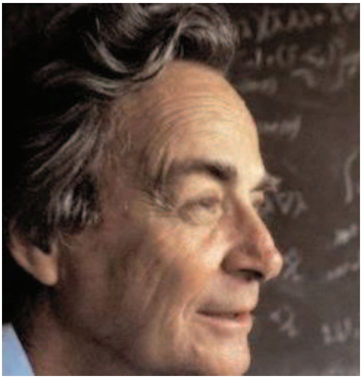
Числофизика: Праймориал - охота на Альфу = 1/137
(Physics Number: Primorial - Alpha Hunt = 1/137)

Александр Васильевич Исаев
(Alexander Vasilievich Isaev)

Abstract

«Охоту» на Альфу (постоянную тонкой структуры, равную 1/137) автор начал с самых первых своих погружений в бесконечный мир натуральных чисел, поскольку призрак Альфы (как и призраки,скажем, «магического» числа 7 ± 2, пресловутого «золотого сечения») буквально начинает мозолить глаза при исследовании Большого отрезка числовой оси (то есть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …, 8·10^60 – столько планковских времен содержится в возрасте Вселенной). И в данной работе представлена лишь небольшая часть «доказательств» этого феномена – существования указанных магических чисел (в том числе и Альфы).

The author began his "hunt" for Alpha (a constant of fine structure equal to 1/137) from his very first dives into the infinite world of natural numbers, since the ghost of Alpha (like the ghosts of, say, the "magic" number 7 ± 2, the notorious "golden ratio ») Literally starts to irritate the eyes when examining the Large segment of the numerical axis (that is, numbers: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…, 8 · 10 ^ 60 - so many Planck times are contained in the age of the Universe). And this work presents only a small part of the "evidence" of this phenomenon - the existence of the specified magic numbers (including Alpha).



Ричард Фейнман

http://www.pa.msu.edu/~hayden/Feynman.jpg

Постоянная тонкой структуры (***Альфа***) – это *безразмерная* величина, которая якобы никак не соотносится ни с какой из известных математических констант, и всегда являлась объектом восхищения для физиков. Ричард Фейнман, называл её ***«одной из величайших проклятых тайн физики: магическое число, которое приходит к нам без какого-либо понимания его человеком».***

Ричард Филлипс Фе́йнман (1918 – 1988) – выдающийся американский физик-теоретик, один из «отцов» квантовой электродинамики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1965) и многих других престижных премий и наград.

Известный немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943) как-то сказал: «Мы видим, что не только наши представления о пространстве, времени и движении коренным образом меняются по теории Эйнштейна, но автор убежден также, что основные уравнения её дадут возможность проникнуть в самые сокровенные процессы, происходящие внутри атома и, что особенно важно, ***станет осуществимым привести все физические постоянные к математическим константам***, а это, в свою очередь, показывает, что приближается принципиальная возможность ***сделать из физики науку такого рода, как геометрия***». По сути дела, именно на это и нацелена моя теория (виртуальная космология, космология чисел) – ***сделать из физики науку такого рода, как… теория чисел*** (раздел высшей математики). И если виртуальный мир чисел действительно хоть в какой-то мере «отражает», «моделирует» физический мир, то именно Альфа может являться для этих двух миров фундаментальной «*константой связи*», «*константой взаимодействия*», и это – не только игра слов.

«Охоту» на Альфу автор начал с самых первых своих погружений в бесконечный мир чисел, поскольку призрак Альфы (как и призраки, скажем, «магического» числа 7 ± 2, пресловутого «золотого сечения») буквально начинает мозолить глаза при исследовании Большого отрезка числовой оси (то есть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …, 8·10^60 – столько планковских времен содержится в возрасте Вселенной). И в данной работе представлена лишь небольшая часть «доказательств» этого феномена – существования магических чисел (в т.ч. и Альфы).

О Г Л А В Л Е Н И Е

1.	Введение (важные понятия) …………………………	4
2.	Богатство в мире чисел …………………………………	9
3.	Что такое прайм (праймориал) ……………………	13
4.	Как вычислять большой прайм ……………………...	16
5.	Порядковое время прайма ……………………………	17
6.	Праймы и... планковское время ……………..……	19
7.	Тип прайма и формула Вигерта ……………………..	20
8.	Богатство прайма, кратность его богатства ……………..	22
9.	Богатство типомаксов и праймов ……………………	26
10.	Типомаксы и… планковское время …………………	30
11.	Энтропия и негэнтропия ………………………………..	31
12.	Энтропия системы из X частиц ………………………	34
13.	Энтропия Вселенной ……………………………………….	37
14.	Энтропия прайма и отрезка числовой оси ……….……	39
15.	Мир чисел, как… фазовое пространство ………………	43
16.	Тильда (логнормальное распределение) …………………	45

«*Когда я чувствую, что не могу больше находиться в цивилизованном обществе, я спасаюсь в чистую математику… Умение мыслить математически – одна из благороднейших способностей человека… Кто возьмёт на себя смелость сказать, что математическое и логическое рассуждения не страсть!*»

Бернард Шоу (1856 – 1950)

«*Большинство так называемых культурных людей, не связанных с математикой по роду своих занятий, считает совершенно допустимым не иметь об этой науке ни малейшего представления. Математика для них – нечто в высшей степени скучное, сухое и отвлечённое…*»

Норберт Винер (1894 – 1964)

1. Введение (важные понятия)

Постоянная тонкой структуры, обычно обозначаемая как **α** (*альфа*, первая буква греческого алфавита), является *безразмерной* фундаментальной физической величиной, характеризующей силу электромагнитного взаимодействия. Она была введена в 1916 году немецким физиком Арнольдом Зоммерфельдом в качестве меры релятивистских поправок при описании атомных спектральных линий в рамках модели атома Бора, то есть характеризует так называемую тонкую структуру спектральных линий. Поэтому иногда она также называется *постоянной Зоммерфельда*.

Постоянная тонкой структуры – это *безразмерная* (что для нас очень важно) величина, образованная комбинацией фундаментальных физических констант. Её численное значение не зависит от выбранной системы единиц, с 2010 года рекомендуется использовать следующее значение (с этим значением мы и будем работать):

$$\alpha = 0{,}007\ 297\ 352\ 569\ 8 = 1/137{,}035\ 999\ 074 \approx 1/137.$$

Для краткости мы, чаще всего, будем говорить просто «Альфа». Разумеется, что при наличии интернета (Википедии – как минимум) мне нет смысла много говорить про Альфу, как и про иные широко известные понятия из физики, космологии, теории чисел. Поэтому, буду упоминать только факты, важные для понимания моих гипотез.

У Альфы есть целый ряд разных физических интерпретаций. Например, такие (в которых для нас важно слово «*отношение*»):

Альфа – это *отношение* двух угловых моментов, которые возникают в теории движения электрона по кеплеровским орбитам.

Альфа – это *отношение* скорости электрона на первой круговой орбите в боровской модели атома к скорости света.

Альфа – это *отношение* двух энергий: энергии, необходимой, чтобы преодолеть электростатическое отталкивание между двумя электронами, сблизив их с бесконечности до некоторого расстояния s, и энергии фотона с длиной волны $2\cdot\pi\cdot s$.

Альфа – это квадрат *отношения* элементарного электрического заряда (e) к планковскому заряду (q), то есть:

$$\boldsymbol{\alpha = (e/q)^2}. \quad (1.1)$$

Изменение Альфы во времени (и даже… в разных точках пространства Вселенной) – этим вопросам физики-экспериментаторы уделяют много усилий (но пока без особых достижений). Например, в 2014 году две группы ученых (из Великобритании и Германии) пришли к следующим предельным значениям изменения Альфы во времени: от –0,7·10^–17 до –0,2·10^–16 в год.

В теории электрослабого взаимодействия утверждается, что *Альфа логарифмически растёт с увеличением энергии*. Наблюдаемое в момент нашего «сегодня» значение ($1/\alpha \approx 137$) верно при нулевой энергии (порядка массы электрона или позитрона, которые обладают самыми маленькими массами среди заряженных частиц). Если бы предсказания квантовой электродинамики были верны, то Альфа принимала бы бесконечно большое значение ($1/\alpha$ – принимала бы бесконечно малое значение) при значении энергии, известном как полюс Ландау.

Планковская длина – наименьшая (фундаментальная) единица длины, принятая в современной теоретической физике. То есть в будущем физики могут придумать и такие теории, которые опустятся ниже планковской длины, равной 1,616199·10^–35 м. Эта система единиц названа в честь Макса Пл***а***нка (1858 – 1947) – немецкого физика-теоретика, основоположника квантовой физики.

Планковское время – наименьшая (фундаментальная) единица времени. Это время, за которое частица (фотон, квант света), двигаясь со скоростью света, преодолеет планковскую длину. Планковское время или (равноправное второе название) *элементарный временной интервал* (***эви***) составляет 5,39106·10^–44 сек (таким образом, 1 сек = 1,85492·10^43 *эви*). На сегодня наименьший экспериментально наблюдаемый промежуток времени составляет порядка аттосекунды (10^−18 сек), что соответствует 10^26 планковским временам (кстати, примерно столько метров в радиусе наблюдаемой Вселенной).

Феномен планковских границ – это моё условное название одного из самых поразительных открытий физики. Суть его в следующем (в предельно примитивной форме). Планковская длина является пределом расстояния, меньше которого сами понятия пространства и длины перестают существовать. Любая попытка исследовать расстояния меньше планковской длины, неизбежно закончилась бы… рождением виртуальной черной дыры. То есть на масштабах меньше планковских границ не происходит дробление вещества на всё более мелкие и мелкие кусочки, а зарождаются виртуальные черные дыры всё… большего и большего размера.

«Отражения» в мире чисел физических явлений. Самое простое «отражение» это, скажем, такая гипотеза автора: «физическую» формулу (1.1) $\alpha = (e/q)$^2 в мире чисел «отражает» похожая формула (16.2) $D = 1/(2\cdot\pi)\cdot(T/K)$^2, которую можно трактовать как некую «зашифрованную подсказку» мира чисел в части загадочной *Альфы*.

Мой расплывчатый термин «отражение» также поясню на самом любопытном примере того, как мир чисел «отражает», «моделирует» выше описанный *феномен планковских границ* (по сути дела, здесь автор уже начинает излагать основы *виртуальной космологии*). Рассмотрим два участка числовой оси, которые лежат слева и справа от числе $e = 2{,}718\ldots$ (математическая константа, которая «отражает» планковскую границу). Справа от числа ***e***, то есть на отрезке $[e;\ N]$ находятся *обычные* (мой термин) вещественные числа, а в их составе и *простые* числа (3, 5, 7, 11, 13,…), из которых, согласно *основной теореме арифметики*, строятся все прочие (*составные*) натуральные числа. А вот слева от числа ***e***, на интервале $(1;\ e)$ находятся *проточисла* (также мой термин) – вещественные числа от 1 до числа e (сами 1 и e, вообще говоря, не проточисла), в том числе и 2 – это первое простое число и большое проточисло, порождающее все чётные обычные числа. При этом важно понимать, что количество проточисел не меньше, чем количество обычных натуральных чисел, хотя интервал $(1;\ e)$ нам кажется совсем «крохотным», а малые проточисла нам кажутся крайне «неудобными» для работы (наших вычислений).

Важнейший закон *теории чисел* ($K \sim N/\ln N$) мы здесь запишем в грубой форме (со знаком точного равенства): $K = N/\ln N$, что облегчает понимание сути феномена. Так вот, из данного закона следует, что с уменьшением длины отрезка $[e;\ N]$ (то есть при уменьшении числа N), будет уменьшаться и количество (K) простых чисел на этом отрезке (что «отражает» дробление вещества в физике на всё более мелкие и мелкие кусочки). И когда наш отрезок $[e;\ N]$ уменьшится до точки на числовой оси ($N = e$, что «отражает» планковскую границу), то количество простых чисел окажется минимальным: $K = e/\ln e = e/1 = 2{,}718\ldots$.

Однако формула $K = N/\ln N$ продолжает прекрасно работать и для *проточисел*, правда, теперь величины K и N явно означают радикально иные понятия (и здесь – место неограниченной фантазии), и теперь с уменьшением N параметр K начинает… расти (как и виртуальные черные дыры в физике): $K \to \infty$ при $N \to 1$ (но $N > 1$). Кстати, отсюда следует парадоксальный вывод: единица – это простое число с бесконечно большим порядковым номером K (поскольку $1/\ln 1 = 1/0 \to \infty$); иначе говоря, *единица тождественна… бесконечности*. Столь парадоксальное утверждение «отражает» давнюю физическую гипотезу, согласно которой частица планковского размера – это также некая… бесконечная вселенная (каким является мир проточисел).

Возраст Вселенной по оценкам физиков равен 13,798 ± 0,037 миллиардов лет. Поэтому мы возьмем наиболее вероятный возраст Вселенной – 13.798.000.000 лет или 4,35133728·10^17 сек, что равно 8,07139464224104·10^60 *планковских времен* (*эви*). Примерный радиус наблюдаемой Вселенной (1,3·10^26 м или 13 миллиардов световых лет) равен 4,6·10^61 планковских длин.

Большой отрезок [e; N] на числовой оси. Его правая граница примерно равна числу $N \approx$ 8,07139464224104·10^60 – именно столько *планковских времен* (5,39106·10^–44 сек) «помещается» в возрасте Вселенной (13,798 миллиардов лет). Значит, для Большого отрезка параметр (время) $t = \ln\ln N$ = 4,94337971168489… и мы получаем $K \approx \mathrm{Li}(N)$ = 5,79692483915419·10^60 – весьма точное количество простых чисел на Большом отрезке, где Li(N) – *сдвинутый интегральный логарифм* (от числа N, произносится так: *ли большое от* N). При этом вероятность встречи с простым числом на Большом отрезке равна: K/N = 0,0071820609648082 (что всего лишь на 1,6 % меньше *Альфы*).

Альфа-отрезок [e; N] – это отрезок числовой оси, на котором вероятность встречи с простым числом будет в точности равна *Альфе* ($K/N = \alpha$). Мы вправе предположить (в качестве гипотезы, которой пока ещё нет в физике?), что имеет некий физический смысл ***альфа-время*** – это 4,86463599949134·10^–43 сек, что почти в 9 раз больше, чем планковское время. Тогда правая граница Альфа-отрезка будет равна $N \approx$ 8,94483632579084·10^59 – именно столько *альфа-времен* «помещается» в возрасте нашей Вселенной (13,798 миллиардов лет). Значит, $t = \ln\ln N$ = 4,9275695548709… и мы получаем $K \approx \mathrm{Li}(N)$ =

6,52736243484526·10^57 – количество простых чисел на Альфа-отрезке и выполняется наше условие: $K/N = \alpha$.

Гипербольшой отрезок $[e; N]$ на числовой оси. Его правая граница равна числу $N = e$^(e^t), где $t = 1/\alpha \approx 137{,}036$ (1/*Альфа*). Число N можно записать и в таком виде:

$$\boldsymbol{N = e\text{^}(e\text{^}t) = 10\text{^}(e\text{^}t/\ln 10)} \approx 10\text{^}(1{,}42\cdot 10\text{^}59), \qquad (1.2)$$

то есть *порядок* гипербольшого числа N близок к длине Альфа-отрезка. При этом $K = N/\ln N = e$^(e^$t - t$) и отношение $N/K = e$^t = 3,26571454157102·10^59 – это среднее расстояние между соседними простыми числами на Гипербольшом отрезке, и это расстояние всего лишь в 2,739 раза меньше длины Альфа-отрезка и всего лишь в 5,6 раз больше количества простых чисел на Большом отрезке.

Подчеркну, что, как минимум, просто *удобный* для работы с гигантскими отрезками параметр $t = \ln\ln N$ (это двойной логарифм числа N), автор отождествляет с понятием «***время***», которое продолжает оставаться для физиков большой загадкой [см. мою книгу «Время-2» и последующие мои работы].

Магия числа – это феномен из реального, физического мира. Например, для многих читателей совершенно очевидна *магия числа* 7±2 или *золотого сечения* (0,618 и 1,618) – эти числа то и дело «попадаются под руки» по самым разным поводам и в самых разных сферах деятельности человека. Магия иных чисел не столь очевидно, но она также угадывается. Об этом можно почитать в моей книге «Суперструны…» (глава IV, параграфы 31 – 40). В мире чисел также можно обнаружить указанную магию, примеры которой буду выделять (*зеленым цветом*) и в тексте данной книги.

Магия числа 137 (1/*Альфа*) в мире чисел – это, по сути дела, главная тема данной книги. Ранее автор даже пытался доказать, что число 137 (около этого) обладает магией не только в физике, но и в обыденной жизни (см. мою статью «Число Данбара» в «Сборнике-2012»). По сути дела, магия целого ряда чисел в мире чисел (извините за тавтологию) – это одно из самых убедительных «отражений» миром чисел физической реальности окружающего нас мира.

