Числофизика: Гауссовы слагаемые
(Number physics: Gaussian terms)

Александр Васильевич Исаев
(Alexander Vasilievich Isaev)

Abstract

В сборник вошли следующие статьи: Высказывания великих людей о математике; Высказывания Альберта Эйнштейна; «Теория всего» Лиси (модель E8); Ошибка гения (Леонарда Эйлера); Два вида простых чисел.

The collection includes the following articles: Statements of people about mathematics; Albert Einstein's Statements; Lisi's “Theory of Everything” (model E8); The mistake of a genius; Two kinds of primes.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg?uselang=ru

Иога́нн Карл Фри́дрих **Га́усс** (1777 – 1855) – немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Количество простых чисел

Простые числа (P = 2, 3, 5, 7, 11, 13,…) – это натуральные числа, имеющие только два делителя: единицу и само число P. Простых чисел бесконечно много и из них строятся все прочие (*составные*) натуральные числа (см. *основную теорему арифметики*).

Количество *простых* чисел на отрезке [1; N] – это очень важный вопрос в *теории чисел* (обширный раздел высшей математики). Чтобы лучше прочувствовать значимость этого вопроса – достаточно взглянуть хотя бы в Википедии на статью «*Функция распределения простых чисел*». Даже из неё ясно, что открыто много самых разных формул для функций, подсчитывающих количество простых чисел на отрезке [1; N] и, вероятно, количество подобных формул будет только увеличиваться (что иллюстрирует *бесконечную* сложность мира чисел). Мы рассмотрим только простейшие из указанных формул, но даже они – восхищают нас своим совершенством и гармонией.

Итак, согласно *теории чисел* количество (K) простых чисел (P) на отрезке [1; N] описывается «элементарной» с виду формулой:

$$\boldsymbol{K \sim N/\ln N}, \tag{1.1}$$

где знак тильды (~) означает, что $K/(N/\ln N) \to 1$, когда $N \to \infty$, то есть, говоря по-научному, формула (1.1) – это *асимптотическая* формула.

Если заменить знак тильды (~) на знак точного равенства (=), то получим некое *псевдоколичество* (K^*, близкое к *реальному* K):

$$\boldsymbol{K^* \equiv N/\ln N} \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{K^* \equiv e\hat{}(e\hat{}t - t)}, \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{t \equiv \ln\ln N}$ – двойной логарифм числа N. При очень больших числах N [скажем, порядка *числа Скьюза*, когда $N \sim$ e^(e^6,75) ≈ 10^371, см. гл. 3] параметр t просто *удобен* и очевидны формулы: $\boldsymbol{N}$ **= e^(e^*t*)** и ln$N$ = (e^t). Более того, именно параметру t ранее я присвоил название «***время***» (соответствующее натуральному числу N), поскольку такой параметр t вполне может отчасти «отражать» природу ***загадочного феномена***, который и в физике также называют термином «время».

Нам также ничто не мешает в качестве правой границы отрезка [1; N] брать простые числа (P = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,…), то есть полагать, что $N = P$. При этом формула (1.2) выдает такие значения (с точностью до 4-й цифры после запятой): K^* = 2,8854; 2,7307; 3,1067; 3,5973; 4,5874; 5,0683; 6,0003;… – это *псевдономера* простых чисел P. Реальные порядковые номера простых чисел (в ряде всех простых чисел) – это всё тот же ряд натуральных чисел: K = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…, который также можно назвать термином «***к-время***» (*космология чисел* подсказывает нам, что и в теоретической физике *время* может иметь некие *ипостаси*, суть которых «зашифрована» в мире чисел?). Таким образом, формула (1.3) говорит, как по известному *времени* $t \equiv \ln\ln P$ (соответствующему появлению на числовой оси данного простого числа P) вычислить приблизительное значение (K^*) реального *к-времени* (K). И если в теоретической физике ключевые *элементарные события* предельно возможного микромира (в рамках современной физики) символизируют элементарная длина (планковская длина ~ 10^–35 м) и элементарный временной интервал (планковское время ~ 10^–44 сек), то в мире целых чисел поток *подобных* (???) ключевых *элементарных событий* – это «случайные» (в мире чисел нет места случайности!) появления простых чисел на числовой оси, и эти события символизируют параметры: *время* ($t \equiv \ln\ln N$), *к-время* (K), а также расстояние между соседними простыми числами (количество *составных* чисел между ними на числовой оси). Подробней об этом сказано в моей работе «Числовая модель пространства-времени».

В части формул (1.1) и (1.2) добавлю следующее. Когда $N = P$, то начиная с $P = 7$, реальный номер K превосходит псевдономер K^*, а их отношение достигает своего максимума ($K/K^* \approx 1,25506$) при $P = 113$ ($K = 30$) и далее отношение K/K^* устремляется к единице (никогда не становясь меньше единицы? см. гл. 3). Для первых 60 тысяч простых чисел *относительная погрешность* (ОП) формулы (1.2) по моим оценкам убывает по такому эмпирическому закону:

$$\text{ОП} = (K - K^*)/K^* < 1,277/\ln P, \qquad (1.4)$$

Так, у простого числа $P = 746773$ реальный номер $K = 60000$, а псевдономер $K^* = P/\ln P \approx 55220$ и его ОП ≈ 0,0865 (около 8,65%).

В конце *Большого отрезка* ($P \approx 8,07{\cdot}10\hat{}60$) реальный номер $K \approx 5,797{\cdot}10\hat{}58$ (это мы найдем чуть ниже), а псевдономер $K^* = P/\ln P \approx 5,755{\cdot}10\hat{}58$ и у него ОП ≈ 0,007237 (что всего лишь на 0,836% меньше *Альфы* ≈ 1/137) и формула (1.4) продолжает работать (ОП < 0,0091). И при $P \approx 1,7241{\cdot}10\hat{}308$ формула (1.4) верна (ОП < 0,0018).

Любопытно, что точность формулы $K \sim N/\ln N$ существенно повышается, если в знаменателе «всего лишь»… вычесть единицу:

$$\boldsymbol{K \sim N/(\ln N - 1)}. \qquad (1.5)$$

Это доказал великий русский математик и механик П. Л. Чебышев в 1848 году. Если записать $K^* \equiv N/(\ln N - 1)$, то теперь отношение K/K^* достигает своего максимума ($K/K^* \approx 1,0140008$) при $P = 1627$ (когда $K = 258$) и далее отношение K/K^* также устремляется к единице (никогда не становясь меньше единицы?, см. гл. 3).

