} = 1$ & $\frac{\partial P}{\partial U_x} = \mu$ (57)

Nous généralisons (55) & (56) pour les autres dimensions spatiales. Donc notre changement de variables est canonique et alors l'équation du mouvement (51) est définit localement.

4)Détermination de l'énergie du corpuscule autrement :

Le travail de la force de frottement entre deux points A et B de la trajectoire du corpuscule est :

$\varepsilon_{AB} = \int_A^B a.\boldsymbol{v}.d\boldsymbol{x} = \int_A^B a.v^2.d\tau = \int_A^B a.c^2.\left(1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2}\right).d\tau = a.c^2.(\tau_B - \tau_A) + a.c^2.\tau_0^2.\left(\frac{1}{\tau_B} - \frac{1}{\tau_A}\right) =$
$a.c^2.(\tau_B - \tau_A).(1 - \frac{\tau_0^2}{\tau_A.\tau_B})$ (58)

On prend l'origine de l'énergie l'état repos et alors:

$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_B - \varepsilon_A$ (59)

Avec :

$$\varepsilon_B = a.c^2.(\tau_B - \tau_0).\left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_B}\right) = a.c^2.\tau_B.\left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_B}\right)^2 \qquad (60)$$

Idem pour la définition de ε_A.

On définit tout cours l'énergie échangée du corpuscule avec l'extérieur comme suit :

$$\varepsilon = a.c^2.\tau.(1 - \frac{\tau_0}{\tau})^2 = \xi.c^2.(1 - \frac{m}{\xi})^2 \qquad (61)$$

Cette énergie pourra être positive ou négative d'une façon générale.

Lorsque la vitesse du corpuscule tend vers celle de la lumière alors d'après (61) on aura :

$$\varepsilon \approx \xi.c^2 \qquad (62)$$

L'énergie échangée avec le vide (62) correspond exactement à l'énergie échangée avec le vide d'une corpuscule de masse nulle (de la même forme). On peut dire que l'énergie d'un corpuscule de masse m est :

$$E \approx \frac{m.c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (63)$$

Son impulsion est :

$$\boldsymbol{p} = \frac{m.v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (64)$$

Son Lagrangien est :

$$L = \boldsymbol{p}.\boldsymbol{v} - E \approx -m.c^2.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (65)$$

Pour Planck la paroi d'un corps noir est constituée par une infinité d'oscillateurs harmoniques échangeant de l'énergie avec le rayonnement dedans uniquement par multiples entiers d'une certaine quantité élémentaire tel que si cet entier est nul ou infini l'échange sera nul. Nous adaptons le même modèle d'échange d'énergie pour notre corpuscule avec le vide.

Ainsi l'énergie du corpuscule est en général comme suit :

$$E = \frac{m.c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + n.\varepsilon \qquad (66)$$

Avec : $lim_{n\to\pm\infty}\,(n.\varepsilon) = 0$ (67) [position très bien définit]

n: entier naturel positif ou négatif.

A l'approximation non-relativiste (66) devient :

$$E \approx m.c^2 + \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{n.m}{4}.\frac{v^4}{c^2} \quad (67)$$

Pour une corpuscule de masse m se mouvant dans un champs gravitationnel newtonien à potentiel scalaire $\varphi = -\frac{G.M}{R}$ crée par une masse M qu'on suppose immobile au centre d'un repère se séparant de la masse m d'une distance R en coordonnée polaire (cette masse m est mouvement orbital planétaire autour de M, la constante G est la constante gravitationnelle de Newton) on a :

$$E = m.c^2 + \frac{1}{2}m.v^2 + m\varphi \quad (68)$$

Avec la condition que le champs φ est faible.

Egalant (67) & (68) on aura pour un champs extrêmement faible :

$$-\frac{G.M}{R} = \frac{n}{4}.\frac{v^4}{c^2} \qquad (69)$$

Tel est le souhait d'Henri Poincaré depuis un siècle : relier le champ gravitationnel aux puissances de $\frac{v^2}{c^2}$ et c'est ça notre conclusion.