В рамках данной книги автор впервые обращает внимание читателей на *магию* 4±1%. Эти «магические» проценты возникают из недавнего открытия физиков: оказывается, мы видим только 4±1% от состава Вселенной. Так, согласно данным наблюдений космической обсерватории «Планк» (опубликованным в марте 2013 года) мы видим 4,9% состава Вселенной. А по данным WMAP мы видим только 4% состава Вселенной (межгалактический газ – 3,6%, а звёзды и вся прочая видимая материя – 0,4%). В мире чисел автор также находил указанные проценты – см. мои книги «Почему мы видим 4% Вселенной», «Вселенная расширяется и набирает массу» (гл. 11).

Здесь же впервые отмечу, что у Большого отрезка параметр $t = \ln\ln N \approx 4{,}9434$, что составляет 3,61% от параметра $t \approx 137{,}036$ у Гипербольшого отрезка. Но можно ли при этом говорить о такой гипотезе: видимая нами часть Вселенной (4 ± 1%) соотносится со всей Вселенной, как Большой отрезок соотносится с Гипербольшим отрезком (в части параметра $t = \ln\ln N$)?

2. Богатство в мире чисел

Богатство (S) числа N – это сумма всех его делителей (от 1 до N включительно). Важное замечание: в рамках данной книги мы говорим только о *целых* делителях натуральных чисел (иначе в тексте будут соответствующие оговорки). Богатство – это мой термин (в *теории чисел* его нет), и с этого параметра (богатство) началась моё увлечение миром чисел: просто однажды (осенью 1996 года) автор увидел на экране ПК, что доходы, то есть «богатство» населения (например, некого крупного предприятия, города, области или даже всей страны), распределяется по законам… мира чисел. Доходы населения выстраивались по возрастанию почти так же, как и все делители *тильдаобразных* чисел N (имеющих много делителей, см. гл. 16). В части доходов («богатства» населения) – см. мою книгу «Зарплата».

Тип (T) – это количество всех делителей числа N (включая 1 и само число N). Это также мой термин, как и ***типомакс*** – число N, тип которого превосходит типы всех предшествующих чисел. Иначе говоря, у типомакса N его тип T – максимально возможный на отрезке $[1; N]$ – отсюда и такое название «типомакс» (коротко и понятно). Ряд типомаксов (2, 6, 12, 24, 48, 60, 120, …) бесконечен, но в натуральном ряде типомаксы встречаются всё реже и реже. И находить (выявлять) типомаксы прямо «в лоб» – это довольно трудоемкое занятие даже с помощью компьютера (впрочем, грамотно написанная программа снимет все проблемы). Например, у меня хватило терпения найти лишь около 414 первых типомаксов вплоть до $N \approx 10$^48 (возможно, с пропусками некоторых типомаксов) и отдельные типомаксы вплоть до $N \approx 10$^60 – почти правой границы Большого отрезка.

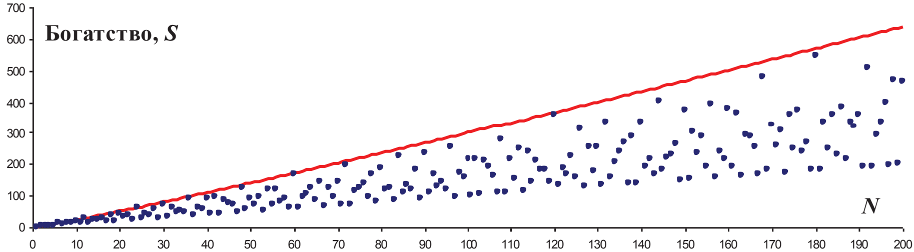


Рис. 2.1. Богатство (S) первых двухсот натуральных чисел N

Так вот, ***типомаксы – это самые богатые числа***, то есть с максимально возможным богатством S на отрезке $[1; N]$ каждый типомакс богаче всех предшествующих чисел (в том числе и всех меньших типомаксов). Достаточно большие типомаксы – это самые совершенные *тильдаобразные* числа, поскольку все их делители D (в логарифмической шкале по оси ординат), выстроенные по возрастанию, на графике образуют кривую похожую на *тильду* (~), у которой правый край приподнят. А самые «бедные» числа – это *простые числа* (P), у которых $S = 1 + P$ – это минимально возможное богатство (на рис. 2.1 по этим точкам можно было бы провести луч-границу $S_{\min}$). То есть и здесь мир чисел «отражает» реальности человеческого общества: самыми «*бедными*» оказались простые числа, которые являются… *базой*, *основой*, *фундаментом* всего мира чисел (см. основную теорему арифметики). А самые богатые типомаксы – это игра Его Величества Случая в мире чисел. Правда, это самый поверхностный, дилетантский взгляд на мир чисел, поскольку самая глубокая (и парадоксальная) истина состоит в том, что ***в мире чисел ВСЁ строго определенно, детерминировано*** (как и в физическом мире?). Впрочем, об этом автор много писал в своих книгах, статьях и здесь распространяться на эту (важнейшую!) тему не буду.

Итак, всё бесконечное множество «случайных» богатств (S) на графике (см. рис. 2.1) лежит в створе двух восходящих лучей, верхний из которых (S_{max}, красный луч) – определяют «богачи»-типомаксы, а нижний (S_{min}) – «бедняки»-простые числа. Красная линия на графике – это граница, выше которой не могут «прыгнуть» даже типомаксы, их богатства S всегда ниже красной линии (хотя рисунок ПК чуть искажает этот факт: первые точки-богатства якобы выше красной линии). Первым, по сути дела, на красную линию указал Рамануджан в 1915 году: он доказал, что при выполнении гипотезы Римана, неравенство $S < (e^\gamma)\cdot N\cdot \ln\ln N$ (неравенство Робина) выполняется для всех достаточно больших N. В 1984 году Гай Робин доказал, что это неравенство верно для всех $N \geq 5041$.

Затем Робин доказал, что для $N \geq 3$ уравнение красной линии будет таким (*формула Робина*, все реальные S будут меньше этого):

$$\boldsymbol{S = (e^\gamma)\cdot N\cdot \ln\ln N + 0{,}6483\cdot N/\ln\ln N}, \qquad (2.1)$$

где $\gamma = 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ldots$ – постоянная Эйлера-Маскерони, а коэффициент $e^\gamma = 1{,}7810724179902\ldots$. Замечу, что свою формулу для красной линии $S \approx 1{,}7724\cdot N\cdot \ln\ln N$ сам автор получил *эмпирическим* путем с помощью ПК ещё в 2002 году (см. мою книгу «Леонард Эйлер и космология чисел», гл. 2.7).

Джефри Лагариас (Jeffrey Lagarias) в 2002 году опустил красную линию ещё ниже, чем Робин (назовем её *формулой Лагариаса*):

$$\boldsymbol{S = H + e^H\cdot \ln H}, \qquad (2.2)$$

где H – *гармоническое* число с порядковым номером N:

$$\boldsymbol{H \equiv 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots + 1/N =}$$
$$\boldsymbol{= \ln N + \gamma + (1/2/N - 1/12/N^2 + \ldots)} \qquad (2.3)$$

Символ ≡ означает «равно по определению» (т.е. это ниоткуда не вытекает). А далее мы введем ещё одно удобное и важное понятие.

Кратность ($K_р$) богатства – это отношение богатства числа N к самому этому числу (превосходство богатства над самим числом):

$$\boldsymbol{K_р \equiv S/N}\ . \qquad (2.4)$$

Нетрудно убедиться, что и формула Робина, и формула Лагариаса при $N \to \infty$ приводят нас к одинаковому выражению для кратности:

$$\boldsymbol{K_р \sim (e^\gamma)\cdot \ln\ln N \approx 1{,}781\cdot t}. \qquad (2.5)$$

где $t \equiv \ln\ln N$ (двойной логарифм числа N) – очень удобный параметр, когда мы говорим о колоссальных числах N. Итак, мы приходим к «не-хитрой» истине: *кратность богатства гигантских типомаксов N рас-тет почти линейно от аргумента t*.

В конце главы ещё раз о том, как мир чисел «диктует» законы… человеческого общества. Дело в том, что у всякого типомакса $N \geq 48$ есть замечательное свойство: около $\ln N$ (штук) его первых делителей – это копия (без пропусков) начала натурального ряда: 1, 2, 3, 4,…, $\ln N$. Кстати, отсюда следует, что бесконечность (∞) делится на все натуральные числа (как и ноль). Значит, у данного типомакса около $\ln N$ его старших (наибольших, самых богатых) делителей будут, очевидно, такими: $N/1$, $N/2$, $N/3$, $N/4$,…, $N/\ln N$, и, согласно формуле (2.3), их сумма будет следующей: $S_c \approx N\cdot(\ln\ln N + \gamma)$. Таким образом, богатство (S_c) старших делителей (в количестве $\ln N$ штук) составляет такую долю от богатства (S) данного типомакса: S_c/S, при этом легко убедиться (взяв S по формуле Робина или Лагариаса), что при $N \to \infty$ отношение S_c/S устремляется к числу $1/(e^\gamma) \approx 0{,}56$ (при $N \approx 5{,}4\cdot10^{59}$ отношение $S_c/S \approx 0{,}618$, то есть минует *золотое сечение*). Это значит, что даже в бесконечно «совершенном рыночном» обществе 56% всех его богатств будет принадлежать крохотной (по количеству её членов) «экономической» элите общества – таков закон природы для человека-«разумного» (а, по сути дела, это – закон… мира чисел).

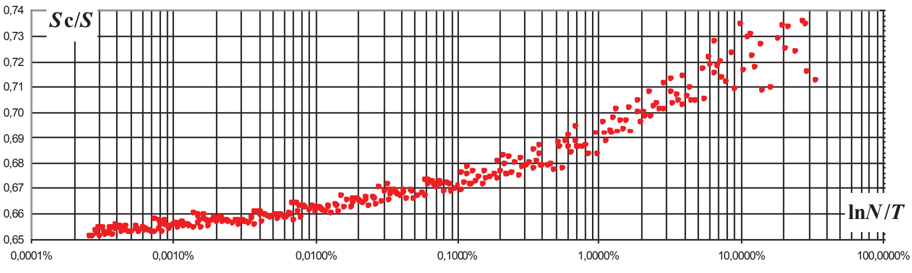


Рис. 2.2. Доля (S_c/S) богатства старших делителей у типомаксов N

Однако в реальных (ещё далеких от совершенства) социумах отношение S_c/S существенно больше 56%. Это же нам демонстрирует и мир чисел. Так, на рис. 2.2 показаны отношения S_c/S первых *реальных* типомаксов (от $N \approx 10^{31}$ до $N = 48$, которому на графике соответствует крайняя точка справа) в зависимости от доли ($\ln N/T$) их старших делителей (где $\ln N$ – примерное количество старших делителей у типомакса N, а T – реальное количество всех делителей типомакса N, иначе говоря, T – это тип данного типомакса N).

Например, на приведенном графике (на его горизонтальной оси) найдите значение $\ln N/T \approx 0{,}25\%$ – это значит, что мы будем искать суммарное богатство 0,25% всех делителей некого типомакса N. И это именно его старшие делители (и именно в том смысле, о котором говорилось выше), при этом $N \approx$ 10^13, чего из графика не видно, но также может иметь значение для наших исследований. Тогда на вертикальной оси мы считываем такой результат $S_c/S \approx 0{,}68$ (то есть 68%). А теперь перевожу всё это на человеческий язык: хотя «элита» составляет 0,25% от всего общества, «элите» принадлежит 68% всех богатств общества. Думаете это бред? Так знайте, что, скажем, в 2002 году в США всего лишь 0,25% населения сосредотачивало в своих руках 82% совокупного капитала всей страны. Как обстоят дела в России – узнайте сами. Например, сам я слышал, что 119-ти супербогатым гражданам РФ принадлежит 56% национальных богатств РФ (радио "Эхо Санкт-Петербурга", 10.02.2015 года, около 16:55). Кстати говоря, лично я потерял всякий интерес к «законам рыночной экономики» (во многом это не более, чем фикция?) после того, как окунулся в мир чисел…

3. Что такое прайм (праймориал)

На момент опубликования данной работы (конец февраля 2015 года) в Википедии есть *пустая* страница с красивым и загадочным названием «Праймориал», которая перенаправляет на страницу «Факториал» в раздел «Праймориал или примориал». А этот (почти пустой) раздел начинается словами: «Праймориал или примориал (англ. *primorial*) числа n обозначается $P_n\#$ и определяется как произведение n первых простых чисел. Например, $P_5\# = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 = 2310$.» А ещё Википедия приводит начало бесконечного ряда праймориалов: 2, 6, 30, 210, 2310, 30030, 510510, 9699690, … (последовательность A002110 в OEIS, начинается с единицы), и это – всё, что можно узнать о праймориале из Википедии. Поэтому далее идут сугубо мои собственные наработки в части праймориалов.

Переводчик Google не знает, как перевести «*primorial*», но знает слово «*prime*» (читается ***прайм***) – главный, основной,…, *простое число* (даже без добавления *number*), а также знает слово «*factorial*» – факториал. То есть термин «праймориал» – это слияние английских слов *простое число* и *факториал*. Ниже мы докажем, что с ростом старшего (наибольшего) простого числа праймориала его логарифм устремляется к… старшему простому числу. Поэтому для краткости предлагаю вместо термина праймориал употреблять термин ***прайм*** (пусть этот термин пополнит наш «профессиональный» жаргон).

Итак, ***прайм*** – это натуральное число (N), равное произведению первых K простых чисел (идущих подряд, без пропусков):

$$\boldsymbol{N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot P}. \qquad (3.1).$$

ПК позволяет вычислять «в лоб» (по формуле 3.1) вплоть до 131-го прайма $N \approx 3{,}9\cdot10\hat{\ }306$ со старшим простым числом $P = 739$ – это 131-ое простое число (в ряде всех простых чисел). Как вычислять ещё бо́льшие праймы? Для ответа на этот вопрос надо вспомнить самые основы (азы) *теории чисел*, что мы и сделаем ниже.

Формула (3.1) – это запись натурального числа N (в данном случае прайма) в *каноническом* (*факторизованном*) виде:

$$\boldsymbol{N = (2\hat{\ }Q_1)(3\hat{\ }Q_2)(5\hat{\ }Q_3)(7\hat{\ }Q_4)\cdot\ldots\cdot(P\hat{\ }Q_x)}, \qquad (3.2)$$

Только у праймов (согласно их определению) <u>все</u> показатели степени равны единице ($Q_i = 1$). В самом общем случае (для произвольного числа N) показатели степени (Q_i) могут быть любыми натуральными числами, в том числе и нулем, причем $P\hat{\ }0 = 1$ и такие простые числа (в нулевой степени) при факторизации просто не пишут (ведь число N при этом никак не изменится). Простое число в нулевой степени как бы и не участвует в построении данного числа N. Однако даже «никчёмные» единицы (в канонических разложениях) приводят нас к удивительной игре мысли (см. мою книгу «Зеркало» Вселенной», гл. 19, 20, 21). Канонический вид числа N (формулы 3.1 и 3.2) выражает суть *основной теоремы арифметики*, а именно: исключительно из простых чисел строятся все прочие (*составные*) натуральные числа. То есть наши праймы – это составные числа, причем имеющие очень много целых делителей d (помимо простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13,…, которые мы видим «сразу» – ещё в канонической записи прайма N).

Согласно важнейшему закону *теории чисел*, ***порядковый номер*** (X) простого числа (P) в ряду всех простых чисел определяется таким образом (это полезно помнить для наших исследований):

$$\boldsymbol{X \sim P/\ln P}. \tag{3.3}$$

Откуда легко выводится эквивалентный ему закон (также полезен):

$$\boldsymbol{P \sim X \cdot \ln X}. \tag{3.4}$$

то есть формула (3.4) выводится из формулы $X \sim P/\ln P$, если обе части последней прологарифмировать: $\ln X \sim \ln(P/\ln P) = \ln P - \ln\ln P$, а затем умножить на X: $X \cdot \ln X \sim (P/\ln P)\cdot(\ln P - \ln\ln P) = P\cdot(1 - \ln\ln P/\ln P) \approx P$.