Кстати, из формулы (1.5) следует, что $N = 1$ – это *простое* число с *отрицательным* порядковым номером ($K = -1$). И здесь нет ничего странного (в рамках моей *космологии чисел*), ведь у *проточисел П* (это такие вещественные числа, что: $1 < П < 2,718\ldots$) отрицательным является и к-время [$K^* \equiv П/(\ln П - 1)$], и время $t \equiv \ln\ln П$.

2. Формула Гаусса

Формула $K \sim N/\ln N$ – самая лаконичная, поэтому она дает нам лишь примерную оценку реального количества (K) простых чисел на отрезке [1; N], когда число N меньше *числа Скьюза* (см. гл. 3). Здесь более точно работает так называемый *сдвинутый интегральный логарифм* (от числа N), обозначаемый как: Li(N), а произносится так: *ли* *большое от N*. И при справедливости гипотезы Римана (что очень важно для математиков) верно следующее (***формула Гаусса***):

$$\boldsymbol{K \approx \mathrm{Li}(N)}. \qquad (2.1)$$

Вычисляется $\mathrm{Li}(N)$ следующим образом:

$$\mathbf{Li}(\boldsymbol{N}) = \mathbf{li}(\boldsymbol{N}) - \mathbf{li(2)} = (\boldsymbol{C} + \mathbf{lnln}\boldsymbol{N} + \Sigma \boldsymbol{G}_{\mathbf{k}}) - \mathbf{li(2)}, \qquad (2.2)$$

где C = 0,577 215 664 901 532… – постоянная Эйлера;

li(2) = 1,045 163 780 117 490… – интегральный логарифм числа 2;

$\ln\ln N \equiv t$ – двойной логарифм N [откуда следует: N = e^(e^t)];

ΣG_k – бесконечная сумма (где возможна такая замена: $\ln N$ = e^t):

$$\boldsymbol{\Sigma G_k} = \mathbf{(ln}\boldsymbol{N}\mathbf{)\text{^}1/1/1! + (ln}\boldsymbol{N}\mathbf{)\text{^}2/2/2! +\ldots+ (ln}\boldsymbol{N}\mathbf{)\text{^}}\boldsymbol{k/k/k}\mathbf{! +\ldots.} , \qquad (2.3)$$

k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … – порядковый номер слагаемого (G_k). На практике (при вычислениях на ПК) для достаточно большого числа N (или $t = \ln\ln N$) можно ограничиться таким номером k (мы назовем его ***финишным*** номером), после которого (k + 1)-ое слагаемое становится меньше единицы ($G_{k+1} < 1$). Все последующие слагаемые (идущие после *финишного* слагаемого $G_ф > 1$) быстро устремляются к нулю (см. рис. 5.1), а их бесконечная сумма никогда не превысит число **1,582**… (что мы докажем в гл. 6). Великий немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777 – 1855) первым указал (в 1849 году в письме к немецкому астроному Энке), что формула $K \approx \mathrm{Li}(N)$ точнее формулы $K \approx N/\ln N$, поэтому мы будем говорить так: G_k – это ***гауссовы слагаемые***.

Проблема формулы (2.3) в том, что ПК не может вычислить факториал (k!) при k > 170. Поэтому далее мы прибегаем к помощи ***формулы Стирлинга*** (подробней о ней – см. гл. 8):

$$\mathbf{ln(}\boldsymbol{k}\mathbf{!)} \approx \mathbf{0{,}5\cdot ln(2\cdot\pi) + 0{,}5\cdot ln}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}\mathbf{\cdot ln(}\boldsymbol{k/e}\mathbf{)}, \qquad (2.4)$$

а чтобы эту формулу применить – мы прологарифмируем k-ое гауссовое слагаемое: $\ln(G_k) = \ln[(\ln N)\text{^}k/(k\cdot k!)] = k\cdot\ln\ln N - \ln k - \ln(k!)$, что приводит нас к такой формуле (для случая, когда k > 170):

$$\boldsymbol{G}_{\mathbf{k}} = \mathbf{exp[}\boldsymbol{k}\mathbf{\cdot lnln}\boldsymbol{N} \mathbf{- 0{,}5\cdot ln(2\cdot\pi) - 1{,}5\cdot ln}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}\mathbf{\cdot ln}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}\mathbf{]}. \qquad (2.5)$$

Описанный алгоритм нахождения $K^* \equiv \mathrm{li}(N)$ позволяет найти K^* на ПК без всяких проблем вплоть до $t = \ln\ln N$ = 6,5741, то есть до $N \approx$ e^716,3 ≈ 10^311 (нам понадобилось только 1934 первых слагаемых G_k, то есть k = 1934) при этом K^* ≈ 1,7·10^308 (а вот при t > 6,5741 уже K^* > 1,7·10^308 и у ПК возникают проблемы с нахождением K^*).

Почему здесь у символа K стоит звездочка (*)? Потому что в указанном диапазоне (вплоть до $N \approx 10$^311) формула Гаусса выдает значения $K^* \equiv \mathrm{li}(N)$, которые будут больше реальных: $K < \mathrm{Li}(N)$. В теории чисел есть, в частности, такая оценка (для $N > 2657$) модуля *абсолютной погрешности* формулы Гаусса: $|K - \mathrm{Li}(N)| < f(N)$, где

$$\boldsymbol{f(N) = (1/8/\pi)(N\text{^}0{,}5)\cdot \ln N \approx 0{,}03979\cdot(N\text{^}0{,}5)\cdot \ln N}. \qquad (2.6)$$

Например, при $N = 10$^308 мы получим $f(N) \approx 10$^155 – примерно такого значения не превысит модуль *абсолютной погрешности* формулы Гаусса: $|K - \mathrm{Li}(N)| < 10$^155, что выглядит как чудовищно большая погрешность. При этом из формулы Гаусса следует, что $\mathrm{Li}(N) \approx$ 1,4·10^305, поэтому для модуля *относительной погрешности* (ОП) получаем: ОП $\equiv |K - \mathrm{Li}(N)|/\mathrm{Li}(N) < 10$^–150, что выглядит как… ничтожно малая погрешность. И нам остается только согласиться с тем, что в мире чисел многое… ***относительно*** (как и в реальном физическом мире, согласно теории Альберта Эйнштейна). Во всяком случае, нашему воображению требуются заметные усилия, чтобы «прочувствовать» законы мира *колоссальных* чисел.