La détermination expérimentale de la constante "a" est possible grâce à une première expérience sur l'effet photo-électrique [6] ou une autre méthode d'expérience sur l'effet photo-électrique [7] ou encore d'un mélange théorie-expérience [8]. Une nouvelle modélisation de l'atome autre que celle de Bohr-Sommerfeld ou de Dirac s'impose aussi dans lequel l'électron fait uniquement des oscillations par rapport au noyau considéré comme lourd.

5)Champs gravitationnel quantique à l'approximation classique :

En théorie de la relativité générale un champs gravitationnel est *constant* lorsqu'on peut trouver un référentiel dans lequel toutes les composantes du tenseur métrique sont indépendantes de la composante temporelle x^0 et alors dans ce cas cette composante est appelé *temps d'univers*.

La signification du temps d'univers est que dans un champs gravitationnel constant l'intervalle de ce temps s'écoulant entre deux événements en un point de l'espace coïncide avec l'intervalle de temps s'écoulant entre n'importe quels deux autres événements se produisant en un autre point de l'espace simultanément avec le premier couple d'événements [9] .

En mécanique non relativiste le mouvement d'une corpuscule est déterminé par la fonction de Lagrange suivante :

$$L = -m.c^2 + \frac{1}{2}m.v^2 - m.\varphi \quad (70)$$

En ayant rajouté la constante "$-m.c^2$" de façon que dans l'expression du lagrangien en absence de champs soit exactement la même fonction relativiste (65) à la limite $\frac{v}{c} \to 0$.

Pour une corpuscule soumise à l'action du champs gravitationnel l'action S non relativiste est selon les équations (8) et (37) :

$$S = \int L.dt = -m.c\int\left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt = -m.c\int ds \quad (71)$$

En identifiant les deux expressions dans (71) on aura :

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt \qquad (72)$$

En élevant au carré l'expression (72) et en rejetant les termes qui s'annulent lorsque $c \to \infty$ il s'ensuit que:

$$ds^2 = \left(c^2 + \frac{v^4}{4c^2} - v^2 + \frac{\varphi^2}{c^2} + 2\varphi - \varphi.\frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 \approx (c^2 + 2\varphi).dt^2 - d\boldsymbol{R}^2 \quad (73)$$

Avec $d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}.dt$

Alors la composante temporelle du tenseur métrique est dans la limite considérée:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \qquad (73)$$

En théorie de la Relativité Générale il n'y a aucune restriction sur le choix du référentiel : n'importe quelles quantités qui caractérisent la disposition des corps dans l'espace peuvent jouer le rôle des coordonnées d'espace x^1, x^2, x^3 et la coordonnée temporelle x^0 pourra être déterminée par une horloge indiquant son temps propre.

Essayons de chercher la liaison entre le temps réel noté ζ . Considérons deux événements infiniment rapprochés qui ont lieux en un même point de l'espace. Dans ces conditions l'intervalle ds^2 entre les deux événements est égal à "$c.d\zeta$" où $d\zeta$ est l'intervalle de temps réel entre les deux événements.

En posant $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ dans l'expression générale de l'intervalle :

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = g_{00}(dx^0)^2 \qquad (74)$$

Et alors :

$$d\zeta = \frac{1}{c}.\sqrt{g_{00}}.dx^0 \qquad (75)$$

Ce sont les relations qui déterminent les intervalles de temps réel ou encore le *temps propre* du point considéré de l'espace connaissant la variation de la coordonnée x^0 .

Notons que d'après (75) la quantité g_{00} doit être positive i.e. :

$$g_{00} > 0 \qquad (76)$$

La signification de la condition (76) est qu'un tenseur g_{ik} ne satisfait pas cette condition ne peut correspondre à aucun champs gravitationnel réel c.à.d. à la métrique de l'espace-temps réel.