В законах (3.3) и (3.4) вместо знака точного равенства (=) стоит знак тильды (~). Это вызвано тем, что в начале натурального ряда существует ***сингулярность*** – эти формулы (как ряд других законов мира чисел) вычисляют параметры с точностью лишь до порядка величины (весьма неточно). Например, для первых простых чисел $P = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ формула (3.3) выдает нам $X \sim 2{,}9;\ 2{,}7;\ 3{,}1;\ 3{,}6;\ 4{,}6;\ 5{,}1;\ 6{,}0$ (вместо реальных номеров $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$). И далее (при $P > 7$, *магия числа* 7 ± 2) формула (3.3) выдает номера X, которые меньше реальных номеров. Однако по мере нашего продвижения вдоль числовой оси (вправо от числа $e = 2{,}718$ к бесконечности) формулы (3.3) и (3.4) вычисляют всё точнее и точнее – их относительная погрешность (ОП) устремляется к нулю. Например, для $N \approx 8\cdot10$^60 (конец Большого отрезка) мы реально имеем $X \approx 5{,}7969\cdot10$^58, а формула (3.3) выдает $X \sim 5{,}7553\cdot10$^58, что всё ещё меньше реального, а относительная погрешность ОП ≈ 0,00724 (почти *Альфа*), то есть около 0,724%.

Но вот в окрестности ***числа Скьюза***, когда $P \sim$ e^(e^6,75)) ≈ 8,185·10^370, формулы уже работают весьма точно (но и тогда, вообще говоря, $X \neq P/\ln P$). Очевидно, что для архиважного числа Скьюза параметр (время) $t = \ln\ln P = 6{,}75$, что можно расценивать как очередную *магию числа* 7±2.

По мере роста правой границы $P \sim X\cdot\ln X$ отрезка [2; P] ***среднее расстояние*** ($\boldsymbol{L \equiv P/X}$) между простыми числами данного отрезка устремляется к логарифму числа P (без единицы):

$$\boldsymbol{L \sim \ln P - 1} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{L \sim \ln X + \ln\ln X - 1}. \tag{3.5}$$

Мы назовем гипотетические (лишь только воображаемые нами) простые числа *идеальными*, когда в законе $P \sim X\cdot\ln X$ вместо тильды (~) стоит знак *точного* равенства: $P = X\cdot\ln X$, где $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ –

порядковые номера идеальных простых чисел. Ясно, что идеальные простые числа – это *вещественные* числа (0; 1,386…; 3,296…; 5,545… ; …), которые с ростом их порядковых номеров $X = 1, 2, 3, 4, \ldots$ приближаются к реальным простым числам (2, 3, 5, 7, …), но никогда не достигают равенства (совпадения) с реальными простыми числами.

В рамках виртуальной космологии ***масштабный фактор*** (M) – это *расстояние* между соседними *идеальными* простыми числами:

$$\boldsymbol{M \equiv (X + 1)\cdot\ln(X + 1) - X\cdot\ln X}. \qquad (3.6)$$

Из формулы (3.6) получаем и такие интересные формулы:

$$\boldsymbol{M \approx 1 + \ln(X + 1) \approx 1 + \ln X}. \qquad (3.7)$$

$$\boldsymbol{L - M \sim \ln\ln X - 2}, \qquad (3.8)$$

Нетрудно доказать, что *масштабный фактор* (M) *близок к наиболее вероятному расстоянию между реальными простыми числами* на отрезке $[2; P]$, и чем больше порядковый номер X правой границы ($P \sim X\cdot\ln X$) данного отрезка, тем это очевиднее.

4. Как вычислять большой прайм

Если $X_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ – это порядковый номер простого числа P_i (в ряде всех простых чисел), то i-ое простое число можно записать в таком виде: $P_i \sim X_i\cdot\ln X_i$, при этом сам прайм запишется так: $N = (1\cdot\ln 1)(2\cdot\ln 2)(3\cdot\ln 3)(4\cdot\ln 4)\cdot\ldots\cdot(X\cdot\ln X)$, где X – это порядковый номер старшего простого числа P прайма N. Вычислим логарифм нашего прайма (прологарифмируем его): $\ln N = \ln(1\cdot\ln 1) + \ln(2\cdot\ln 2) + \ln(3\cdot\ln 3) + \ln(4\cdot\ln 4) + \ldots + \ln(X\cdot\ln X) = (\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln X) + (\ln\ln 1 + \ln\ln 2 + \ln\ln 3 + \ln\ln 4 + \ldots + \ln\ln X)$. Таким образом, по мере роста X, логарифм прайма N устремляется к *сумме всех* ***масштабных факторов*** (без единицы) и *сумме всех* ***времен*** на отрезке $[1; X]$. Это говорит о том, что прайм – это некий фундаментальный, архиважный феномен, который как бы *аккумулирует* важнейшие параметры мира натуральных чисел на отрезке $[1; X]$.

Нетрудно доказать самим следующие формулы из теории чисел:

$$\boldsymbol{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln X \approx X\cdot\ln X - X}. \qquad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\ln\ln 1 + \ln\ln 2 + \ln\ln 3 + \ln\ln 4 + \ldots + \ln\ln X \approx X\cdot\ln\ln X}, \qquad (4.2)$$

которые приводят нас к искомой формуле для вычисления достаточно большого прайма N (при больших порядковых номерах $X >> 1$):

$$N \approx \exp(X\cdot\ln X + X\cdot\ln\ln X - X) \quad \text{или} \quad N \sim Z\cdot e\hat{}P, \tag{4.3}$$
$$Z \equiv N/e\hat{}P \sim \exp(X\cdot\ln\ln X - X). \tag{4.4}$$
где $P \sim X\cdot\ln X$ – старшее простое число данного прайма N, а параметр Z на много порядков меньше самого прайма N (например, для 131-го прайма $N \approx 10\hat{}306$ мы получаем $Z \approx 10\hat{}33$). Поэтому можно полагать, что $Z = 1$ и пользоваться моей *эмпирической* формулой:
$$N \sim e\hat{}P/e\hat{}(P\hat{}0{,}5), \tag{4.5}$$
где P – это *реальное* старшее простое число прайма вплоть до 127-го прайма $N \approx 10\hat{}295$ ($P = 709$; $X = 127$), ну а далее можно смело полагать $P \sim X\cdot\ln X$. При этом результат по формуле (4.5) для большинства реальных P будет гораздо точнее, чем по формуле (4.3), но иногда он может превысить реальный прайм даже в 10^7 раз. Поэтому мы пишем знак тильды (~) вместо знака точного равенства (=). А вот, скажем, при $P \approx 10\hat{}60$ по формуле (4.5) получаем $N \sim e\hat{}(10\hat{}60)/e\hat{}(10\hat{}30) = e\hat{}(10\hat{}60 - 10\hat{}30) \approx e\hat{}(10\hat{}60)$, то есть знаменатель в формуле (4.5) уже теряет смысл (ведь в данном случае тонкие нюансы нас не интересуют). Поэтому для гигантских праймов (при больших $P \sim X\cdot\ln X$) мы смело полагаем:
$$N \sim e\hat{}P \sim X\hat{}X \quad \text{или} \quad P \sim \ln N. \tag{4.6}$$
То есть при $P \to \infty$ логарифм гигантского прайма ($\ln N$) устремляется к своему старшему простому числу P. Однако надо помнить, что всегда $N < e\hat{}P$, то есть всегда *реальный прайм N меньше, чем экспонента его старшего простого числа P*, поскольку в противном случае мы приходим к формуле… *Вигерта* (см. ниже гл. 7), верной только для *типомаксов*, а праймы ими не являются (кроме $N = 2, 6$).

5. Порядковое время прайма

У прайма N, как и у всякого числа, есть своё *время*: $t \equiv \ln\ln N$, а из формулы $P \sim \ln N$ для большого простого числа P мы получаем:
$$t \sim \ln P \quad \text{или} \quad t \sim \ln X + \ln\ln X. \tag{5.1}$$
Значит, время $t \equiv \ln\ln N$ прайма N устремляется к логарифму его старшего простого числа $P \sim X\cdot\ln X$, где X – это *порядковый* номер простого числа P (в ряде всех простых чисел). Отсюда следует, что время $t \equiv \ln\ln N$ устремляется к сумме двух параметров отрезка [1; X]: $M_п \equiv \ln X$ – ***порядковый*** *масштабный фактор* (уменьшенный на 1);

$t_п \equiv \ln\ln X$ – ***порядковое*** *время*, где определение «порядковое» помогает нам не путать между собой время $t_п \equiv \ln\ln X$ и время $t \equiv \ln\ln N$. Последнее, согласно формуле (5.1), по мере роста порядкового номера X, устремляется к среднему расстоянию (L) между простыми числами (увеличенному на единицу, поскольку: $L \sim \ln X + \ln\ln X - 1$).

Какова *относительная погрешность* (ОП) формулы (5.1), если в ней поставить знак точного равенства ($\ln\ln N = \ln X + \ln\ln X$)? Для ответа на данный вопрос мы рассмотрим первые 120000 реальных праймов N, а, точнее говоря, их логарифмы $\ln N = \ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ldots + \ln P$, где P = 1.583.539 – это простое число с порядковым номером X = 120000.

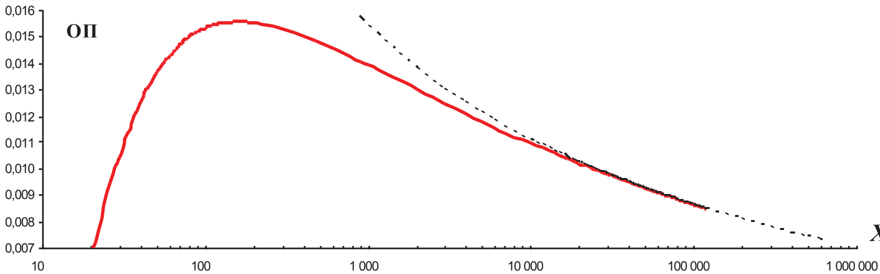


Рис. 5.1. Относительная погрешность (ОП) формулы $\ln\ln N = \ln X + \ln\ln X$

Если обозначить $t \equiv \ln\ln N$ и $t^* \equiv \ln X + \ln\ln X$, то тогда ОП $\equiv (t - t^*)/t^*$ и для X = 2, 3, 4, …, 12, 13, 14 мы получим (с точностью до 4-й цифры после запятой): ОП = 0,7855; 0,0264; –0,0212; –0,0184; –0,0176; –0,0137; –0,0119; –0,0095; –0,0061; –0,0041; –0,0018; 0,0000387; 0,0012. А все прочие значения ОП представлены на графике (см. рис. 5.1), где можно выделить такие точки:

1). Точка наибольшей погрешности: ОП = 0,01555626… при X = 170, когда P = 1013 и N = 10^421, а $t \equiv \ln\ln N \approx 6{,}8774$ (*магия числа* 7±2).

2). Точка *перегиба*, в которой выпуклый график становится вогнутым, при $X \approx 9000$, когда $P \approx 93179$ и $N \sim$ 10^40342, а $t \equiv \ln\ln N \approx 11{,}439$.

3). Точка альфа-погрешности: ОП ≈ 0,00729735212 (почти *Альфа*), при X = 615840, это если исходить из такой эмпирической формулы: **ОП ≈ 0,1385/(ln*X*)^1,1364** (пунктирная линия на графике). Вероятно, ОП ≈ 0,00052 при $X \sim$ 10^59 (но этому прогнозу уже верить опасно).

Ещё раз повторю формулу прайма N (для больших номеров X):

$$\boldsymbol{N \sim X\hat{}X} \,. \qquad (5.2)$$

Относительная погрешность (ОП) данной формулы больше, чем относительная погрешность (ОП*) формулы (5.1), изображенной на рис. 5.1. Соотношение между указанными погрешностями примерно такое: ОП ≈ $(1{,}2\cdot\ln X+1)$·ОП* и в пределах графика ОП/ОП* = 4÷17.

Из формулы (5.2) для *праймов* N вытекает обратная формула:

$$\boldsymbol{X \sim \ln N/\ln\ln N}, \tag{5.3}$$

у которой в *теории чисел* есть очень глубокое содержание (смысл): $\ln N/\ln\ln N$ – это максимально возможная *степень сложности* числа N [см. книгу «Время-2», гл. 11]. Относительная погрешность формулы (5.3) также напоминает график на рис. 5.1 и убывает после N = 223.092.870 ($P = 23$, $X = 9$), а при $\ln N \approx 1582062$ ($X = 120000$) мы получаем ОП ≈ 8,27%.

6. Праймы и… планковское время

Эви-прайм – это прайм $N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot P$, у которого порядковый номер (X) старшего простого числа (P) равен возрасту Вселенной (13,798 миллиардов лет), выраженному в *элементарных временных интервалах* (1 *эви* ≡ 5,39106·10^–44 сек). Эви – это просто короткое (и абсолютно равнозначное) название планковского времени. При этом мы получаем следующие параметры (эви-прайма N):

X = 8,07139464224104·10^60 (*эви* или *планковских времен*);
$\ln X$ = 140,2434… (масштабный фактор, уменьшенный на единицу);
$t_п \equiv \ln\ln X$ = 4,9433… (порядковое время);
$L \approx \ln X + \ln\ln X - 1$ = 144,1868… (средний радиус простых чисел);
$\ln N \approx P \approx X\cdot\ln X$ = 1,13·10^63 (масштабный фактор эви-прайма);
$N \approx$ e^P ≈ e^(1,13·10^63) ≈ 10^(4,9·10^62) (эви-прайм);
$t \equiv \ln\ln N$ = 145,1868… (время эви-прайма);
$L \approx \ln N + \ln\ln N - 1$ = 1,13·10^63 (средний радиус простых чисел).

Эви-прайм подразумевает мою новую гипотезу (звучит впервые в рамках виртуальной космологии): ***планковское время (эви) имеет внутреннюю структуру, которая всё усложняется***, и которую «отражают», «моделируют» праймы. Напомню, что у праймов N есть не только свое время ($t \equiv \ln\ln N$), но ещё есть и *порядковое* (как бы «внутреннее») время $t_п \equiv \ln\ln X$, причем по мере роста порядкового номера X сами праймы быстро усложняются. И если первый прайм N = 2 – это «всего лишь» первое *простое число* (с двумя делителями: 1 и 2), то эви-прайм – это колоссальное число порядка $N \sim 10^{(10^{62})}$, имеющее порядка $2^{(8 \cdot 10^{60})}$ целых делителей, и о котором есть что рассказать (правда, для этого не хватит целой книги, см. гл. 16).

Альфа-прайм – это прайм $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot P$, у которого параметр (время) $t = \ln\ln N = 1/\alpha \approx 137$ (1/*Альфа*). При этом мы получаем следующие параметры (альфа-прайма N):

$N = e^{(e^{(1/\alpha)})} = 10^{[e^{(1/\alpha)}/\ln 10]} \approx 10^{(1{,}418 \cdot 10^{59})}$ (альфа-прайм);

$\ln N \approx P = 3{,}26571454157102 \cdot 10^{59}$ (масштабный фактор прайма без 1);

$X \approx \mathrm{Li}(P) = 2{,}40075948531129 \cdot 10^{57}$ (точный номер простого числа P);

$\ln X = 132{,}123\ldots$ (масштабный фактор, уменьшенный на единицу);

$t_{п} \equiv \ln\ln X = 4{,}883734332\ldots$ (порядковое время);

$L \approx \ln X + \ln\ln X - 1 = 136{,}0068698\ldots$ (средний радиус простых чисел);

$L \approx \ln N + \ln\ln N - 1 \approx 3{,}26 \cdot 10^{59}$ (средний радиус простых чисел).

Альфа-прайм подразумевает гипотезу, похожую на гипотезу для эви-прайма, но только здесь ещё надо вводить некое *промежуточное время*, которое в 3362 раза больше планковского времени (*эви*). То есть в возрасте Вселенной помещается такое количество указанных промежуточных времен (равное X): $2{,}4 \cdot 10^{57}$. И каждый из этих интервалов времени «отражает» свой прайм (с номером X).

7. Тип прайма и формула Вигерта

Тип (T) натурального числа N – это количество всех его целых делителей (от 1 до N включительно). Тип – это мой термин, в *теории чисел* его нет, зато там (ещё с древних времен) есть такая теорема:

$$\boldsymbol{T = (1 + Q_1)(1 + Q_2)(1 + Q_3)(1 + Q_4) \cdot \ldots \cdot (1 + Q_x)}, \qquad (7.1)$$

где $Q_i \geq 0$ – это показатель степени i-го простого числа $P \leq N$ (в ряде всех простых чисел) в *каноническом разложении* числа N. То есть, зная *канонический вид* числа N, легко вычислить его тип T. Праймы имеют в качестве показателей степени только единицы ($Q_i = 1$), поэтому мы получаем очевидные формулы для типа прайма:

$$\boldsymbol{T = 2^X} \quad \text{или (если грубо)} \quad \boldsymbol{T \sim 2^{(P/\ln P)}}. \qquad (7.2)$$

При этом существует простейший алгоритм, позволяющий найти (породить с помощью *матрицы сочетаний*) все целые делители (все T делителей) сколь угодно большого прайма N (см. гл. 12, 14).