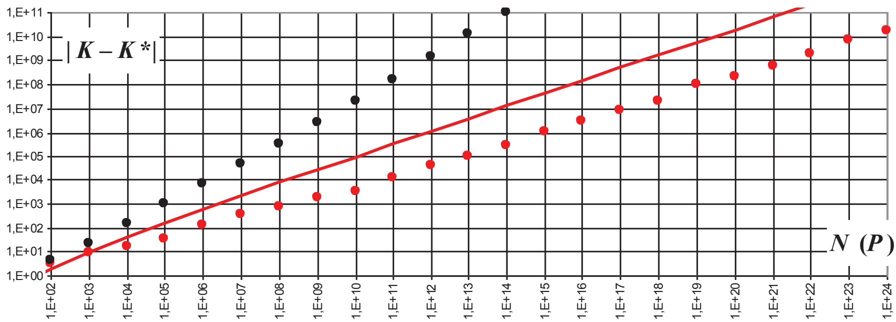

Рис. 2.1. Абсолютная погрешность формул $\boldsymbol{K^* \equiv N/\ln N}$ и $\boldsymbol{K^* \equiv \mathrm{Li}(N)}$

Чтобы лучше понять законы роста *абсолютной погрешности* формулы Гаусса $K^* \equiv \mathrm{li}(N)$ и формулы $K^* \equiv N/\ln N$ (см. гл. 1) мы рассмотрим 24 *простых* числа (P), которые первыми следуют за «круглыми» числами 10, 100, 1000, 10000, …, 10^24. У этих простых чисел нам известны (даже из Википедии) их *реальные* порядковые номера K (в ряде всех простых чисел). Если в формуле Гаусса в качестве N взять эти P, то мы найдем их псевдономера $K^* \equiv \mathrm{li}(N)$, и для каждого числа P вычислим разность $|K - \mathrm{Li}(N)|$ – так мы получим красные точки на графике рис. 2.1. И они, действительно, лежат ниже красной линии, построенной для $f(N)$ по формуле (2.6). Чёрные точки на графике – это разности $|K - N/\ln N|$, которые лежат выше красной линии, то есть мы наглядно видим, что $\mathrm{Li}(N)$ значительно точнее указывает на реальный номер K, нежели функция $N/\ln N$.

Однако при значительно б*о*льших числах N (порядка *числа Скьюза* или даже ещё раньше) – совсем не факт, что чёрные и красные точки не уйдут (изгибаясь вниз или даже… вверх?) от, казалось бы, уже наметившихся траекторий (воображаемых почти прямых линий на графике рис. 2.1). То есть, как далее поведут себя чёрные и красные точки (при продолжении вправо графика рис. 2.1) – это мне трудно представить. Ведь хотя *асимптотическая* формула (из теории чисел) $K \sim K^*$ (где $K^* \equiv N/\ln N$) означает, что $K/K^* \to 1$, когда $N \to \infty$, то при этом *абсолютная* погрешность $|K - K^*|$ может устремляется к… бесконечности. Правда, это происходит не столь быстро, как у параметра $K^* \equiv N/\ln N$, поэтому в конечном итоге *относительная* погрешность ОП $\equiv |K - K^*|/K^*$ устремляется к нулю.

3. Число Скьюза

Число Скьюза – это наименьшее натуральное число N, такое, что, начиная с него, неравенство $K < \mathrm{Li}(N)$ перестает выполняться. В 1914 году Джон Литтлвуд дал неконструктивное доказательство того, что такое число существует. В 1933 году Стенли Скьюз оценил это число, исходя из гипотезы Римана, как e^(e^(10^34)) – первое число Скьюза. В 1955 году он же повысил оценку без предположения о верности гипотезы Римана: e^(e^(10^964)) – второе число Скьюза, и это одно из самых больших чисел, когда-либо применявшихся в математических доказательствах (хотя и намного меньше, чем число Грэма). В 1987 году Риел (H. J. J. te Riele) без предположения гипотезы Римана свёл число Скьюза к N_c ≡ e^(e^(27/4)) = **e^(e^6,75))** ≈ 10^(e^6,75/ln10) ≈ 10^370,913 ≈ **8,185·10^370** – именно это число мы и будем подразумевать, говоря далее о ***числе Скьюза*** (хотя из выше сказанного следует, что число Скьюза может оказаться ещё меньше?). Замечу, что «скьюзовское» значение *времени* $t = \ln\ln(N_c) = 6{,}75 \approx 7$ – это пример *«магии» числа 7*, о которой я уже неоднократно говорил.

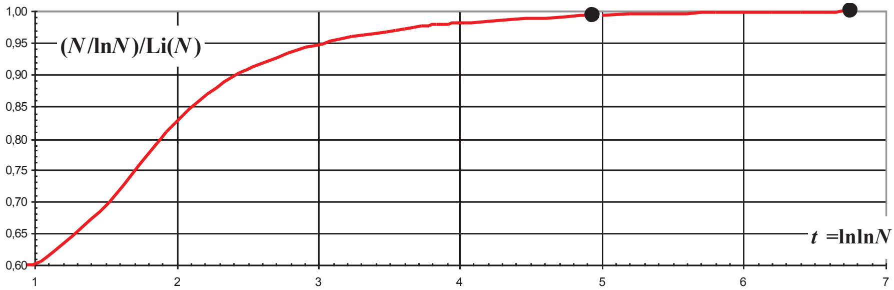

Рис. 3.1. Как формула $K^* \equiv N/\ln N$ «догоняет» по точности формулу $K^* \equiv \mathrm{Li}(N)$

Итак, вплоть до числа Скьюза всегда будет выполняться условие $K < \mathrm{Li}(N)$, то есть $\mathrm{Li}(N)$ будет всегда больше *реального* количества (K) простых чисел на отрезке [1; N]. А после числа Скьюза (правее него на числовой оси) неравенство $K < \mathrm{Li}(N)$, бесконечное количество раз («случайным» образом) будет менять свой знак (знак «<» на знак «>» и наоборот). Однако при этом, *насколько я понимаю* (см. гл. 2), само неравенство $|\mathrm{Li}(N) - K| < 0{,}03979 \cdot (N\text{^}0{,}5) \cdot \ln N$ – будет продолжать выполняться, то есть *модуль* (обозначаемый здесь как |…|) становится обязательным (начинает работать) только после числа Скьюза (N_c).