Le temps s'écoulant entre deux événements quelconques se produisant en un même point de l'espace est d'après (75) :

$$\zeta = \frac{1}{c}.\int \sqrt{g_{00}}.dx^0 \qquad (77)$$

Dans un champs gravitationnel constant on aura:

$$\zeta = \frac{1}{c}.\sqrt{g_{00}}.x^0 \qquad (78)$$

Pour un champs gravitationnel faible on aura:

$$\zeta \approx \frac{x^0}{c}.\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) = \frac{x^0}{c} + \frac{\varphi.x^0}{c^3} \qquad (79)$$

Si on néglige dans toutes les équations les termes à partir de $\frac{1}{c^3}$ on aura :

$$\zeta \approx \frac{x^0}{c} \qquad (80)$$

A la limite non relativiste dans un plan de Minkowski tangent au plan de mouvement du corpuscule on a en principe $''x^0 = c.t''$ où "t" est le temps galiléen local. Donc :

$$\zeta \approx t \qquad (81)$$

Quand le corpuscule est en mouvement dans un champ gravitationnel constant, son énergie qui est la dérivée de l'action $\left(-c.\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)$ par rapport au temps de l'univers est conservée parce que x^0 ne figure pas explicitement dans l'équation du mouvement Hamilton-Jacobi. L'énergie est ainsi la composante temporelle du 4-vecteur covariant du moment $p_k = m.c.u_k = m.c.g_{ki}u^i$.

Dans un champs statique on a :

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2 \qquad (82)$$

Avec dl est la distance spatiale élémentaire :

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}.dx^\alpha.dx^\beta \qquad (83)$$

$\alpha = 1,2,3$ & $\beta = 1,2,3$

L'énergie du corpuscule est :

$$p_0 = m.c.u_0 = m.c.g_{00}u^0 = \frac{E_0}{c} \qquad (84)$$

Donc :

$$E_0 = m.c^2.g_{00}.\frac{dx^0}{ds} = m.c^2.g_{00}.\frac{dx_0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2 - dl^2}} \quad (85)$$

Nous introduisons la vitesse du corpuscule comme $u = \frac{dl}{d\zeta} = \frac{c.dl}{\sqrt{g_{00}}.dx^0}$ mesurée en temps propre.

Il vient que :

$$E_0 = \frac{m.c^2.\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (86)$$

Et alors pour un champ gravitationnel faible et en négligeons tous les termes de développement à partir de $\frac{1}{c^3}$ l'équation (86) devient :

$$E_0 \approx m.c^2 + \frac{1}{2}m.v^2 + m.\varphi - \frac{1}{2}m.\varphi.\frac{v^2}{c^2} \quad (87)$$

En effet la vitesse est :

$$u = \frac{c.dl}{(1+\frac{\varphi}{c^2}).c.dt} = \frac{dl}{dt}.\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right) = \sqrt{\frac{-g_{\alpha\beta}.dx^\alpha.dx^\beta}{dt^2}}.\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right) \approx v.(1-\frac{\varphi}{c^2})$$

A la limite d'un espace-temps plat de Minkowski on a :

$g_{\alpha\beta} = -1 \; si \; \alpha = \beta \; et \; g_{\alpha\beta} = 0 \; si \; \alpha \neq \beta$ et alors $\frac{u^2}{c^2} \approx \frac{v^2}{c^2}.(1 - 2.\frac{\varphi}{c^2}) \approx \frac{v^2}{c^2}$ d'où la justification du développement (87) . C'est comme si on se déplace dans un champ miné : la négligence est non permise. Pour arriver à (87) on a fait un premier lissage pour aboutir au plan de Minkowski tangent au mouvement du corpuscule puis un second lissage dans le plan de Minkowski pour aboutir à la forme classique de l'énergie.