Если учесть нашу формулу для старшего простого числа $P \sim \ln N$ в прайме N, то мы приходим к… ***формуле Вигерта*** (см. книгу Г. Харди «Двенадцать лекций о Рамануджане», М: ИКИ, 2002, стр. 85):

$$\boldsymbol{T_{max} \sim 2\text{\textasciicircum}(\ln N/\ln\ln N) = N\text{\textasciicircum}(\ln 2/\ln\ln N)}, \qquad (7.3)$$

где T_{max} – это максимально возможное количество целых делителей у натурального числа N, и $\ln 2 = 0{,}693\ldots$. В моих терминах T_{max} – это максимально возможный ***тип*** числа N, где *тип* (T) – это количество всех целых делителей у числа N.

Таким образом, у произвольно (случайно) взятого числа N тип может оказаться равным даже двум ($T = 2$ – это тип всех *простых чисел*, которые встречаются на числовой оси до бесконечности), однако тип (T) случайно взятого числа N никогда не превзойдет T_{max}, а, точнее говоря, в крайне редких случаях тип может оказаться *порядка* числа T_{max} (близко к нему по своему *показателю степени*). Но чаще всего тип числа N будет близок к *нормальному* значению:

$$\boldsymbol{T_{н} = 2\text{\textasciicircum}\ln\ln N}, \qquad (7.4)$$

что доказано в *теории чисел*, то есть на отрезке [1; N] наиболее вероятный тип случайного числа будет близок к числу $T_{н}$. Значит, на отрезке [1; N] тип наибольшего прайма (а, тем более, *типомакса*) почти в 2^($\ln N/\ln\ln N$) раз больше наиболее вероятного типа $T_{н}$.

Любопытно, что в отличие от уже упомянутых нами законов (для простых чисел $X \sim P/\ln P$, для праймов $N \sim$ e^P), формула Вигерта в начале натурального ряда… вообще не работает. И она начинает выдавать некие правдоподобные цифры не раньше ***числа Скьюза*** (8,185·10^370). Например, ранее автор нашёл, что для $N \approx 8{\cdot}10$^60 реально имеем $T_{max} \approx 7{\cdot}10$^11 (почти триллион целых делителей), а формула Вигерта (7.3) выдает $T_{max} \sim 346.556.559$, что на 4 порядка меньше (вот поэтому мы и говорим, что Вигерт ещё «не работает»).

Короче говоря, точное «попадание» нашей *оценочной* формулы для прайма ($P \sim \ln N$) в формулу Вигерта доказывает принципиальную верность оценочной формулы, которая не учитывает «всего лишь» некие нюансы мира чисел. А он весь соткан из подобных нюансов – именно в них и заключается вся тайна и прелесть мира чисел. Данный феномен мира чисел и «отражает», «моделирует» так называемую ***тонкую настройку*** реального мира, о которой нередко говорят и физики-теоретики.

Типомакс – это натуральное число N, у которого его тип T превосходит типы у всех предыдущих чисел. Ряд типомаксов бесконечен, но в ряде всех чисел они встречаются всё реже и реже (как и простые числа): $N = 2, 6, 12, 24, 48, 60, 120, 180, 240, 360, \ldots$. Типы именно этих чисел (типомаксов) определяют на графике линию T_{max}, которая словно крыша накрывает все возможные типы чисел, «случайным» образом появляющихся в диапазоне от $T = 2$ (у всех простых чисел) до T_{max} (у типомаксов).

Только два первых типомакса являются праймами ($N = 2, 6$). Но с помощью ПК можно сравнить типы T у близких по числовому значению типомаксов и праймов. Указанный анализ показывает, что отношение T_{max} к типу T у прайма (N) растет по закону:

$$\boldsymbol{T_{max}/T \sim 0{,}5 \cdot (\ln N)\text{^}0{,}5}. \qquad (7.5)$$

Например, у колоссального прайма $N \approx e\text{^}P = e\text{^}(e\text{^}137)$ мы получаем $\ln N \approx P = e\text{^}137 \approx 3{,}2657 \cdot 10\text{^}59$. Тогда из формулы (7.5) мы получаем: $T \sim T_{max}/[0{,}5 \cdot (\ln N)\text{^}0{,}5] \sim T_{max}/10\text{^}29$, то есть тип T нашего прайма N в $10\text{^}29$ раз меньше, чем T_{max}. Однако в данном примере сам $T_{max} \sim 2\text{^}(\ln N/\ln\ln N) \sim N\text{^}(\ln 2/\ln\ln N) \sim 10\text{^}(10\text{^}57)$. Поэтому $T \sim T_{max}/10\text{^}29 \sim 10\text{^}(10\text{^}57)/10\text{^}29 \sim 10\text{^}(10\text{^}57 - 29) \sim 10\text{^}(10\text{^}57)$. Значит, тип T у нашего колоссального прайма N действительно «достаточно близок» к T_{max}, что и требовалось доказать. Поэтому формула (7.5) вполне годится для наших нехитрых рассуждений.

8. Богатство прайма, кратность его богатства

Напомню, что *богатство* (S) числа N – это сумма всех его делителей (включая 1 и само N, см. гл. 2). Ещё в 1655 г. известный английский математик Джон Валлис (1616 – 1703) вывел формулу для богатства натурального числа N:

$$\boldsymbol{S = \prod [P_i\text{^}(Q_i + 1) - 1]/(P_i - 1)}, \qquad (8.1)$$

где Q_i – это *показатель степени* простого числа P_i в каноническом разложении числа N; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, X$ – порядковые номера простых чисел в каноническом разложении данного числа N; а $\prod$ – это произведение i (штук) таких отношений: $[P_i\text{^}(Q_i + 1) - 1]/(P_i - 1)$.

Прайм – это натуральное число N (пусть даже с самыми замечательными свойствами), поэтому к нему применима формула Валлиса (где $Q_i \equiv 1$ – согласно определению прайма). Поэтому в формуле (8.1) мы получим: $(P_i\hat{}2 - 1)/(P_i - 1) = (P_i + 1)$. Таким образом, богатство S прайма N (со старшим простым числом P) будет равно:

$$\boldsymbol{S = (2 + 1)(3 + 1)(5 + 1)(7 + 1)\cdot\ldots\cdot(P + 1)}. \qquad (8.2).$$

Из формулы (8.2) следует, что *богатство* (S) всякого прайма N – это ***тип*** (T) *бесконечного* количества неких колоссальных чисел, например, таких (где P_z – любое простое число, превышающее P):

$$\boldsymbol{N_z = (P_z\hat{}2)(P_z\hat{}3)(P_z\hat{}5)(P_z\hat{}7)\cdot\ldots\cdot(P_z\hat{}P) = P_z\hat{}(\Sigma_P)}. \qquad (8.3)$$

где $\Sigma_P = 2 + 3 + 5 + 7 +\ldots+ P$ – это сумма всех простых чисел, порождающих наш прам N. Согласно теории чисел: $P \sim x\cdot\ln x$, где $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ – это порядковый номер x-го простого числа в ряду всех простых чисел. А из таблицы неопределенных интегралов мы знаем, что $\int x\cdot\ln x\, dx = x\hat{}2(\ln x/2 - 1/4)$. При $P \to \infty$ можно полагать, что $\Sigma_P \to \int x\cdot\ln x\, dx$, поэтому сумму простых чисел можно найти так:

$$\boldsymbol{\Sigma_P = 2 + 3 + 5 + 7 +\ldots+ P \approx X\hat{}2\cdot(\ln X/2 - 1/4)}, \qquad (8.4)$$

где X – это порядковый номер старшего простого числа P (из всех суммируемых и порождающих наш прайм N). Модуль относительной погрешности формулы (8.4) убывает довольно медленно, так, для суммы первых $X = 60000$ простых чисел, мы получим $|\text{ОП}| \approx 13{,}26$ %.

Формула (8.2) говорит о том, что богатство S прайма N близко к значению прайма ($S \approx N$), однако всегда $S > N$. Учитывая эту особенность богатства праймов (близость S к N), ниже мы вспомним удобное понятие о кратности богатства.

Кратность ($K_р$) богатства – это отношение богатства числа N к самому этому числу (превосходство богатства над самим числом):

$$\boldsymbol{K_р \equiv S/N}\,. \qquad (8.5)$$

Для прайма $N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot P$ мы можем легко вычислить *логарифм* кратности богатства: $\ln(K_р) = \ln(S/N) = \ln S - \ln N = \ln\{\prod(P_i + 1)\} - \ln\{\prod P_i\} = \Sigma \ln(P_i + 1) - \Sigma \ln P_i = \Sigma \ln[(P_i + 1)/P_i] = \Sigma\ln(1 + 1/P_i)$. В математике известно, что если $-1 < x \le 1$, то логарифмическую функцию $\ln(1 + x)$ можно разложить в следующий степенной ряд:

$$\boldsymbol{\ln(1 + x) = x - x\hat{}2/2 + x\hat{}3/3 - x\hat{}4/4 + x\hat{}5/5 - \ldots} \qquad (8.6)$$

Поскольку $-1 < 1/P_i < 1$, значит, $\ln(1 + 1/P_i) \approx 1/P_i$, и мы получаем:

$$\boldsymbol{\ln(K_р) \approx 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + \ldots + 1/P}. \qquad (8.7)$$

Ещё великий Гаусс в 1796 году нашёл, а затем, спустя 78 лет, Мертенс доказал такую формулу (формула Гаусса-Мертенса):

$$1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + \ldots + 1/P = \mathbf{\ln\ln} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{M}_{\text{м}} + \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (8.8)$$

где $M_{\text{м}}$ = 0,261497212847642… константа Мейсселя – Мертенса, а поправка ε устремляется к нулю по мере роста P. По моим оценкам:

$$\varepsilon \approx 0{,}2649/P\text{^}0{,}6012, \qquad (8.9)$$

и реальная поправка ε может превышать значение, полученное по моей формуле (8.7) всего лишь в 0,3 ÷ 1,8 раз (при P = 283 ÷ 746773).

Чтобы лучше понимать происхождение (природу) формулы Гаусса-Мертенса приведу такие рассуждения. Из *теории чисел* мы знаем, что $P \sim X\cdot\ln X$, где X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, … – это порядковый номер простого числа P в ряду всех простых чисел. Поэтому при $P \to \infty$ можно полагать следующее: $\Sigma(1/P) \sim \Sigma[1/(X\cdot\ln X)] \to \int dX/(X\cdot\ln X) = \ln\ln X$ (см. таблицы неопределенных интегралов). Но, опять же из теории чисел, мы знаем, что $X \sim P/\ln P$, поэтому $\Sigma(1/P) \sim \ln\ln X \sim \ln\ln(P/\ln P) = \ln(\ln P - \ln\ln P) \approx \ln\ln P$, вот мы и получили *почти* формулу (8.8). Однако за этим «почти» кроется целая пропасть хитроумных знаний и масса всяких тонкостей высшей математики.

При выводе формулы (8.7) мы ограничились первым членом *бесконечного* степенного ряда (8.6), приняв допущение $\ln(1 + 1/P_i) \approx 1/P_i$. Поэтому более точной (по крайней мере от P = 17 до P = 746773) будет такая эмпирическая формула (которую просто увидел на ПК):

$$\mathbf{\ln}(\boldsymbol{K}_{\mathbf{р}}) \approx \mathbf{\ln\ln}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{M}_{\text{м}} + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{A}, \qquad (8.10)$$

где найденная мной поправка (разумеется, в качестве гипотезы):

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_{\text{м}} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{\ln(\pi\text{^}2/6)} = 0{,}181981850416855\ldots . \qquad (8.11)$$

При этом модуль относительной погрешности формулы (8.10) убывает по закону: $|\text{ОП}| < 28/t\text{^}5$ (что говорит в пользу моей поправки A), где $t \equiv \ln\ln N$ – двойной логарифм прайма со старшим простым P.

Для достаточно больших праймов N (с большим старшим простым числом $P >> 1$) верна такая оценка $P \sim \ln N$, поэтому из формул (8.10) и (8.11) получаем (пренебрегая поправкой ε): $K_{\text{р}} \approx \exp[\ln\ln\ln N + \gamma - \ln(\pi\text{^}2/6)]$. Итак, кратность богатства прайма N:

$$\boldsymbol{K}_{\mathbf{р}} \equiv \boldsymbol{S}/\boldsymbol{N} \approx \mathbf{e\text{^}}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{/(\pi\text{^}2/6)\cdot\ln\ln}\boldsymbol{N} \approx \mathbf{1{,}08276}\cdot\boldsymbol{t}, \qquad (8.12)$$

где $t \equiv \ln\ln N$ (двойной логарифм прайма N со старшим простым числом P). Например, для 60000-го прайма $N \approx e\text{^}745512$ (старшее простое число P = 746773) формула (8.12) нам дает $K_{\text{р}} \equiv S/N \approx 14{,}641$, что на 0,018% меньше реальной кратности. По формуле (8.12) при t =

126,561492382366 [то есть при $N \sim 10\char`^(10\char`^55)$] мы получаем $K_р \equiv S/N \approx$ 137,035999074306 (1/*Альфа*).

Если прайм $\boldsymbol{N = 10\char`^(10\char`^Z)}$, то это значит, что $N = e\char`^(e\char`^t)$, где $t = Z{\cdot}\ln 10 + \ln\ln 10 \approx 2{,}3026{\cdot}Z$, и, с учетом $K_р \approx 1{,}08276{\cdot}t$, мы получаем:

$$\boldsymbol{K_р \equiv S/N \approx 2{,}4932{\cdot}Z}. \qquad (8.13)$$

Вот некоторые (полезные для физиков-теоретиков?) значения:

$N = 10\char`^(10\char`^12)$; $t = 28{,}46505356$; $K_р \equiv S/N \approx 30{,}82088$;

$N = 10\char`^(10\char`^90)$; $t = 208{,}0666908$; $K_р \equiv S/N \approx 225{,}28675$;

$N = 10\char`^(10\char`^120)$; $t = 277{,}1442436$; $K_р \equiv S/N \approx 300{,}08131$;

$N = 10\char`^(10\char`^123)$; $t = 284{,}0519989$; $K_р \equiv S/N \approx 307{,}56077$.

Итак, формула (8.12) говорит нам, что у гигантских праймов N кратность их богатства ($K_р \equiv S/N$) численно почти равна параметру t. Поэтому формулу (8.12) полезно переписать в таком виде:

$$\boldsymbol{K_р - t \approx 0{,}08276{\cdot}t}\ . \qquad (8.14)$$

И формула для разности ($K_р - t$) действительно верна (она работает с относительной погрешностью ОП < 0,5931%), но только начиная, скажем, с $t \approx 11{,}9984$, что соответствует 14926-ому колоссальному прайму $N \approx e\char`^162495$ (со старшим простым числом P = 162907), у которого $K_р \approx 12{,}9971$. А до этой (довольно условной) границы $t \approx 12$ реальная разность ($K_р - t$) у праймов ведет себя значительно интереснее. Вот, что автор получил после исследований на ПК:

$$\boldsymbol{K_р - t \approx - 0{,}001215{\cdot}t\char`^3 + 0{,}0369{\cdot}t\char`^2 - 0{,}2968{\cdot}t + 1{,}3404}. \qquad (8.15)$$

Это кубическое уравнение (относительно параметра t), которое ПК выдает в качестве линии тренда реальных разностей ($K_р - t$). Формула (8.15) работает довольно точно: при $t > 2$ имеем ОП < 10%; при $t > 3{,}26$ имеем ОП < 2%; при $t > 6$ имеем ОП < 1%.

Реальная разность ($K_р - t$) сначала убывает (красная линия на рис. 8.1) от значения ($K_р - t) \approx 1{,}8665$ (у прайма $N = 2$) до своего минимального значения $(K_р - t)_{min}$ = **0,61383491416963** (почти *золотое сечение*) при $t \approx 5{,}39865$. Этот минимум наблюдается у 52-го прайма $N \approx 1{,}062{\cdot}10\char`^96$ со старшим простым числом P = 239, у которого $K_р \approx 6{,}0125$ (*магия числа* 7±2). А затем разность ($K_р - t$) начинает свой бесконечный рост: сначала близко к кубическому уравнению (8.15), а потом (после $t \approx 12$) уже по прямой линии с уравнением (8.14) – синяя линия на графике. При этом наше кубическое уравнение (8.15)… перегибается и уходит вниз (пунктирная линия на графике). Как некое проявление *магии числа* 7±2 можно принять и тот факт, что наша синяя линия, уходя влево от точки $t \approx 12$, пересекает воображаемую горизонтальную линию минимума $(K_p - t)_{min} \approx 0{,}6138$ при $t \approx 7{,}4185$.