В формулу Гаусса вместо аргумента N (вернее, $t \equiv \ln\ln N$) мы вправе подставлять колоссальные (порядка числа Скьюза) простые числа P (вернее, $t \equiv \ln\ln P$), и при этом будет (?) выполняться такое неравенство: $|\mathrm{Li}(t) - K| < 0{,}03979 \cdot (N_c\text{^}0{,}5) \cdot \ln N_c \approx 10\text{^}187$ или, иначе говоря, $-10\text{^}187 < (\mathrm{Li}(t) - K) < 10\text{^}187$. В связи с чем лично у меня возникает такой вопрос: существуют ли такие простые числа P, (порядка Скьюза и больше) которые (после их подстановки в формулу Гаусса в виде $t \equiv \ln\ln P$) максимально точно «попадают» в *реальный* порядковый номер (K) данного простого числа P, то есть у которых модуль $|\mathrm{Li}(t) - K| \approx 0$ (почти ноль)? И как много таких чисел P? Возможно, их становится всё больше и больше (с ростом P)?

Умея вычислять $\mathrm{Li}(N)$, то есть, используя формулу Гаусса (где аргумент $t = \ln\ln N$), нетрудно убедиться, что с ростом аргумента t (то есть с ростом N) отношение $\mathrm{Li}(N)/(N/\ln N)$ устремляется к единице, например, уже при $t = 6{,}5741$ мы получаем 0,99849… (см. рис. 3.1). При $t >$

6,5741 сумма всех гауссовых слагаемых превышает 1,7·10^308, что создает проблемы при вычислении на ПК. На рис. 3.1 черными точками показаны два значения (N/ln$N$)/Li(N), а именно:
при $t \approx 4{,}9434$ (когда N – это конец Большого отрезка),
при $t = 27/4 = 6{,}75$ (когда N – это число Скьюза).

Из сказанного, вероятно, можно сделать такой вывод (который не противоречит графику на рис. 2.1?): в районе «скьюзовского» *времени* (t = lnlnN_c = 24/7 = 6,75) предельно «элементарная» формула $K \sim N/\ln N$ почти догоняет «сложную» формулу Гаусса $K \approx$ Li(N) в части *точности* вычисления количества (K) простых чисел на отрезке [1; N], если (внимание!) при оценке ошибки рассматривать *отношения* указанных функций вместо их *разности*.

Исходя из этого, далее мы будем полагать, что количество (K) простых чисел на отрезке [1; N] точнее всего вычисляется:
– по формуле $K \approx$ Li(N) при $t \le 6{,}5741$;
– по формуле $K \approx N/\ln N = e$^(e^$t - t$) при $t > 6{,}5741$.

4. Альфа-отрезок и темп изменения α

Альфа-отрезок – это отрезок [1; N], на котором вероятность встречи с *простым* числом равна Альфе (α). α = 0,0072973525698… – постоянная тонкой структуры – фундаментальная физическая постоянная, которая, возможно,… *изменяется*. В 2010 году при помощи телескопа VLT были получены новые указания на то, что постоянная тонкой структуры может не только *уменьшаться* со временем, но и возрастать, причём характер изменения зависит от направления, в котором ведётся наблюдение. Возможности такого пространственного изменения α и других фундаментальных констант в настоящее время изучаются в литературе. Тем не менее, пока рано делать какие-либо окончательные выводы об обнаружении такого рода эффектов. *Вероятность встречи с простым числом* – это отношение количества (K) простых чисел к количеству (N) всех натуральных чисел (на данном отрезке): K/N.

Указанное отношение $K/N \approx 0{,}0073$ можно понимать и в том смысле, что на отрезке [1; N] доля всех *простых* чисел составляет около **0,73**%, а доля всех прочих (*составных*) натуральных чисел –

около 99,27%. Напомню, что все *составные* числа «строятся» из *простых* чисел (2, 3, 5, 7, 11, 13,…), например: составное число 2016 = (**2**^5)·(**3**^2)·**7** и никакой иной набор простых чисел (кроме 2, 3, 7) в любой иной степени никогда не даст числа 2016 (оно факторизуется единственным образом, см. *основную теорему арифметики*).

По данным наблюдений космической обсерватории «Планк» (март 2013 года), общая масса-энергия наблюдаемой Вселенной на 95,1 % состоит из тёмной энергии и тёмной материи. Остальные 4,9 % приходятся на межгалактический газ (около 4,17%?) и на прочую *видимую материю* (около **0,73**%?): *звезды*, планеты и всё прочее, известное в рамках астрономии. Разумеется, что в рамках *космологии чисел* у меня есть соблазн объявить, что в мире чисел отношение $K/N \approx 0{,}0073$ неким образом «отражает» процентный состав… видимой материи во Вселенной. Ведь и в мире чисел мы «видим» только *простые* числа – это главнейший объект изучения *теории чисел* (бесконечно сложный раздел *высшей* математики), а все прочие (составные) числа нам «не интересны». Хотя без последних нельзя построить *Пирамиду делителей*, «генерирующую»… сами простые числа.

Описанная выше методика (см. формулу Гаусса) позволяет нам найти параметры любого отрезка, в том числе и Альфа-отрезка:
$t = \ln\ln N = 4{,}92756955487092\ldots$; $\ln N = 138{,}043596905601\ldots$;
$N = e\hat{}(e\hat{}t) = 8{,}944836325815\cdot 10\hat{}59$;
$K^* \equiv \mathrm{Li}(N) = 6{,}52736243486269\cdot 10\hat{}57$ (чуть больше реального K);
$\mathrm{Li}(N) - K < (N\hat{}0{,}5)\cdot\ln N \approx 1{,}3\cdot 10\hat{}32$ (согласно *теории чисел*);
$K/N = 0{,}0072973525698005\ldots$ (повторяет все цифры Альфы).

Альфа-временной интервал (*ави*) – это отрезок (миг) времени, который в 9,02352412972255 раз больше *планковского времени* (5,39106·10^–44 сек) или *элементарного временного интервала* (*эви*) – это второе (и равноправное у физиков) название планковского времени. Таким образом, в рамках *космологии чисел* мы получаем:

$$1\,\textit{ави} = 4{,}86463599947821\cdot 10\hat{}{-43}\ \text{сек}, \qquad (4.1)$$

$$1\ \text{сек} = 2{,}05565226279471\cdot 10\hat{}42\ \textit{ави}. \qquad (4.2)$$

При этом очевидно, что возраст Вселенной равен 13,798 миллиардов лет ≈ 4,35133728•10^17 сек ≈ 8,944836325815·10^59 *ави* («сегодня»). Значит, 1 год ≈ 365 (дней)·24 (часа)·60 (минут)·60 (сек) ≈ 31536000 сек ≈ 6,4827049759494·10^49 *ави* – примерно на столько увеличится наше