Dans l'équation (87) la vitesse est come celle mesurée par Galilée (pas de contraction des longueurs ni dilatation du temps).

L'énergie du corpuscule relativiste dans un espace-temps plat de Minkowski est compte tenu de l'hypothèse de Planck pour les échanges d'énergie :

$$E_0 = \frac{m.c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + n.\frac{m.c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2 \quad (88)$$

Avec n: entier naturel positif ou négatif.

A l'approximation classique (88) de vient :

$$E_0 \approx m.c^2 + \frac{1}{2}m.v^2 + n.m.c^2.\frac{1}{4}.\frac{v^4}{c^4} \quad (89)$$

En identifiant les deux expressions de l'énergie dans (89) et (87) on aura :

$$m.\varphi - \frac{1}{2}m.\varphi.\frac{v^2}{c^2} = n.m.\frac{1}{4}.\frac{v^4}{c^2} \qquad (90)$$

Et alors en négligeant dans (90) les termes à partir de $\frac{1}{c^3}$ on aura :

$$\varphi \approx \frac{n}{4}.\frac{v^4}{c^2} = -\frac{G.M}{R} \qquad (91)$$

CQFD autrement.

6)Champs gravitationnel quantique relativiste :

Dans un champs gravitationnel faible et constant de sorte que le temps propre d'un corpuscule se confond au temps du référentiel d'inertie qui est supposé un espace-temps plat de Minkowski l'énergie d'un corpuscule est selon (86)& (81) :

$$E_0 \approx \frac{m.c^2.(1+\frac{\varphi}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (92)$$

On suppose que la vitesse du corpuscule est très proche de celle de la lumière et alors l'équation (88) devient :

$$E_0 \approx (n+1)\frac{m.c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (93)$$

En identifiant les deux équations (92) & (93) :

$$1 + \frac{\varphi}{c^2} = n+1 \qquad (94)$$

De sorte que :

$$\frac{-G.M}{R} = n.c^2 \qquad (95)$$

La différence ici est que le temps dans le référentiel est celui de Lorentz-Minkowski et pour y arriver on doit supposer que le champ est faible tout en négligeant les termes à partir de $\frac{1}{c^3}$ pour le temps propre ce qui nous a permit d'étudier le mouvement dans l'espace-temps de Minkowski juste au dessus de la conception galiléenne et juste en dessous d'un espace-temps courbé de la Relativité Générale. Autrement dit dans ce cas la vitesse de la lumière ne pourra être considérée comme infini alors que pour l'approximation classique on peut aller jusqu'à tendre la vitesse de la lumière à l'infini et alors selon (91)

aucun effet quantique ne peut apparaitre.

Pour les corpuscules relativistes les effets quantiques sont toujours apparents même pour les champs faibles.

Références :

[1] Haug « Finding the Planck length multiplied by the speed of light without any knowledge of G, c, or h, using a Newton force spring »

https://inspirehep.net/files/3b239b3c0031165b70cf28c675559625

[2] F.Faure ''Relativité Restreinte.pdf'' , Université Joseph Fourier 2002.

[3]P.Amiot&L.Marleau ''Mécanique classique II'' p.13, Université Laval, Québec , Canada 1998-2002.

[4] ANDRÉ ROT ''Sur certaines transformations canoniques en mécanique quantique'' :
http://www.numdam.org/article/AIHPA_1964__1_1_31_0.pdf

[5] L.Landau & E.Lifchitz « Physique Théorique, Théorie des champs », tome2, p37, MIR-MOSCOU

1989.

[6] A.Kouki ''Theory of vacuum'' http://viXra.org/abs/2009.0003

[7] A.Kouki ''Vacuum energy levels'' http://viXra.org/abs/2012.0008v4

[8] A.Kouki ''The hidden constants'' http://viXra.org/abs/2105.0040

[9] L.Landau & E.Lifchitz « Physique Théorique, Théorie des champs », tome2, p322, MIR-MOSCOU

1989.