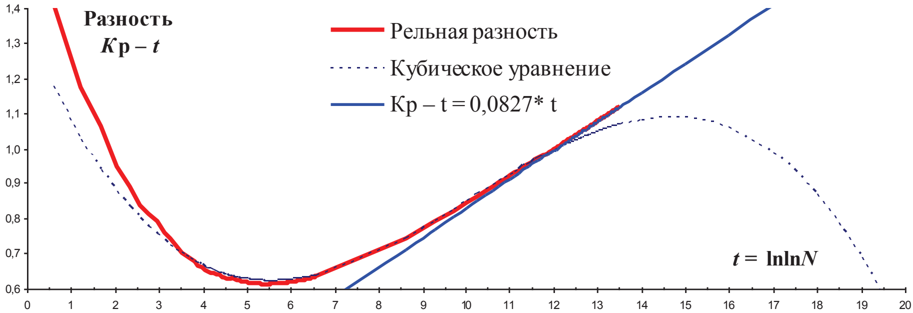


Рис. 8. 1. Разность между кратностью $K_p = S/N$ и параметром t у праймов N

График *реальной* разности $(K_p - t)$, приведенный на рис. 8.1, раскрывает нам, вероятно, некий ***важнейший и тончайший аспект*** с точки зрения виртуальной космологии (аспект, о котором мы сейчас гадать не будем). Но даже один это график лично мне почему-то подсказывает, что мир чисел если и «отражает» физику Мироздания, то возрасту (размерам) Вселенной соответствует параметр $t \equiv \ln\ln N$, лежащий справа (то есть «после») не только дна нашей «красной ямы» на графике (параметры дна: $t \approx 5{,}4$ или $N \approx 10$^96), но даже «после» начала линейного роста (разности: $K_p - t \approx 0{,}08276 \cdot t$) в условной точке: $t \approx 12$ или $N \approx$ e^(e^12). Последнее число по «внешнему виду» похоже на число 10^(10^12), связанное с размером Вселенной в конце процесса инфляции. Правда, $N \approx$ e^(e^12) ≈ 10^70566, что почти в 10^(10^12) раз меньше числа 10^(10^12).

9. Богатство типомаксов и праймов

Выше (см. гл. 2 рис. 2.1) мы установили, что уравнение *красной линии* (недостижимой границы) для богатства типомаксов будет таким: $S_т$ = e^γ·N·lnln$N$. Так вот, пусть это $S_т$ будет богатством гипотетического типомакса N, который численно якобы равен прайму N (на самом деле число $N > 6$ не может быть одновременно и праймом и типомаксом). Ещё мы установили, что при $N \to \infty$ богатство прайма N устремляется к такому выражению: $S_п \approx e^\gamma/(\pi^2/6) \cdot N \cdot \ln\ln N$. Поэтому для данного прайма N отношение богатства условного типомакса ($S_т$) к богатству прайма ($S_п$) устремляется к числу $\pi^2/6$:

$$\boldsymbol{S_т/S_п \sim \pi^2/6} = 1{,}64493406684823\ldots \quad (9.1)$$

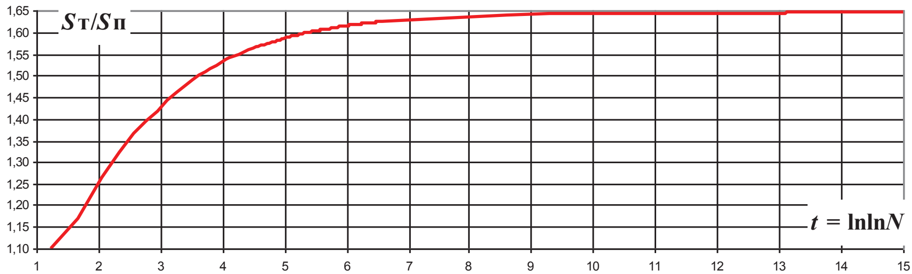


Рис. 9.1. Характер сближения отношения $S_т/S_п$ с числом $\pi^2/6 = 1{,}64\ldots$

На рис. 9.1 показан график роста отношения $S_т/S_п$ для реальных праймов N (их реальных богатств $S_п$). Когда у отношения $S_т/S_п$ относительная погрешность (ОП в части достижения числа $\pi^2/6 = 1{,}64\ldots$) ближе всего к Альфе? Указанная ОП $\approx 0{,}0072977$ (чуть больше *Альфы*) достигается у 259-го прайма $N \approx e^{1609{,}44}$ (со старшим простым числом $P = 1637$) когда $t \approx 7{,}383641559$ и $K_р \equiv S/N \approx 8{,}05544$ (*магия числа* 7±2). Ну и, разумеется, нельзя не отметить, что само число $\pi^2/6 = 1{,}64\ldots$ – это «триумфальный гимн» мира чисел пресловутому *золотому сечению*. Но, с моей точки зрения, это законы мира чисел (*теории чисел*, виртуальной космологии) триумфально шествуют по делам человеческим и феномен, красиво называемый «золотым сечением», – только… бледная тень законов мира чисел.

Ещё в конце 1998 года автор эмпирическим путем (с помощью ПК) установил следующий закон мира чисел (которого пока не нашел в общеизвестной *теории чисел*): на отрезке [1; N] с ростом N отношение суммы (Σ_N) всех натуральных чисел к сумме (Σ_D) всех целых делителей (у всех N чисел) устремляется к числу $\pi^2/6$:

$$\boldsymbol{\Sigma_N/\Sigma_D \sim \pi^2/6}, \quad (9.2)$$

Модуль относительной погрешности формулы (9.2) быстро убывает по закону: |ОП| < $2/N$, и это также – моя оценка скорости сближения отношения Σ_N/Σ_D с числом $\pi^2/6$. Уже при $N = 111$ мы получим |ОП| = 0,007281 (ближайшее значение к *Альфе*).

А теперь приведу некоторые пояснения в части формулы (9.2). Во-первых, даже многим школьникам известна формула:

$$\mathbf{\Sigma_N = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \mathit{N} = (1 + \mathit{N})\cdot \mathit{N}/2}. \tag{9.3}$$

Поскольку $\Sigma_N = (1 + N)\cdot N/2 = N^2/2 + N/2 \approx N^2/2$, то при больших N сумма всех натуральных чисел от 1 до N почти равна ***половине площади квадрата*** со стороной равной числу N (и это всегда будет меньше реальной суммы Σ_N). Во-вторых, сумму всех делителей на отрезке [1; N] я вычислял с помощью ПК по точной формуле:

$$\mathbf{\Sigma_D = A(\mathit{N}/1)\cdot 1 + A(\mathit{N}/2)\cdot 2 + A(\mathit{N}/3)\cdot 3 + A(\mathit{N}/4)\cdot 4 + \ldots + A(\mathit{N}/\mathit{N})\cdot \mathit{N}}, \tag{9.4}$$

где A(x) – функция *антье*, выделяющая целую часть аргумента x. Если отказаться от функции антье, то получаем: $\Sigma_D \approx N\cdot N = N^2$ – это ***площадь квадрата*** со стороной равной числу N (и это всегда будет больше реальной суммы Σ_D). Таким образом, мы сразу («навскидку») можем сказать, что **Σ_N/Σ_D – *это отношение неких площадей***, и оно устремляется к числу, которое будет не меньше 0,5, а реальный предел ($\pi^2/6$) отношения Σ_N/Σ_D действительно превосходит число 0,5 почти в 3 раза (см. также мою книгу «Параллельные миры II…», гл. 1.4. Законы Пирамиды).

Так вот, отношение, с которого мы начали данную главу, $\boldsymbol{S_т/S_п}$ – ***это также отношение неких площадей***, поскольку $\ln\ln N$ – это площадь под кривой, имеющей уравнение $1/(N\cdot\ln N)$, об этом говорит нам таблица неопределенных интегралов: $\int dx/(x\cdot\ln x) = \ln\ln x$. Это значит, что при $N \to \infty$ сумма ***экзочисел*** $\Sigma_э = 1/(2\cdot\ln2) + 1/(3\cdot\ln3) + 1/(4\cdot\ln4) + 1/(5\cdot\ln5) + 1/(6\cdot\ln6) +\ldots+ 1/(N\cdot\ln N) = 0{,}721\ldots+ 0{,}303\ldots+ 0{,}180\ldots+ 0{,}124\ldots+ 0{,}093\ldots + 1/(N\cdot\ln N)$ устремляется к площади $\ln\ln N$, то есть можно записать $\Sigma_э \sim \ln\ln N$. Правда, это происходит относительно медленно, например, при $N = 65500$ мы получим сумму экзочисел $\Sigma_э \approx 3{,}2$, хотя $\ln\ln N \approx 2{,}4$. Из теории чисел мы знаем, что если N – это порядковый номер простого числа P (в ряде всех простых чисел), то тогда $P \sim N\cdot\ln N$, то есть экзочисло $Э = 1/(N\cdot\ln N)$ это число, обратное N-ому простому числу. Итак, скажем, богатство гигантского типомакса N мы вычисляем по формуле $S_т = e^\gamma\cdot N\cdot\ln\ln N$, согласно которой некая мизерная площадь (lnln$N$) берется гигантское количество раз (N раз), а потом ещё увеличивается в e^γ ≈ 1,78 раза, причем площадь (lnln$N$) численно устремляется к сумме исчезающе малых экзочисел, которые – обратные простым числам (вплоть до N-го простого числа). Параметр макромира (богатство гигантского типомакса) определяется параметром микромира (суммой экзочисел, близких к нулю) – это явное «отражение» миром чисел законов реального Мироустройства.

Ещё добавлю несколько слов о самом числе π^2/6. Во-первых, π^2/6 – это сумма бесконечного числового ряда:

1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + … = π^2/6. (9.5)

Во-вторых, рассмотренный закон (ΣN/ΣD ~ π^2/6), очевидно, эквивалентен результату, полученному в работах Ж. Бюффона (1707–1788) и П. Л. Чебышева (1821–1894): если наугад (случайным образом) выписать *два* натуральных числа, то вероятность их *взаимной простоты* будет равна 6/π^2 = 0,6079… (опять пресловутое *золотое сечение*). Целые числа называются *взаимно простыми*, если они не имеют общих делителей, кроме 1. Например: числа 4 и 9 или 14 и 25 взаимно просты – у них нет общих делителей; а вот числа 15 и 25 не взаимно просты (у них общий делитель 5). Наглядное представление (см. рис. 9.2): если на плоскости построить решетку («лес»), установив на точки с целыми координатами «деревья» нулевой толщины, то из начала координат видны только деревья, координаты которых взаимно просты. Так, числа 4 и 9 взаимно простые, следовательно, диагональ решетки 4 на 9 (то есть красная прямая линия, имеющая уравнение $y = 4/9 \cdot x$) не пересекает других точек решетки.

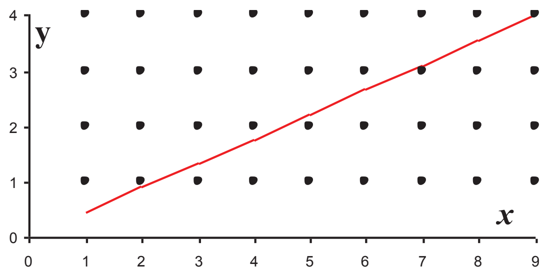


Рис. 9.2. Решетка («лес» из «деревьев» нулевой толщины)

Материал данной главы подсказывает нам, что если число N – это *типомакс* или *прайм*, то в нем (или в *паре* ближайших друг к другу типомаксе и прайме) как бы «зашифрована» очень важная информация о самом отрезке [1; N], сколь большим он бы не был.

10. Типомаксы и… планковское время

Начну с описания своего нового «открытия» – как с помощью праймов вычислять количество типомаксов на отрезке [2; N].

На ПК легко найти все праймы: **2**, **6**, **30**, **210**, **2310**,… (их номера $X = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$) и так далее вплоть до 37-го прайма $N \approx 3{,}54 \cdot 10$^61 (старшее простое число $P = 157$, у которого $X = 37$). А вот найти все типомаксы, не превосходящие (всего лишь) 37-й прайм, – это довольно трудоемкая задача. Тем не менее, ранее я нашел 702 таких типомакса: 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520,… (причем в конце отрезка [2; N] возможны неточности и пропуски некоторых типомаксов). Эти исходные данные позволили мне установить закон роста *количества* (K_x) *типомаксов между соседними праймами*: от прайма с порядковым номером X до прайма с номером (X+1). При этом для номеров $X = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots$ получаются соответствующие количества типомаксов: $K_x = 2, 3, 5, 6, 8,\ldots$ (точки на рис. 10.1), что позволяет построить линию тренда (для $X = 2 \div 37$):

$$K_x = 9{,}3254 \cdot \ln X - 6{,}2861. \qquad (10.1)$$

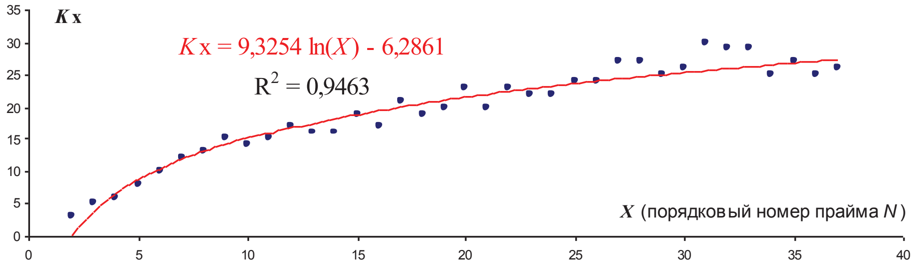


Рис. 10.1. Количество (K_x) типомаксов от X-го прайма до последующего прайма

После этого остается только просуммировать все K_x (для всех $X = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots$). Если принять допущение, что с ростом X сумма логарифмов ($\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ldots$) устремляется к значению интеграла $\int \ln x \, dx = x \cdot (\ln x - 1)$, то мы приходим к такому выражению для *примерной оценки* количества ($K_т$) типомаксов на отрезке [2; N]:

$$\mathbf{K_т \sim 9{,}3254 \cdot X \cdot (\ln X - 1) - 6{,}2861 \cdot X}, \qquad (10.2)$$

где X – порядковый номер *прайма* N, то есть X – это порядковый номер старшего простого числа P (в ряде всех простых чисел) у данного прайма N. При $X = 37$ формула (10.2) выдает нам $K_т = 668$ вместо реального количества $K_т = 702$ (типомакса), однако с дальнейшим ростом X модуль относительной погрешности (ОП) формулы (10.2) убывает, вероятно, близко к закону: $|ОП| < 1/X$.

Таким образом, теперь мы способны оценить количество типомаксов ($K_т$) на колоссальном отрезке $[2; N]$, у которого правая граница N – это ***альфа-прайм*** $N = 2·3·5·7·11·13·…·P ≈$ e^(e^(137)) ≈ 10^(1,418·10^59), то есть $t \equiv \ln\ln N = 1/\alpha = 137{,}035999074306$ (1/*Альфа*). И у этого альфа-прайма N старшее простое число P имеет такой порядковый номер: $X ≈$ 2,40075948531129·10^57 (см. гл. 6). При этом формула (10.2) выдает нам следующее количество типомаксов: $K_т \sim$ 2,92·10^60. Полученное число близко к количеству *планковских времен* в возрасте Вселенной, что также (как и в гл. 6) наводит на мысль о существовании некой внутренней структуры у планковского времени. То есть «течение» физического времени – это, возможно, поток планковских времен (их «отражают» *праймы* или *типомаксы*), которые к моменту нашего «сегодня» чудовищно усложнили (увеличили, преумножили и т.п.) свою внутреннюю структуру.

11. Энтропия и негэнтропия

Энтропи́я (от др.-греч. ἐντροπία – поворот, превращение) – широко используемый в естественных и точных науках термин. Впервые введён в рамках термодинамики как функция состояния термодинамической системы, определяющая меру необратимого рассеивания энергии. В статистической физике энтропия является мерой вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния. В теории информации ***энтропия – это мера количества информации***, например, если беспорядочно перемешать все буквы на данной странице, то информация, полученная читателем, устремляется к нулю. В широком смысле, в каком слово часто употребляется в быту, энтропия означает меру неупорядоченности системы: чем больше «хаос» (беспорядок), тем выше энтропия.

Энтропия устанавливает связь между макро- и микро-состояниями. Особенность данной характеристики заключается в том, что *энтропия – это единственная функция в физике, которая показывает направленность процессов*. Поскольку энтропия является функцией состояния, то она не зависит от того, как осуществлён переход из одного состояния системы в другое, а определяется только начальным и конечным состояниями системы. Энтропия (E) термодинамической системы определяется как натуральный логарифм (ln) от *числа различных микросостояний* (Z), соответствующих данному макроскопическому состоянию (знаменитая *формула Больцмана*, опубликованная им в 1872 году):

$$\boldsymbol{E = \ln Z}. \tag{11.1}$$

Эта формула, как и последующие наши формулы в части энтропии, приведены в так называемой *естественной системе единиц*, где коэффициент Больцмана (k) равен единице (иначе нам пришлось бы писать так: $E = k \cdot \ln Z$).