число («сегодня») N = 8,944836325815·10^59 через 1 год и станет равным N_1 = 8,94483632646327·10^59 при этом по формуле Гаусса мы получаем K_1 ≈ 6,52736243533222·10^57. Таким образом, через 1 год Альфа уменьшится и станет равной K_1/N_1 ≈ 0,00729735256979б, что *меньше*, чем Альфа «сегодня» (K/N ≈ 0,0072973525698) на **–4·10^–15**.
В 2014 году две группы исследователей сообщили о получении новых, более точных ограничений на скорость изменения постоянной тонкой структуры. Прецизионные измерения частот некоторых квантовых переходов ионов иттербия позволили им прийти к следующим предельным значениям вариации Альфа (α) за 1 год:
–7·10^–18 (Национальная физическая лаборатория, Великобритания),
–2·10^–17 (Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Германия).
И эти оценки удивительно близки к тому, что выдал нам мир чисел в рамках *космологии чисел* (**–4·10^–15**, это может проверить всякий).

Если допустить (в качестве гипотезы), что *ави*, как некая единица измерения времени, может иметь некий физический смысл, то тогда *Альфа-отрезок* (с правой границей N ≈ 8,9448·10^59) в мире чисел «отражает» возраст Вселенной, выраженный в *ави*.

Ранее роль Альфа-отрезка у меня выполнял *Большой отрезок*, содержащий столько первых натуральных чисел, сколько *планковских времен* (*эви*) «помещается» в возрасте Вселенной: 13,798 миллиардов лет = 8,07139464224104·10^60 *эви*. На Большом отрезке вероятность встречи с простым числом такова: K/N = 0,00718206096480096, что заметно меньше Альфы (относительная погрешность: ОП ≈ 1,6%). Ясно, что *Альфа-отрезок* почти в 9 раз меньше Большого отрезка.

В отличие от ***эви***, мой ***ави*** уже не является *элементарным* интервалом времени, то есть наименьшим из возможных в природе (в рамках известной нам физики, которая никогда не стоит на месте). Моя гипотеза в части *ави* может иметь вполне разумное обоснование. Например, *ави* может оказаться *характерным размером* замкнутых квантовых струн (в теории суперструн), или иных подобных фундаментальных образований (лежащих в основе теорий ВСЕГО). Или *ави* может оказаться неким важным отрезком времени, скажем, в процессе инфляции Вселенной (по Линде), которая длилась первые 10^7 *ави* (порядка этого?).

5. Исследование гауссовых слагаемых

Пусть число $N \approx 8{,}07 \cdot 10$^60 – это правая граница *Большого отрезка* [2; *N*] (эту главу я написал до того, как придумал Альфа-отрезок, см. гл. 4). Для этого числа *N* на рис. 5.1 представлены гауссовы слагаемые G_k в зависимости от роста порядкового номер *k*. Слагаемые G_k показаны в логарифмической шкале, поэтому мы видим ***горку*** с довольно покатыми боками, а вот если шкалу сделать линейной, то мы увидим ярко выраженный ***пик*** (рис. 5.2). Кстати, хотя Гаусс не первый открыл весьма распространённый в природе *нормальный закон распределения*, но он настолько тщательно его исследовал, что график этого распределения с тех пор часто называют ***гауссианой***, и пик на рис. 5.2 как раз и напоминает нам гауссиану. Ещё мне интересно: что знал Гаусс в части *распределения делителей у тильдаобразных чисел*? Ведь у тильдаобразных чисел *N* – также почти гауссианы и таких чисел бесконечно много [см. на портале «Техно-сообщество России» мои книги: «Зеркало» Вселенной» (гл. 13, 14, 15) и «Праймориал…» (гл. 16)].

По моему мнению, *гауссовы слагаемые – это ключ к ответу на многие вопросы в мире чисел*. Об этом я говорил ещё в книге «Параллельные миры II…» (гл. 1.12) и «Космология чисел (осень 2009)» (главы 3 – 10, но там во многом я «доставал правое ухо левой рукой»). Вот почему исследовать гауссовы слагаемые, узнать о них как можно больше – это сама по себе важная и интересная задача. Отчасти это мы и проделаем ниже (и также поохотимся на… *Альфу*).

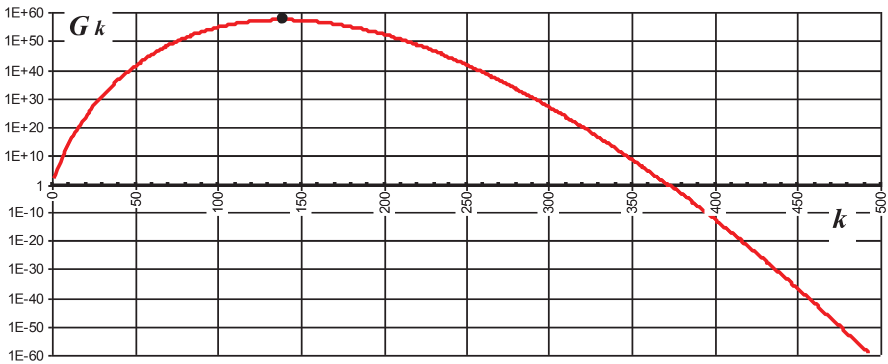

Рис. 5.1. Горка гауссовых слагаемых (в самом конце Большого отрезка)

Первое слагаемое (G_1 при $k = 1$) согласно формуле (2.3) равно:

$$\mathbf{G_1 \equiv (\ln N)\hat{}k/k/k! = \ln N = (e\hat{}t)}. \qquad (5.1)$$

Первое слагаемое будет оставаться единственным *весомым* слагаемым (то есть превосходящим единицу), до тех пор, пока число N не дорастет до e^2, ведь только тогда второе слагаемое дорастает до единицы: $G_2 = (\ln N)\hat{}2/(2\cdot 2!) = 1$, откуда мы и находим, что N = e^2 = 7,389… . И вплоть до N = e^4 = 54,598… (когда $G_1 = G_2 = 4$) первое слагаемое (G_1) будет самым большим, то есть горка гауссовых слагаемых (по типу рис. 5.1) будет иметь только правый склон горки (лежащий справа от чёрной точки – вершины горки). При $N >$ e^4 начинает появляться и левый склон горки.