В формуле Больцмана параметр Z следует наделять смыслом «вероятность состояния системы». Поясним это на примере, используя понятия макросостояния и микросостояния. Рассмотрим систему, состоящую из 4-х молекул, скажем, куб пространства, мысленно разделенный на две половины (левая и правая), а каждая из 4-х молекул (a, b, c, d) с равной вероятностью может находиться в левой или правой половине куба. Сугубо комбинаторно возможны 5 макросостояний системы (и в каждом – свои микросостояния):

1). abcd|… (молекулы слева, имеем только одно микросостояние);
2). …|abcd (молекулы справа, хаос системы также минимальный);
3). a|bcd; b|acd; c|abd; d|abc (одна молекула слева и три – справа);
4). bcd|a; acd|b; abd|c; abc|d (три молекула слева и одна – справа);
5). ab|cd; ac|bd; ad|bc; bc|ad; bd|ac; cd|ab (слева и справа – поровну).

Значит, всего мы имеем 1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16 равновероятных микросостояний, причем вероятности (Z) в каждом из пяти макросостояний таковы: 1/16; 1/16; 4/16; 4/16; **6/16** (это максимум) или 0,0625; 0,0625; 0,2500; 0,2500; **0,3750**. То есть вероятности (Z) пропорциональны количеству соответствующих им микросостояний (*статистическому весу* конкретного макросостояния). Именно эта вероятность Z (в указанном здесь смысле) и фигурирует в формуле Больцмана (11.1).

Чем больше микросостояний (хаос) в данном макросостоянии, тем больше вероятность Z этого макросостояния и тем больше его энтропия E (согласно формуле Больцмана). Поэтому можно говорить, что ***энтропия – мера хаоса (беспорядка) в системе***.

Негэнтропи́я – философский термин, образованный добавлением отрицательной приставки нег- (от negative) к понятию энтропия, и обозначающий его противоположность. В самом общем смысле противоположен по смыслу энтропии и означает *меру упорядоченности и организованности системы* или качество имеющейся в системе энергии. Впервые понятие «отрицательной энтропии» предложил ещё в 1943 году австрийский физик Эрвин Шредингер в популярной книге «Что такое жизнь?». Позже американский физик Леон Бриллюэн в своей работе «Научная неопределенность и информация» сократил термин «отрицательная энтропия» до слова ***негэнтропия*** и ввел его в таком виде при помощи негэнтропийного принципа информации в *теорию информации*. В простом понимании, энтропия – хаос, саморазрушение и саморазложение. Соответственно, негэнтропия – движение к упорядочиванию, к *организации системы*.

Ниже автор будет пытаться найти некое «отражение» понятия «энтропия» (а скорее даже «негэнтропия») в лице… праймов. В мире чисел в начале натурального ряда (в окрестности числа е = 2,718…, слева и справа от него) существует ***сингулярность*** – в этой области многие законы *теории чисел* либо вообще не работают (законы ещё «не родились», там царит «хаос» мира чисел), либо выдают большую *относительную погрешность* (ОП). В своих книгах и статьях автор много писал о сингулярности мира чисел, поэтому здесь повторяться не буду в части сингулярности. Однако, когда мы начинаем двигаться от числа ***е***, скажем, вправо к бесконечности (но в принципе можно и влево – «пробираясь» через мир *проточисел* к единице, и даже от единицы к нулю – «пробираясь» через мир *экзочисел*) происходит *организация, упорядочивание, усложнение* мира чисел, в котором рождаются всё новые и новые законы (которых до этого не было). То есть, когда правая граница X отрезка [е; X] растет, то происходит и ***рост информации в мире чисел***. Поэтому, хотя ниже автор будет говорить об увеличении *энтропии* (праймов и отрезков числовой оси), вероятно, следует понимать, что речь идет всё-таки о *негэнтропии*. Впрочем, это уже скорее философский аспект, а ключевой для меня вопрос – способен ли прайм «отражать» понятие «энтропия»?

12. Энтропия системы из *X* частиц

Говоря об энтропии, в предыдущей главе мы рассмотрели гипотетический куб пространства с четырьмя молекулами (a, b, c, d). А теперь мы рассмотрим самый общий случай. Пусть система, аналогичная кубу с 4-мя молекулами, теперь состоит из X частиц. В данном случае имеется $(X + 1)$ макросостояний, которые удобно обозначать такими числами (начинаем с нуля): $M = 0, 1, 2, 3,\ldots, X$, то есть мы их пронумеровали по числу частиц, находящихся, скажем, в левой половине объема. Статистический вес M-го макросостояния равен *числу* ***сочетаний*** *из X по M* (обозначим это на свой манер):

$$\boldsymbol{C_M = X!/(X - M)!/M!}. \tag{12.1}$$

Важное замечание к формуле (12.1). Когда X – чётное число (делится на 2 без остатка), то параметр C_M достигает своего единственного максимума ($C_M = C_{max}$) при $(X - M) = X/2$ и $M = X/2$. Когда X – нечётное число, то параметр C_M достигает своего *первого* максимума ($C_M = C_{max}$) при $(X - M) = X/2 +0{,}5$ и $M = X/2 - 0{,}5$. При этом вторым максимум будет то же самое число: $C_{M+1} = C_{max}$.

Вероятность (Z_M) M-го макросостояния (фигурирующая в формуле Больцмана $E = \ln Z$), очевидно, равна следующему:

$$\boldsymbol{Z_M = C_M/\Sigma}, \tag{12.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 +\ldots+ C_M}. \tag{12.3}$$

Применительно к нашим 4-м молекулам получаем:

$M = 0$; $C_0 = 4!/(4 - 0)!/0! = 1$; $Z_0 = C_0/\Sigma = 1/16 = 0{,}0625$;
$M = 1$; $C_1 = 4!/(4 - 1)!/1! = 4$; $Z_1 = C_1/\Sigma = 4/16 = 0{,}2500$;
$M = 2$; $C_2 = 4!/(4 - 2)!/2! = 6$; $Z_2 = C_2/\Sigma = 6/16 = \mathbf{0{,}3750}$;
$M = 3$; $C_3 = 4!/(4 - 3)!/3! = 4$; $Z_3 = C_3/\Sigma = 4/16 = 0{,}2500$;
$M = 4$; $C_4 = 4!/(4 - 4)!/4! = 1$; $Z_4 = C_4/\Sigma = 1/16 = 0{,}0625$;

где $\Sigma = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = 16$. Этот результат поясняет 4-я ***матрица сочетаний*** на рис. 12.1, у которой 16 строк ($\Sigma = 16$, высота 4-й матрицы), а ширина – четыре столбца ($X = 4$). На рисунке также видно 1-ю, 2-ю, 3-ю матрицу (в жирных рамках):

$X = 1$ (1 столбец), высота $\Sigma = 2$ (строки);

$X = 2$ (2 столбца), высота $\Sigma = 4$ (строки);

$X = 3$ (3 столбца), высота $\Sigma = 8$ (строк).

Эти матрицы легко продолжить (вниз и влево до бесконечности): просто всякий раз надо вниз копировать (удваивать) предыдущую матрицу и слева добавлять новый столбец *нулей* и *единиц*. То есть это сугубо *комбинаторная* задача (количество всех возможных сочетаний из X по M), при этом легко угадать закон роста высоты X-й матрицы сочетаний:

$$\mathbf{\Sigma = 2\hat{}X}. \qquad (12.4)$$

1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

Рис.12.1. Матрицы

Эту формулу можно даже «обосновать», если использовать *формулу Стирлинга* (как именно использовать – станет понятно ниже) и общеизвестные формулы (весьма полезные для моей космологии чисел): $\int \ln x\, dx = x\cdot\ln x - x$ (то есть к такому выражению стремится сумма логарифмов натуральных чисел: $\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ln 6 + \ldots + \ln X$, когда $X \to \infty$) и $\int x\cdot\ln x\, dx = (0{,}5\cdot\ln x - 0{,}25)\cdot x\hat{}2$ (то есть к такому выражению стремится сумма: $1\cdot\ln 1 + 2\cdot\ln 2 + 3\cdot\ln 3 + 4\cdot\ln 4 + 5\cdot\ln 5 + \ldots + X\cdot\ln X$, когда $X \to \infty$). При этом мы получаем (суммируя по всем строкам X-й матрицы) некий *виртуальный* параметр: $W = 0{,}5\cdot X\hat{}2 - 0{,}5\cdot X\cdot\ln X + X\cdot[1 - 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi)] \approx 0{,}5\cdot X\hat{}2$ (при $X \to \infty$). Таким образом, получаем: $\mathbf{W \approx \ln 2\cdot X\hat{}2}$ (где $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$), что вполне допустимо, учитывая «глобальность» параметра W для X-й матрицы. В итоге мы получаем верный ответ: $\Sigma \approx e\hat{}(W/X) = (e\hat{}\ln 2)\hat{}X = 2\hat{}X$.

Любопытно, что 16-я матрица ($X = 16$) высотой $\Sigma = 2\hat{}X = 2\hat{}16 = 65536$ строк – это в точности высота… стандартной таблицы (страницы) программы «Excel». А ширина данной таблицы – это 256 столбцов, что равно корню квадратному из высоты таблицы: $65536\hat{}0{,}5 = 256$. И это также вполне логично, ибо все целые *малые* делители (d)

натурального числа N не превосходят своего корня квадратного: $d \le N$^0,5. А вся информация о всяком целом числе N содержится исключительно в его *малых* делителях (это его «паспорт») и это – азы *теории чисел* (ещё в рамках арифметики). Кстати, число $N = 65536 = 2·3·5·11·13·17·19·23·29·31·37·41·43·47·53$ – это 16-й *прайм* (праймориал), то есть произведение первых 16-ти *простых чисел* (см. гл. 14). *Теория чисел* (мир чисел) «живет и торжествует» вокруг нас, но большинство людей об этом и знать не хотят (что… нормально).

Очевидно, что для любого $X > 0$ мы получим:

$$\boldsymbol{C_0 = 1 \quad \text{и} \quad C_1 = X}, \tag{12.5}$$

и примем вполне логичное обозначение: $C_1 = \boldsymbol{C_{min}} = X$, поэтому:

$$\boldsymbol{Z_{mim} = C_{min}/\Sigma = X/(2\text{^}X)}, \tag{12.6}$$

$$\boldsymbol{E_{min} = \ln(Z_{min}) = -X·\ln 2 + \ln X}. \tag{12.7}$$

Поскольку $X·\ln 2 > \ln X$, то по формуле (12.7) мы будем всегда получать отрицательную энтропию: $E_{min} < 0$.

Для множества всех прочих макросостояний (M) параметр $C_М$ (у данного номера X) мы находим, используя замечательную *формулу Стирлинга* [например: $\ln(X!) \approx 0,5·\ln(2·\pi) + 0,5·\ln X + X·(\ln X - 1)$]:

$$\boldsymbol{C_М \approx \exp\{0,5·[\ln X - \ln(X - M) - \ln M - \ln(2·\pi)] + {}}$$
$$\boldsymbol{{} + X·\ln X - (X - M)·\ln(X - M) - M·\ln M\}}. \tag{12.8}$$

При $M = X/2$ (и чётном X) мы получим наибольший (для данного числа X) параметр $C_М$, который далее мы будем обозначать $\boldsymbol{C_{max}}$, а также соответственно: $\boldsymbol{Z_{max} = C_{max}/\Sigma}$ и $\boldsymbol{E_{max} = \ln(Z_{max})}$. Из формулы (12.8) нетрудно вывести ключевую формулу для наших исследований:

$$\boldsymbol{C_{max} \approx \exp[(X + 1)·\ln 2 - 0,5·\ln(2·\pi) - 0,5·\ln X]}. \tag{12.9}$$

По формуле (12.9) мы всегда будем получать C_{max} больше реального значения. При этом модуль относительной погрешности (ОП) формулы (12.9) для чётных чисел X примерно равен $|ОП| \approx 0,25/X$, а для нечётных чисел X примерно равен $|ОП| \approx 0,75/X$ (в три раза больше). При $X = 34$ (магия числа 32 ± 2) мы получаем $|ОП| = 0,007325$…(что только на 0,38% больше значения *Альфа*).

С учетом формулы (12.9) мы получаем важнейшие формулы:

$$\boldsymbol{Z_{max} \approx 2/(2·\pi)\text{^}0,5/X\text{^}0,5 \approx 0,7979/X\text{^}0,5}, \tag{12.10}$$

$$\boldsymbol{E_{max} \approx -0,5·\ln X + \ln 2 - 0,5·\ln(2·\pi) \approx -0,5·\ln X - 0,2258}, \tag{12.11}$$

$$\boldsymbol{E_{min}/E_{max} \approx 2·\ln 2·X/\ln X \approx 1,3863·X/\ln X}, \tag{12.12}$$

$$\boldsymbol{E_{max} - E_{min} \approx X·\ln 2 - 1,5·\ln X + \ln 2 - 0,5·\ln(2·\pi)}. \tag{12.13}$$

Итак, найденная (положительная) разность ($E_{max} - E_{min}$) – это и есть ***максимально возможное увеличение энтропии системы из X частиц***. Очевидно, что при больших значения X можно полагать:

$$\boldsymbol{E_{max} - E_{min} \approx X \cdot \ln 2}. \quad (12.14)$$

Следует подчеркнуть, что, хотя в данной главе мы исследовали рост энтропии в физической системе из X частиц (скажем, неких молекул), полученное нами отношение $E_{min}/E_{max} \sim X/\ln X$ (см. формулу 12.12) оказалась похожим на важнейший закон… мира чисел $K \sim X/\ln X$, где K – это количество простых чисел на отрезке [2; X].

13. Энтропия Вселенной

Энтропия Вселенной – величина, характеризующая степень неупорядоченности и тепловое состояние Вселенной. Оценить энтропию (E) Вселенной по формуле Больцмана ($E = k \cdot \ln Z$) нельзя, поскольку Вселенная не «пробегает» все возможные состояния, а эволюционирует от одного состояния к другому.

Однако во Вселенной можно выделить подсистемы, к которым применимо термодинамическое и статистическое описание, и вычислить их энтропию. Такими подсистемами являются, например, все компактные объекты (звёзды, планеты и др.). Но полная энтропия всех наблюдаемых компактных объектов ничтожна по сравнению с энтропией, содержащейся в тепловом *реликтовом микроволновом фоновом излучении* (с температурой 2,73°K), плотность его энтропии: E_γ = 1,49·10^3 см^–3 (в естественной системе единиц, где $k = 1$ в формуле Больцмана). Причем полная плотность энтропии безмассовых частиц во Вселенной будет близка к плотности энтропии Вселенной, которая доступна наблюдению в настоящий момент (*энтропия фонового излучения во Вселенной*):

$$\boldsymbol{E = V \cdot E_\gamma}, \quad (13.1)$$

где объем (V) наблюдаемой Вселенной – это объем шара радиусом R; а R – радиус наблюдаемой нами Вселенной (когда постоянная Хаббла принята равной: H_0 = 67,8 км/с·Мпк) ученые принимают таким:

$$R = [12000 \cdot (H_0/50)^{-1}] \cdot (3{,}0857 \cdot 10^{16}) \cdot 10^8 \approx \mathbf{2{,}731 \cdot 10^{28}\ см}, \quad (13.2)$$

$$V = 4/3 \cdot \pi \cdot R^3 \approx 2{,}04 \cdot 10^{85}\ см^3, \quad (13.3)$$

$$\boldsymbol{E \approx 1{,}27 \cdot 10^{89}}. \quad (13.4)$$

Любопытное совпадение. Радиус Вселенной, принятый астрономами (в формуле 13.2) равен $R \approx 2{,}731 \cdot 10^{28}$ см $\approx$ **8851** Мегапарсек (1Мпк = $3{,}08568 \cdot 10^{24}$ см). А по нашей формуле (12.10) легко подобрать такое *целое* число X = **11955** (это только в 1,35 раза больше числа **8851**), при котором мы получим вероятность $Z_{max} \approx 2/(2 \cdot \pi)^{0,5}/X^{0,5} \approx 0{,}00729735158966$, которая на 0,0000134% меньше *Альфы*. При указанном X = 11955 энтропия в мире чисел выросла (по формуле 12.12) в следующее количество раз: $E_{min}/E_{max} \approx 1682{,}27$. Ситуация такова, словно правая граница X числового отрезка [1; X] «отражает» расстояния во Вселенной в… Мегапарсеках.

Однако, скорее всего, наш пример говорит только о том, что, выбирая самые разные единицы измерения, физики часто довольно точно «попадают» (по целому ряду причин) именно в такие числа, которые играют существенную роль в Мироустройстве. Например, всем удобный *метр* – это не только почти средний рост разумного существа (по типу человека) во Вселенной (на экзопланетах, похожих на нашу Землю), но и почти ***середина*** *логарифмической* шкалы расстояний, причем самой глобальной: от 10^{-26} м – это, скажем, самые крупные замкнутые квантовые струны, до 10^{26} м – граница видимой нами Вселенной, а в центре – 1 метр (разумное существо).