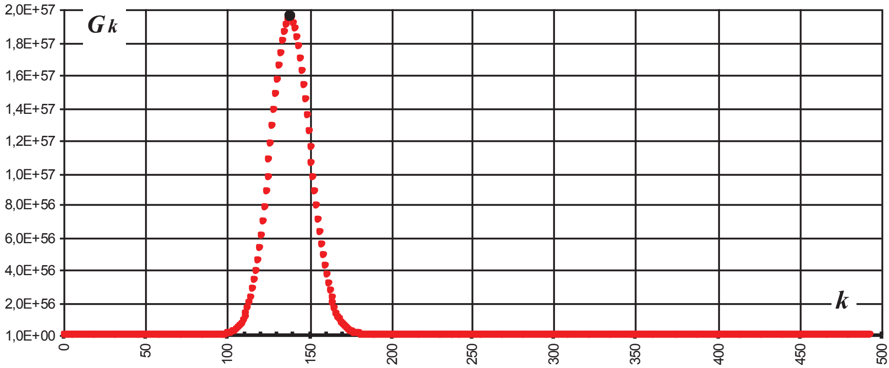

Рис. 5.2. Пик гауссовых слагаемых (в самом конце Большого отрезка)

Пиковый номер ($k_п$) – это номер, при котором слагаемое G_k достигает максимального значения (G_k = max, это чёрная точка на вершине пика на рис. 5.2) у достаточно большого числа N = e^(e^t). Пиковый номер мы найдем также путем нехитрых рассуждений. Как мы уже знаем, при $k = 1$ (предельно влево от пика) всегда $G_1 = \ln N$, поэтому при большом N всегда $G_1 >> 1$ (намного больше 1), то есть отношение $\ln(G_1)/k > 1$ (заметно больше 1). А вот при финишном номере $k = k_ф \approx e\cdot\ln N$ (предельно вправо от пика, см. гл. 6) всегда финишное слагаемое будет чуть больше единицы ($G_ф \approx 1$), поэтому $\ln(G_ф)/k \approx 0$ (близко к нулю). Тогда логично предположить, что при $k = k_п$ (точно под пиком) у пикового слагаемого: $\ln(G_k)/k \approx 1$, и, как мы убедимся, это верное предположение. При этом из формулы (2.5) получаем: $\ln(G_k)/k \approx (k\cdot t - 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) - 1{,}5\cdot\ln k - k\cdot\ln k + k)/k = 1$ или $t - 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi)/k - 1{,}5\cdot\ln k/k - \ln k$

+ 1 = 1. Для больших t мы отбрасываем два слагаемых и получаем: t – ln$k$ ≈ 0. Откуда *пиковый номер*:

$$\boldsymbol{k_п \approx e\hat{\ }t - v}, \tag{5.2}$$

где $\boldsymbol{v = 1 - [0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) + 1{,}5\cdot t)]/e\hat{\ }t}$ – поправка, найденная из разумного условия: $v = \ln(G_п)/k$ при $k = e\hat{\ }t$. Ясно, что поправка v – это всегда некое *экзочисло* (0 < Э < 1), устремляющееся к единице (никогда её не достигая), так, уже при t = 39 мы получим поправку v = 0,999 999 999 999 999 (15-ть девяток после запятой). Любопытно, что v = $Э_г$ = 0,756945106457584… (при $v < Э_г$ – это *тёмные* экзочисла), когда t = 3,14325…, что всего лишь на 0,053% меньше числа π.

Если «отключить» поправку (принять v = 0), то мы получим:

$$\boldsymbol{k_п \approx e\hat{\ }t = \ln N}, \tag{5.3}$$

что всегда будет немного больше реального пикового номера $k_п$. Например, для Большого отрезка t = 4,9433… и формула (5.2) нам выдает $k_п$ ≈ 139,303 (с поправкой v = 0,94057…), а реальное значение $k_п$ ≈ 139. Для Гипербольшого отрезка t = 137,035… и формула (5.3) выдает $k_п$ ≈ 3,266·10^59 (лишь в 24 раза меньше Большого отрезка).

Пиковое слагаемое ($G_п$) – наибольшее слагаемое (на вершине пика, см. рис. 5.2) у данного числа N = e^(e^t). То есть пиковое слагаемое соответствует пиковому номеру $k_п$ ≈ e^t = ln$N$. При таком номере ($k = k_п$) у достаточно большого числа N из формулы (2.5) мы получаем: $\ln(G_п) \approx e\hat{\ }t - 1{,}5\cdot t - 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi)$, откуда $G_п \approx e\hat{\ }(e\hat{\ }t)/e\hat{\ }[1{,}5\cdot t + 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi)]$. Однако удобней говорить не про $G_п$, а про отношение:

$$\boldsymbol{N/G_п \approx \exp[1{,}5\cdot t + 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi)] \approx 2{,}5066\cdot(e\hat{\ }t)\hat{\ }1{,}5}. \tag{5.4}$$

Например, для Большого отрезка t = 4,9433… и формула (5.4) нам выдает $N/G_п$ ≈ 4163, а реальное значение $N/G_п$ ≈ 4133 – во столько раз конец Большого отрезка (число N) превосходит его пиковое слагаемое ($G_п$). Кстати, в данном случае ОП = (4163 – 4133)/4163 ≈ 0,0072 (что лишь на 1,3% меньше *Альфы*). Для Гипербольшого отрезка t = 137,035…, поэтому $N/G_п$ ≈ 4,678·10^89.

6. Финишные гауссовы слагаемые

Финишный номер ($k_ф$) – это наибольший номер k, при котором всё ещё $G_k \geq 1$ у данного числа $N = e\hat{}(e\hat{}t)$. Иначе говоря, $k_ф$ – это количество *весомых* слагаемых G_k, то есть превосходящих единицу. Если $G_k = 1$, тогда $\ln(G_k) = 0$, а из формулы (2.5) для достаточно большого числа N мы получаем: $\ln(G_k) \approx k \cdot t - 0{,}5 \cdot \ln(2 \cdot \pi) - 1{,}5 \cdot \ln k - k \cdot \ln k + k = 0$ или $\ln(G_k)/k \approx t - 0{,}5 \cdot \ln(2 \cdot \pi)/k - 1{,}5 \cdot \ln k/k - \ln k + 1 = 0$. Если $k >> 1$, то мы отбрасываем два слагаемых, стремящихся к нулю, и получаем: $t - \ln k + 1 \approx 0$. Откуда находим *финишный номер*:

$$\boldsymbol{k_ф \approx \mathrm{A}[e\hat{}(t\ +1) - u]}, \tag{6.1}$$

где $\boldsymbol{u = 0{,}5 \cdot \ln(2 \cdot \pi) + 1{,}5 \cdot (1 + t)}$ – поправка, найденная из разумного условия: $u = -\ln(G_k)$ при $k = e\hat{}(t + 1)$. Поскольку $k_ф$ – это целое число, то здесь функция *антье* (А) выделяет (оставляет) целую часть от вещественного числа, полученного в квадратных скобках. Для всех $N > 4$ формула (6.1) даёт либо реальный $k_ф$, либо номер, превосходящий реальный $k_ф$ на единицу (но никак не больше). Например, когда $N = 5…65500$, то у 61,4% указанных чисел формула (6.1) точно «попадает» в реальный финишный номер $k_ф$, а вот у прочих 38,6% – реальный $k_ф$ будет на единицу меньше того, что выдает формула (6.1). С помощью ПК нетрудно убедится, что по мере роста числа N доля точных «попаданий» будет расти (правда, весьма медленно). Возможно, что указанные 61,4% – это очередная «тень» пресловутого *золотого сечения* (которое равносильно 61,8%).