Энтропия черных дыр. В 1972–75 годах Я. Бекенштейн и С. Хокинг доказали, что точная мера энтропии черной дыры ($E_ч$) – это площадь (F) её горизонта событий: $E_ч = F \cdot \beta_1$. Поскольку для сферически симметричной черной дыры имеем $F = M^2 \cdot \beta_2$ (где β_1 и β_2 – некие константы), то *энтропия чёрной дыры* выражается формулой:

$$E_ч \approx M^2 \cdot 10^{77}, \qquad (13.5)$$

где M – масса чёрной дыра, выраженная в массах Солнца.

Таким образом, у чёрных дыр энтропия очень велика, например, черная дыра в 3 солнечных массы будет иметь энтропию $E_ч \sim 10^{78}$ (при температуре черной дыры около 10^{-8}°К). А ведь в активных ядрах галактик и в квазарах могут находиться сверхмассивные чёрные дыры с массой до $M \sim 10^8$ (в сотни миллионов масс Солнц), то есть с энтропией порядка $E_ч \sim 10^{93}$ (и несусветным беспорядком внутри неё). Данный факт наталкивает на мысль, что, возможно, черная дыра – это окно в другую вселенную, связанную в центре черной дыры с нашей Вселенной.

В центре нашей Галактики может находится около миллиона чёрных дыр с массой Солнца. Приняв количество всех галактик равным 10^11, получаем следующую оценку *энтропии всех чёрных дыр во Вселенной*: $\Sigma(E_{ч}) \sim (10^6 \cdot 10^{11})^2 \cdot 10^{77} \sim$ **10^111**.

Сравнение энтропии Вселенной ($E \sim 10^{89}$) с энтропией чёрной дыры, обладающей такой же массой (как и масса Вселенной) $E_{ч} \sim 10^{124}$, показывает, насколько окружающая нас (видимая нами) часть Вселенной далека от максимально неупорядоченного состояния. Вероятно, хотя и не доказано, что именно эта неравновесность наблюдаемой Вселенной является причиной справедливости 2-го начала термодинамики для всех замкнутых подсистем в ней.

Энтропия Вселенной и стрела времени во Вселенной. Вопрос об энтропии Вселенной тесно связан с проблемой объяснения стрелы времени во Вселенной: необратимой временной эволюции от прошлого к будущему, направленной в одну сторону для всех наблюдаемых подсистем Вселенной. Известно, что законы механики, электродинамики, квантовой механики обратимы во времени. Уравнения, описывающие эти законы, не изменяются при замене t на –t. В квантовой теории поля имеет место более общая СРТ -инвариан-тность (Теорема СРТ). Это означает, что любой физический процесс с элементарными частицами может быть осуществлён как в прямом, так и в обратном направлении времени (с заменой частиц на античастицы и с пространственной инверсией). Поэтому с его помощью нельзя определить стрелу времени. Пока известен единственный физический закон – 2-е начало термодинамики – который содержит утверждение о необратимой направленности процессов во времени. Он задаёт так называемую термодинамическую стрелу времени: *энтропия растёт в будущее*. [Материал главы 13 (для исследования мира чисел) во многом взят из Физической энциклопедии: http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_physics/5360/%D0%AD%D0%9D%D0%A2%D0%A0%D0%9E%D0%9F%D0%98%D0%AF, и мой книги «Суперструны…», гл. II, § 20].

14. Энтропия прайма и отрезка числовой оси

Говоря о максимально возможном росте энтропии физической системы из X частиц (скажем, молекул), автор приводил ***матрицу сочетаний*** (см. гл. 12) для системы, состоящей из 4 частиц (поэтому мы будем говорить: 4-я матрица или матрица $X = 4$). Эта матрица в условном виде наглядно показывает все физически возможные равновероятные микросостояния системы, которых в данном случае (для $X = 4$) набирается 16-ть. В табл. 14.1 показана всё та же матрица, но теперь эта матрица порождает 16-ть… натуральных чисел N.

Поскольку ширина матрица $X = 4$ (столбца), то высота этой матрицы будет $K = 2\^4 = 16$ строк (этот закон легко проверить самим на ПК). Каждая из 16-ти строк матрицы не повторяет никакую другую её строку по «рисунку» расположения в ней нулей и единиц. И никаких иных сочетаний (комбинаций) 0 и 1 (именно в 4-х колонках) вы больше не сможете придумать (добавить).

Каждую строку 4-й матрицы мы вправе понимать (этому ничто не мешает) как… *показатели степени* первых 4-х *простых чисел* (P = 2, 3, 5, 7), при этом мы получим 16-ть разных целых чисел N:
1-я строка порождает: $N = (2\^0)\cdot(3\^0)\cdot(5\^0)\cdot(7\^0) = 1\cdot1\cdot1\cdot1 = \mathbf{1}$;
2-я строка порождает: $N = (2\^0)\cdot(3\^0)\cdot(5\^0)\cdot(7\^1) = 1\cdot1\cdot1\cdot7 = \mathbf{7}$;
3-я строка порождает: $N = (2\^0)\cdot(3\^0)\cdot(5\^1)\cdot(7\^0) = 1\cdot1\cdot5\cdot1 = \mathbf{5}$;
………………………………………………………………;
16-я строка порождает: $N = (2\^1)\cdot(3\^1)\cdot(5\^1)\cdot(7\^1) = 2\cdot3\cdot5\cdot7 = \mathbf{210}$.
Подчеркну, что 4-я матрица порождает четыре первых ***прайма*** (праймориала, см. гл. 3): N = **2**, **6**, **30**, **210** (они на розовом фоне).

А теперь подчеркну ещё один замечательный закон: ***все числа, порожденные матрицей X (в количестве 2^X) – это <u>все</u> целые делители прайма N***, у которого старшее простое число P имеет порядковый номер X (в ряде всех простых чисел). То есть *тип* (T) любого прайма N вычисляется по формуле $T = 2\^X$, которая была доказана нами выше (см. гл. 7). Например, матрица $X = 4$ порождает $2\^4 = 16$ чисел и все они – целые делители прайма $N = 210$ и других делителей у этого прайма не существует. Проверьте этот закон сами для матриц: X = 1, 2, 3, 4, 5, …, 16 (это ещё нетрудно сделать с помощью ПК).

Следует также пояснить, как 4-я матрица для каждого числа N указывает его *тип* (T), то есть количество всех его целых делителей:
из 1-й строки: $T = (0 + 1)\cdot(0 + 1)\cdot(0 + 1)\cdot(0 + 1) = 1\cdot1\cdot1\cdot1 = \mathbf{1}$;
из 2-й строки: $T = (0 + 1)\cdot(0 + 1)\cdot(0 + 1)\cdot(1 + 1) = 1\cdot1\cdot1\cdot2 = \mathbf{2}$;
из 3-й строки: $T = (0 + 1)\cdot(0 + 1)\cdot(1 + 1)\cdot(0 + 1) = 1\cdot1\cdot2\cdot1 = \mathbf{2}$;
………………………………………………………………;

из 16-й строки: $T = (1 + 1)\cdot(1 + 1)\cdot(1 + 1)\cdot(1 + 1) = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = \mathbf{16}$.

Все 16-ть строк матрицы можно разделить только на 5 макросостояний (M) по сумме единиц в строке, и эта сумма будет принимать такие значения: $M = 0, 1, 2, 3, 4$. При этом все 16-ть полученных типов (T) также могут принимать только на 5 значений: $T = 1, 2, 4, 8, 16$. Значит, существует взаимнооднозначное соответствие между суммой единиц в данной строке матрицы и типом (T) числа (N), порожденного данной строкой матрицы.

Матрица $X = 4$ и порожденные её числа N Таблица 14.1

Номер строки матрицы	Матрица X = 4 K=2^X=16				Сумма единиц в строке	Простые числа P				Число N	Тип (T) числа N (кол-во всех целых делителей N)				T
						2	3	5	7						
1	**0**	**0**	**0**	**0**	0	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	**1**
2	**0**	**0**	**0**	**1**	1	1	1	1	7	**7**	1	1	1	2	**2**
3	**0**	**0**	**1**	**0**	1	1	1	5	1	**5**	1	1	2	1	**2**
4	**0**	**0**	**1**	**1**	2	1	1	5	7	**35**	1	1	2	2	**4**
5	**0**	**1**	**0**	**0**	1	1	3	1	1	**3**	1	2	1	1	**2**
6	**0**	**1**	**0**	**1**	2	1	3	1	7	**21**	1	2	1	2	**4**
7	**0**	**1**	**1**	**0**	2	1	3	5	1	**15**	1	2	2	1	**4**
8	**0**	**1**	**1**	**1**	3	1	3	5	7	**105**	1	2	2	2	**8**
9	**1**	**0**	**0**	**0**	1	2	1	1	1	**2**	2	1	1	1	**2**
10	**1**	**0**	**0**	**1**	2	2	1	1	7	**14**	2	1	1	2	**4**
11	**1**	**0**	**1**	**0**	2	2	1	5	1	**10**	2	1	2	1	**4**
12	**1**	**0**	**1**	**1**	3	2	1	5	7	**70**	2	1	2	2	**8**
13	**1**	**1**	**0**	**0**	2	2	3	1	1	**6**	2	2	1	1	**4**
14	**1**	**1**	**0**	**1**	3	2	3	1	7	**42**	2	2	1	2	**8**
15	**1**	**1**	**1**	**0**	3	2	3	5	1	**30**	2	2	2	1	**8**
16	**1**	**1**	**1**	**1**	4	2	3	5	7	**210**	2	2	2	2	**16**

Если в табл. 14.1 сортировать строки по возрастанию типов T, а затем внутри каждого типа T сортировать по возрастанию числа N, то мы придем к итоговой (по матрице $X = 4$) табл. 14.2, которую будем называть ***прайм-матрицей*** $X = 4$. Поскольку в этой таблице остались только первые четыре прайма $N =$ **2**, **6**, **30**, **210**, ну и ещё вездесущая единица ($N = 1$) – неизменный (и… таинственный) спутник всех подобных прайм-таблиц (для любого $X \geq 2$). В таблице “Excel” читатель сам без особого труда построит прайм-таблицу $X = 16$, в которой (опять же кроме $N = 1$) будут первые 16-ть праймов: $N =$ **2**, **6**, **30**, **210**, **2310**, **30030**, **510510**,…; **3,258915847719·10^19** (это произведение первых 16-ти простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53).

В прайм-матрице $X = 4$ для каждого из пяти сочетаний ($M = 0, 1, 2, 3, 4$ – по сумме единиц в строках исходной матрицы, см. табл. 14.1) указанно количество таких сочетаний ($C_М$), которое для других прайм-матриц находим по формуле (12.1) или (12.8), где $M = 0, 1, 2, 3,…, X$. Зная, сумму (Σ, в табл. 14.2 эта сумма обозначена буквой S) всех сочетаний $C_М$ (для $X = 4$ сумма пяти сочетаний такая: $\Sigma = 16$), мы находим пять соответствующих *вероятностей*: $Z_М = C_М/\Sigma = 0{,}0625$; $0{,}2500$; **0,3750**; 0,2500; 0,0625 – это вероятности появления соответствующего сочетания $C_М = 1, 4, 6, 4, 1$.

Прайм-матрица $X = 4$ Таблица 14.2

M	**Матрица *X* = 4 *K*=2^*X***	Сумма единиц (сочет.)	Кол-во сочет. ***C*** м	Вероятность появлен. См ***Z*** м = ***C*** м/***S***	Простые числа ***P*** 2 3 5 7	Число (прайм) ***N*** м	Тип числа *N* (кол-во целых делителей)	***T***	Энтропия числа *N* ***E*** м =ln(***Z*** м)
0	**0 0 0 0**	0	1	0,0625	1 1 1 1	**1**	1 1 1 1	**1**	-2,7726
1	**1 0 0 0**	1	4	0,2500	2 1 1 1	**2**	2 1 1 1	**2**	-1,3863
2	**1 1 0 0**	2	6	0,3750	2 3 1 1	**6**	2 2 1 1	**4**	-0,9808
3	**1 1 1 0**	3	4	0,2500	2 3 5 1	**30**	2 2 2 1	**8**	-1,3863
4	**1 1 1 1**	4	1	0,0625	2 3 5 7	**210**	2 2 2 2	**16**	-2,7726
		Сумма: ***S*** =	16	1,0000					

При чётном X минимальная вероятность $Z_{min} = C_{min}/\Sigma = X/2$^$X$ (у нас $Z_{min} = 0{,}0625$) всегда будет у старшего (наибольшего) числа N с номером $M = X$ (у нас $N = 210$ при $M = 4$). Поэтому минимальная энтропия $E_{min} = \ln(Z_{min})$, в нашем случае $E_{min} = -2{,}7726$, а в больших прайм-матрицах (с большим X) можно пользоваться такой формулой (все подобные формулы мы берем из гл. 12): $E_{min} = -X\cdot\ln 2 + \ln X$.

При чётном X максимальная вероятность $Z_{max} = C_{max}/\Sigma$, у нас $Z_{max} = 0{,}3750$, а в больших прайм-матрицах можно пользоваться формулой: $Z_{max} \approx 2/(2\cdot\pi)$^0,5/$X$^0,5, и эта вероятность всегда будет у числа N с номером $M = X/2$ (у нас $M = 4/2 = 2$ и $N = 6$). Поэтому максимальная энтропия $E_{max} = \ln(Z_{max})$, у нас $E_{max} = -0{,}9808$, а для больших прайм-матриц: $E_{max} \approx -0{,}5\cdot\ln X + \ln 2 - 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi)$. У всех прайм-матриц (при любом X) $E_{max} > E_{min}$, ведь оба числа отрицательные, и всегда E_{max} ближе к нулю, чем E_{min}.

Энтропия прайма и отрезка числовой оси натуральных чисел. Учитывая всё выше изложенное, мы примем такую *гипотезу*: если число $N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot P$ – это прайм (старшее простое число $P \sim X\cdot\ln X$), то разность $E_{max} - E_{min} \approx X\cdot\ln2$ – это ***энтропия прайма*** N, а энтропия всего отрезка $[2; N]$ – это *сумма энтропий* (ΣE) всех праймов (их X штук на данном отрезке), которая равна: $\Sigma E \equiv (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + X)\cdot\ln2 = (1+X)\cdot X/2\cdot\ln2$. Откуда для больших X получаем:

$$\boldsymbol{\Sigma E \approx \ln2/2\cdot X^2 \approx 0{,}346\cdot X^2}. \quad (14.1)$$

Важно подчеркнуть, что формула (14.1) близка к следующим формулам, найденным мною в рамках виртуальной космологии (книга «Параллельные миры II…», гл. 1.4 Законы Пирамиды):

Сумма (S_d) всех делителей всех целых чисел отрезка $[1; X]$:

$$\boldsymbol{S_d \approx \pi^2/12\cdot X^2 \approx 0{,}822\cdot X^2}. \quad (14.2)$$

Количество ($K_к$) всех камней в Пирамиде высотой X:

$$\boldsymbol{K_к \approx 0{,}5\cdot X^2}. \quad (14.3)$$

Масса ($M_к$) всех камней в Стволе Пирамиды высотой X:

$$\boldsymbol{M_к \approx 0{,}25\cdot X^2}. \quad (14.4)$$

Более того, в приведенных формулах параметры отрезка $[1; X]$ (Пирамиды и её Ствола) по своему «физическому» смыслу интуитивно близки к «энтропии отрезка» числовой оси.

Так вот, если в формулах (14.1) ÷ (14.4) параметр X принять равным $X \approx 10^{57}$ (численно близким к альфа-прайму, см. гл. 6), то мы будем получать значения, близкие к полной энтропии Вселенной (см. гл. 13, 15). При этом мир чисел существенно завышает энтропию, словно напоминая нам о малости видимой нами части Вселенной, ведь бóльшая часть всех галактик скрыта от наших глаз и самых совершенных технических средств наблюдений.

15. Мир чисел, как… фазовое пространство

Насколько мне известно, в теоретической физике (в космологии) самые большие числа связаны именно с понятием «энтропия Вселенной». Это видно и в замечательной научно-популярной книге Роджера Пенроуза «Новый ум короля:…» (гл. 7, Насколько особым был Большой взрыв?). Вот что мы узнаем из указанной книги.

Энтропия фонового излучения намного превосходит энтропию всех других *обычных* процессов во Вселенной и составляет примерно 10^8 на один барион (по сути, это означает, что на каждый барион приходится 10^8 фотонов фонового излучения). Таким образом, если во Вселенной всего имеется 10^80 барионов, то полная *энтропия фонового излучения Вселенной* имела бы величину порядка **10^88**.