Также любопытно, что поправка будет равна нулю ($u = 0$), когда $t = -[1 + \ln(2 \cdot \pi)/3] = -1{,}6126…$, что всего лишь на 0,3% меньше пресловутого *золотого сечения* (1,618), «тень» которого, довольно часто возникает в мире чисел (скажем, как и *«магия» числа 7* и 137).

Если «отключить» поправку (принять $u = 0$), то мы получим:

$$\boldsymbol{k_ф \approx e\hat{}(t\ +1) = e \cdot \ln N}, \tag{6.2}$$

что всегда будет немного больше реального $k_ф$. Например, для Большого отрезка $t = 4{,}9433…$ и формула (6.1) нам выдает $k_ф \approx 371{,}387$ (с поправкой $u \approx 9{,}83$), а реальное значение $k_ф \approx 371$. Для Гипербольшого отрезка $t = 137{,}035…$ и формула (6.2) нам выдает $k_ф \approx 8{,}877 \cdot 10\hat{}59$ (всего лишь в 9 раз меньше Большого отрезка), причем здесь поправка $u \approx 208$, разумеется, совсем ничтожна на фоне колоссального $k_ф$, однако и эта поправка может иметь сама по себе некий смысл (особенно, в рамках *космологии чисел*).

Таким образом, мы приходим к красивому отношению $\boldsymbol{k_ф/k_п \approx e}$ или $(k_ф/k_п)$^0,5 ≈ e^0,5 = 1,6487…, что также близко к пресловутому *золотому сечению* (больше него на 1,86%). Причем величина e^0,5 довольно часто фигурирует в мире чисел (в моей *космологии чисел*).

Финишное слагаемое $(G_ф)$ – это наименьшее слагаемое, которое всё ещё превосходит единицу. Иначе говоря, если *реальный* финишный номер $k_ф$ = A[e^(t + 1) – 0,5·ln(2·π) – 1,5·(1 + t)] (возможно, что данное значение $k_ф$ потребуется уменьшить на единицу) мы подставим в формулу $G_ф$ = (ln$N$)^$k_ф$/$k_ф$/($k_ф$)!, то мы получим *реальное* финишное слагаемое данного числа N. Причем указанным способом финишные слагаемые $G_ф$ можно без проблем вычислять на ПК у чисел N, вплоть до N = 3,5492·10^28.

Первая сотня реальных финишных слагаемых $G_ф$, уменьшенных на единицу $(G_ф – 1)$, представлена на рис. 6.1 в виде синей точки для каждого числа N: от N = 3 до N = 100. Как мы видим, все финишные слагаемые разделяются на чётко выраженные ***серии*** (S – её номер), внутри которых параметр $(G_ф – 1)$ растет «по дуге» (в наших осях):
в 1-ую серию (S = 1) входят пять чисел N = 3, 4, 5, 6, 7;
во 2-ую серию (S = 2) входят шесть чисел N = 8, 9,10, 11, 12, 13;
в 3-ю серию (S = 3) входят девять чисел N = 14, 15,16, 17,…, 22; и т.д.

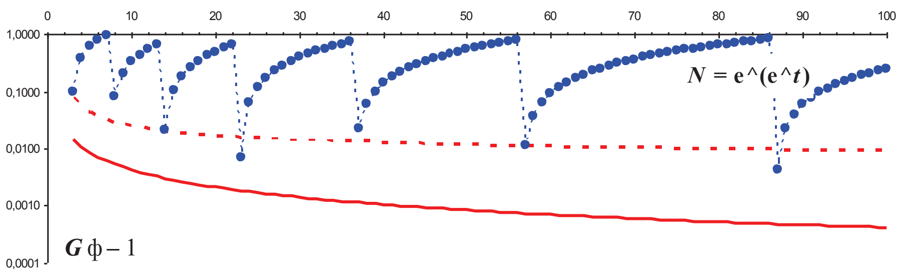

Рис. 6.1. Семь серий финишных слагаемых $G_ф$ у чисел от N = 3 до N =100

Начало серии $(N_s)_{min}$ – это первое и всегда наименьшее число N, с которого эта серия (S) начинается. Таких чисел бесконечно много: $(N_s)_{min}$ = 3, 8, 14, 23, 37, 57, 87, 132,… , а их финишные слагаемые $(G_s)_{min}$

устремляются к единице. Поэтому параметры $(G_s)_{min}$–1 пытаются опуститься до *красной пунктирной линии* (КПК) или даже до красной сплошной линии на рис. 6.1. Исследования показывают, что на отрезке от $N = 3$ до N = 704.113.617.312.917 ($S = 85$) модуль относительной погрешность |ОП| процесса сближения параметра $(G_s)_{min}$ с единицей описывается такой эмпирической формулой:

$$\mathbf{|ОП| = -(1 - (G_s)_{min})/(G_s)_{min} = 1 - 1/(G_s)_{min} \approx A/N\text{^}B}, \qquad (6.3)$$

где $A = 0{,}0412$ и $B = 1$ (причем они могут измениться с ростом N?).