Однако если учесть наличие (крайне *необычных*) чёрных дыр (с их вездесущей гравитацией), то энтропия Вселенной колоссально увеличивается. Так, пусть в сердцевине каждой из галактик около миллиона (10^6) чёрных дыр с массой Солнца, при этом энтропия на каждый барион возросла бы до 10^21, а ***энтропия Вселенной (с учетом чёрных дыр)*** увеличилась бы до **10^101**.

Когда (в далеком будущем?) подавляющая часть галактических масс окажется захваченной чёрными дырами в сердцевинах галактик, то полная энтропия Вселенной достигнет значения **10^111**. А когда наша замкнутая Вселенная в конце концов сколлапсирует (в виде одной чёрной дыры), то ***энтропия коллапса*** будет порядка **10^123**.

Последнее число (10^123) Пенроуз рассматривает как некую оценку полного ***объема фазового пространства*** (V), поскольку энтропия коллапса должна представлять собой логарифм объема V (наибольшей его части): $\ln V \approx$ 10^123. Отсюда следует:

$$\boldsymbol{V \approx e^{(10^{123})} \approx e^{(e^{(123\cdot\ln 10)})} \approx e^{(e^{283})}}. \qquad (15.1)$$

Что такое фазовое пространство? Сущность понятия фазового пространства заключается в том, что состояние сколь угодно сложной системы представляется в нём одной единственной точкой, а эволюция этой системы – перемещением этой точки. Так вот, теперь спрашивается можно ли рассматривать мир натуральных чисел как некое «отражение», «моделирование»… фазового пространства? А состояние сложной системы мира чисел представляется в нём одной единственной точкой – порядковым номером X (простого числа $P \sim X \cdot \ln X$)? И эта точка перемещается: X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … (натуральный ряд). При этом «размерность фазового пространства» как бы оказывается *вдвое большей* (чем мы обычно привыкли представлять), ведь всякое целое число X определяет собой прайм N (символ второй размерности). Или, быть может, прайм N – это некое «отражение» объема фазового пространства?

В научно-популярных источниках также можно встретить утверждение о том, что ВСЯ информация во Вселенной оценивается числом $10^{(10^{123})} \approx e^{(e^{284})}$ (и такие же числа – это объем фазового пространства у Пенроуза) При этом говорится, что информация, которую мы можем узнать оценивается числом $10^{(10^{90})} \approx e^{(e^{208})}$. А новый Большой взрыв якобы произойдет через $10^{(10^{120})}$ лет. И при всём при этом, как нам подсказывает мир чисел, подобные колоссальные числа легко можно представить в качестве неких… *праймов* N (природу которых мы исследовали).

16. Тильда (логнормальное распределение)

Как мы уже знаем все делители сколь угодно большого прайма N можно найти с помощью *матрицы сочетаний* (см. гл. 12), то есть существует алгоритм (простейшей в принципе), для нахождения *всех* делителей *любого* прайма. А в данной главе мы детально рассмотрим главные свойства (закономерности) делителей прайма на примере $N = 2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41\cdot43\cdot47\cdot53\cdot59 \approx 1{,}9\cdot10^{21}$ – это 17-й *прайм* (праймориал), то есть произведение первых простых чисел (без пропусков) вплоть до старшего простого числа $P = 59$ с порядковым номером $X = 17$ (в ряде всех простых чисел).

Всякий прайм N содержит $T = 2^X$ делителей, где T – это *тип* числа N (согласно моей терминологии). Значит, тип нашего прайма равен $T = 2^{17} = 131072$ (делителей), и именно столько будет строк в нашей матрице (высота матрицы), которая порождает все делители 17-го прайма (а количество столбцов в нашей матрице равно 17).

Все делители (d) нашего прайма мы выстроим по возрастанию и пронумеруем: $J = 1, 2, 3, 4, \ldots, 131072$, а потом изобразим на первом графике данной главы (см. рис. 16.1), у которого по вертикальной оси – логарифмическая шкала (для делителей d). На таком графике мы получим волнистую линию, похожую на тильду (~) с поднятым правым краем. То есть все большие праймы – это так называемые *тильдаобразные* числа (а самые совершенные из них – *типомаксы*).

Малые делители всякого числа N не превосходят его корня квадратного (это знали ещё древние математики), то есть в нашем случае:

$d < N$^0,5 = 43.849.291.330, а реальный последний (65536-й) малый делитель равен d_s = 43.848.093.003 – это *центральный* делитель (обведен кружком в центре первого графика). Все прочие (*большие* делители) – это частное от деления N на каждый малый делитель (N/d), то есть вся информация о числе N «зашита» именно в малые делители, которые являются своеобразным «паспортом» числа N.

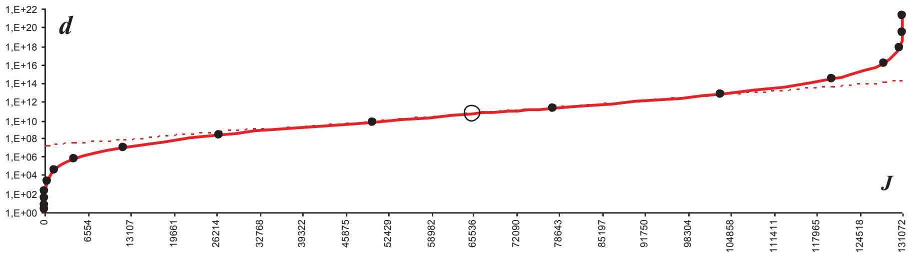


Рис. 16.1. Распределение всех делителей (d) 17-го прайма N (у которого X = 17)

Чёрные точки на графике – это *делители-праймы*, ведь всякий прайм $N > 2$ вбирает в себя меньшие праймы в качестве собственных делителей (так, у нас набралось 17 делителей-праймов). Выше (см. гл. 4) мы доказали такую формулу для всякого прайма N:

$$\mathbf{N \approx \exp(X \cdot \ln X + X \cdot \ln\ln X - X)}, \tag{16.1}$$

поэтому всегда можно примерно оценить (вычислить) порядковые номера двух, скажем, *центральных делителей-праймов*, которые наиболее близки к центральному делителю $d_s = N$^0,5. В нашем случае с помощью формулы (16.1) путем подбора мы получаем: $X_s \approx 10{,}866$ (при этом $N_s \approx$ 43.849.291.330 $\approx d_s$), и, действительно, слева и справа от центрального делителя находится два делителя-прайма:

слева – N = 6.469.693.230, у которого X = 10 и J = 50153,

справа – N = 200.560.490.130, у которого X = 11 и J = 77825.

Пока мной не найден алгоритм для вычисления номера J центральных делителей-праймов (без построения весьма громоздкой матрицы), но некие пути решения этой важной задачи обозначены ниже.

Тильда на первом графике – это свидетельство того, что все делители (d) нашего прайма N распределены ***логнормально***, то есть, что их логарифмы (ln$d$) распределены *нормально* – по закону Лапласа Гаусса. Что под этим понимать – подробно говорится в моей книге

«Зеркало» Вселенной» (в главах 13 и 14). Поэтому далее автор просто придерживается терминологии (и всей логики) указанной книги.

Поскольку в нашем случае $\ln N = 49{,}008\ldots$, то логарифмы всех делителей ($\ln d$) нашего числа N мы рассмотрим на полуинтервалах: [0; 1); [1; 2); [2; 3); …, [49; 50), каждому из которых присвоим свой условный номер («имя» полуинтервала): m = 0,5; 1,5; 2,5; …; 49,5 – это просто середина каждого полуинтервала. При этом *логцентр* нашего прайма равен: $\ln(N\hat{}0{,}5) \approx 24{,}5$, поэтому сам *центральный интервал* определяется так: $e\hat{}24 \le d < e\hat{}25$, и у нашего прайма N нетрудно найти два *центральных* делителя:

– *левый* делитель $d_л$ = 26.489.559.954 с номером $J_л$ = 61.424;

– *правый* делитель $d_п$ = 72.003.687.910 с номером $J_п$ = 69.577.

То есть на центральном интервале нашего прайма N находится такое количество делителей: $K = J_п - J_л + 1 = 8154$, а сам параметр K называется *керном* числа N. Зная тип (T) и керн (K) числа N, находим *дисперсию* (D) *нормального распределения* логарифмов делителей ($\ln d$) числа N (эта формула доказана мной в указанной книге):

$$\boldsymbol{D = 1/(2\cdot\pi)\cdot(T/K)\hat{}2}. \qquad (16.2)$$

В нашем случае мы получаем D = 41,1243…, а *средне квадратичное отклонение* (σ – сигма) будет таким: $\boldsymbol{\sigma \equiv D\hat{}0{,}5}$ = 6,41… .

Матожидание $\langle M\rangle$ всякого логнормального распределения – это логцентр числа N (что интуитивно вполне понятно):

$$\boldsymbol{\langle M\rangle = \ln(N\hat{}0{,}5) = \tfrac{1}{2}\ln N}. \qquad (16.3)$$

Таким образом, теперь у нас есть все необходимые данные для вычисления *вероятности* $P(m)$ по формуле *Лапласа-Гаусса*:

$$\boldsymbol{P(m) = 1/(2\cdot\pi\cdot D)\hat{}0{,}5\cdot\exp\{-[(m - \langle M\rangle)\hat{}2/(2\cdot D)]\}}, \qquad (16.4)$$

где $P(m)$ – это вероятность того, что наугад (случайным образом) взятый логарифм делителя ($\ln d$) числа N принадлежит полуинтервалу с номером m. На втором графике данной главы (рис. 16.2) точками показаны реальные вероятности $P(m)$, а тонкой линией – вероятности $P(m)$, найденные по формуле (16.4). Для нашего 17-го прайма модуль относительной погрешности менее 2% в диапазоне $12{,}5 < m < 36{,}5$.

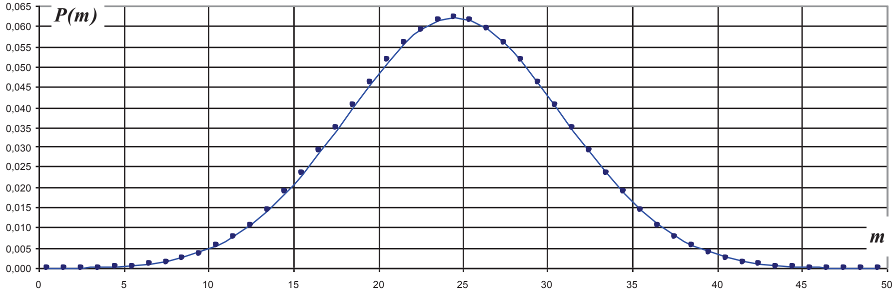


Рис. 16.2. Вероятность попадания ln*d* в полуинтервал с номером *m*

«*Правило трех сигм*» в нашем случае хорошо выполняется, причем около 68,3% (это ± одна сигма) всех делителей (d) прайма N лежат почти на *экспоненте* (пунктирная прямая линия на рис. 16.1):

$$\boldsymbol{d \approx A\cdot \exp(B\cdot J)}, \qquad (16.5)$$

где $B = 1/K = 1/8154 = 0{,}000122639\ldots$ (K – это керн числа N);
$A = d_л/\exp(B\cdot J_л) = 14175512{,}82\ldots \approx 10\verb|^|7$ (точка пересечения с осью). На этой экспоненте лежат (близки к значениям по формуле 16.5) и пять делителей-праймов (черных точек на первом графике), имеющих такие номера: $J = 12081, 26743, 50153, 77825, 103435$ (между ними находятся около 69,7% всех делителей нашего прайма).

Непраймовые числа – так мы назовем натуральные числа, у которых в их *канонических разложениях* хоть одно простое число входит в степени больше, чем единица, например: **4** = 2^2; **8** = 2^3; **9** = 3^2; **12** = 2^2·3; **16** = 2^4; **18** = 2·3^2; **20** = 2^2·5; … . Подобные непраймовые числа (4, 8, 9, 12, 16, 18, 20,…), очевидно, не могут быть делителями праймов. В силу существования множества непраймовых чисел первые делители и нашего прайма N растут *почти линейно*, то есть по закону: $d \approx 1{,}6306\cdot J - 1{,}982$ и для номеров $J = 7, 8, 9,\ldots, 40$ модуль относительной погрешности менее 6%. Идеальный линейный закон, это когда у большого *тильдаобразного* числа N его примерно ln$N$ штук первых делителей в точности (без пропусков) копируют начало натурального ряда ($d = J$). Идеальный линейный закон можно увидеть, например, у достаточно больших *типомаксов*.

Очевидно, существует алгоритм (правда, мне он не известен), позволяющий находить все *непраймовые* числа. Отсюда следует, что у *разных* больших праймов N порядка ln$N$ первых (почти линейных) делителей – это *одинаковый для всех* больших праймов ряд чисел: d = 1, **2** (J = 2), 3, 5, **6** (J = 5), 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, **30** (J = 19), 31, 33, 34, 35,… и это – всё тот же ряд натуральных чисел, из которого исключены все *непраймовые* числа. Таким образом, все делители-праймы (праймы, выступающие в роли делителей ещё бóльших праймов), устремляются к неким своим *предельным* номерам (см. ряд чисел чуть выше), например, прайм N = 2 будет иметь предельный номер $\boldsymbol{J}$ = 2; прайм N = 6 будет иметь предельный номер $\boldsymbol{J}$ = 5; прайм N = 30 будет иметь предельный номер $\boldsymbol{J}$ = 19; и т. д.

Вероятно, можно указать алгоритм (формулу) для нахождения предельных номеров (J) для всех праймов N. А самое простое здесь – это экстраполировать рост первых трех предельных номеров J = 2, 5, 19, который происходит по следующей эмпирической формуле:

$$\boldsymbol{J \sim 1{,}1254 \cdot N\text{^}0{,}8312}. \qquad (16.6)$$

То есть у делителя-прайма N его предельный номер J (в качестве делителя ещё бóльшего прайма) по порядку величины, вероятно, близок к самому значению N. При этом даже у малого 6-го прайма N = 2·3·5·11·13 = 30030 (у которого X = 6) уже прослеживаются важные закономерности. Его номер J (в качестве делителя-прайма) растет так: J = 64, 117, 196, 295, 410, 542, 683, 829, 983, 1139, 1292, 1441 (соответственно при X = 6, 7, 8, 9, …, 17). Из этих чисел можно составить ряд *разностей*: R = (117 – 64 = **53**), (196 – 117 = **79**), 99, 115, 132, 141, 146, 154, 156, 153, 149, которые на графике $R = f(X)$ образуют явную *горку* (разности R сначала растут, а потом убывают). Построив подобные горки (только их зарождение) ещё для 7-го и 8-го праймов, уже можно предположить, что эти графики устремляются к горке Гаусса (см. рис. 16.2), то есть по мере роста X разности R, вероятно, устремляются к *нормальному распределению*.

А теперь приведу оценку ещё одного параметра тильды. Между центральными делителями-праймами (с номерами J = 50153 и J = 77825, см. выше) заключено 27672 всех делителей 17-го прайма, то есть около $П_d \approx 27672/131072 \approx 0{,}21$ всех его делителей (около 21%). И этот показатель у первых праймов (при X = 6, 7, 8, …, 17) убывает примерно по такому эмпирическому закону:

$$П_d \approx 0{,}7279/X\text{^}0{,}4355, \qquad (16.7)$$

а при $X \to \infty$ данный закон, вероятно, устремляется, скажем, к такому предельному виду: $П_d \approx 1/X$^0,5.

Ну а теперь приведу аналитическое доказательство казалось бы вполне «очевидного» факта (формулы 16.10). У гигантских праймов N старшее простое число $P \sim X \cdot \ln X$ и можно полагать $N \approx$ e^($X \cdot \ln X$) или $\ln N \approx X \cdot \ln X$, откуда следует:

$$\boldsymbol{X \sim \ln N / \ln\ln N}. \qquad (16.8)$$

Значит, при исследовании некого гигантского прайма N (разумеется, что 17-й прайм таковым не является) его два центральных делителя-прайма численно близки к $N_s \equiv N$^0,5 ~ e^(0,5·$X \cdot \ln X$) и имеют номера (X), близкие к такому значению:

$$X_s \sim \ln(N_s)/\ln\ln(N_s) \sim 0{,}5 \cdot X \cdot \ln X/[\ln(0{,}5) + \ln X + \ln\ln X] \qquad (16.9)$$

При $X \to \infty$ из формулы (16.9) мы получаем асимптотический закон:

$$\boldsymbol{X_s \sim X/2}, \qquad (16.10)$$

то есть порядковые номера (двух) центральных делителей-праймов (в качестве делителей исследуемого прайма N) устремляются к половине номера исследуемого прайма N (делители которого мы исследуем).