Из формулы (6.3) вытекает эмпирический закон роста $(G_s)_{min}$:

$$\mathbf{(G_s)_{min} - 1 \approx A/N\text{^}B}, \qquad (6.4)$$

Формула (6.4) – это и есть уравнение красной линии на рис. 6.1, именно на этой линии (разумеется, с некой погрешностью) лежат реальные наименьшие финишные слагаемые $(G_s)_{min}$, как, например, у чисел N = 49.312 и N = 3.317.687, открывающих серии $S = 23$ и $S = 34$. И ни один параметр $(G_s)_{min}$–1 (на рис. 6.1 это первая и самая нижняя точка в каждой серии) никогда не опустится ниже красной линии (границы). Я могу ошибаться только в уравнении красной линии (в формуле 6.4), но подобная граница, безусловно, существует и она никогда не достигает нуля при $N \to \infty$. Таким образом, с ростом номера серии (S) у первого числа $(N_s)_{min}$ в каждой серии финишное слагаемое $(G_s)_{min}$, вообще говоря, быстро *устремляется к единице, но никогда её не достигая*. Например, при S = 85 серия начинается с числа $(N_s)_{min}$ = 704.113.617.312.917, у которого финишное слагаемое $(G_s)_{min}$ = 1,000.000.000.000.01… А вот в конце Большого отрезка $(G_s)_{min} \approx 1 + 0{,}0412/N \approx 1 + 5{,}7\cdot10\text{^}{-63}$. В терминах моей космологии чисел слагаемые $(G_s)_{min}$ – это *проточисла*, которые убывают, начиная с проточисла $П$ = 1,0986… [это $(G_s)_{min}$ у числа $N = 3$ имеющего $S = 1$], которому *равномощно* обычное число 44,278… .

Зона обитания финишных слагаемых ($G_ф$) – это зона, которую на рис. 6.1 снизу ограничивает *красная пунктирная линия* (КПК). Поясню, как я получил уравнение этой линии. Если в нашу главную формулу («по Стирлингу») $\ln(G_k) \approx k\cdot t - \ln k - 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi\cdot k) - k\cdot\ln k + k$ мы подставим $k = k_ф \approx e\text{^}(t + 1)$ (а всё это близко к истине при больших t и $k_ф$), то мы получим такое уравнение:

$$\mathbf{G_ф \approx \exp[-1{,}5\cdot t - 1{,}5 - 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi)] \approx 0{,}089/(e\text{^}t)\text{^}1{,}5}. \qquad (6.5)$$

Это и есть уравнение *красной пунктирной линии* (КПК). При этом оказывается (но почему – я… не понимаю), что львиная доля всех реальных параметров $G_ф - 1$ (у всех чисел N) на графике будет лежать выше КПК. Например, на отрезке от $N = 3$ до $N = 65525$ *вероятность* (P) того, что у случайно выбранного числа N параметр ($G_ф - 1$) лежит ниже КПК составляет $P \approx 0{,}00322…$, иначе говоря, на этом отрезке у 0,322% всех чисел N параметр ($G_ф - 1$) лежит ниже КПК. И с ростом правой границы отрезка [3; N] указанный процент будет только уменьшаться, при этом, вероятно, (всё та же формула 6.5?):

$$\boldsymbol{P \sim 0{,}089/(e\text{^}t)\text{^}1{,}5}. \qquad (6.6)$$

Для сравнения: на Большом отрезке $P \sim 5{,}36\cdot10\text{^}{-5}$, на Гипербольшом отрезке $P \sim 4{,}77\cdot10\text{^}{-91}$.

Поиск начала серии, то есть поиск числа $(N_s)_{min}$, с которого начинается данная серия S. Для любого $S = 1, 2, 3, 4, 5, …$ легко оценить (вычислить с неким «недобором») соответствующее число $(N_s)_{min}$, и это становится возможным только потому, что ***номер серии равен финишному номеру*** (**$S = k_ф$**) числа $(N_s)_{min}$ (в этом легко убедится с помощью ПК). Исходя из этого, мы приравняем финишное слагаемое ($G_ф$) к единице: $G_ф = (e\text{^}t)\text{^}k_ф/k_ф/(k_ф)! = 1$ и решим это уравнение с учетом формулы Стирлинга и указанного факта ($k_ф = S$). В итоге мы получим такую формулу:

$$t\,^* = [0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) + 1{,}5\cdot\ln S)]/S + \ln S - 1, \qquad (6.7)$$

или $N^* = e\text{^}(e\text{^}t^*)$. Причем для любого S имеем $N^* < (N_s)_{min}$. Например, при $S = 3$ получим $t^* = 0{,}9542…$, а реально $t = 0{,}9704…$ – именно при таком t мы получим $(N_s)_{min} = e\text{^}(e\text{^}t) = 14$ – число, начинающее серию с номером $S = 3$, и у которого *реальный* финишный номер равен номеру серии (**$k_ф = S$**). Зная N^*, с помощью ПК уже легко выйти и на реальное число $(N_s)_{min}$, при котором происходит резкий «провал» (по направлению к единице) финишного слагаемого $G_ф = (\ln N)\text{^}k_ф/k_ф/(k_ф)!$.

Замечу, что условный финишный номер (по Стирлингу):

$$k_ф^* = e\text{^}(t^* + 1) - 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) - 1{,}5\cdot(1 + t^*) \qquad (6.8)$$

для $S \geq 3$ будет больше реального финишного номера $k_ф$ на величину:

$$Z = k_ф^* - k_ф = k_ф^* - S. \qquad (6.9)$$

Например, при $S = 3$ получаем $Z = 0{,}2082…$. Не трудно убедиться, что при $S \geq 9$ параметр Z убывает: от 0,4823 до 0,2158 (при $S = 85$). А вот далее (при $S > 140$) закон убывания параметра Z, вероятно, будет следующим: $Z \approx 1 - G$ (эту формулу я просто угадал), где G – гауссово слагаемое, рассчитанное по условным параметрам t^* и k^*, о которых говорилось чуть выше. Такая методика при S = 24.154.926 (t = 16) дает нам $Z \approx 0{,}0000128$.

Максимально возможное *финишное слагаемое* $(G_ф)_{max}$ у числа N = e^(e^t) устремляется к числу e = 2,718… . При этом внутри каждой серии с номером S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…максимальным оказывается финишное слагаемое у последнего числа N в данной серии: N = 7, 13, 22, 36, 56, 86, 131,…, и соответственно: $G_ф \approx$ 1,946; 1,645; 1,641; 1,718; 1,761; 1,808; 1,855;…, (см. рис. 6.2). При S = 370 имеем $N \approx$ 7,23457027851724·10^60 и $(G_ф)_{max} \approx 2{,}6546$, что на 2,4% меньше числа e. При S = 371 имеем $N \approx$ 1,04661404337941·10^61, значит, конец Большого отрезка лежит «внутри» 371-й серии (чуть дальше 1/4 от начала серии, если всю её длину принять за единицу).

Мои исследования показывают, что на отрезке от t = 1 до t =15 относительная погрешность (ОП) процесса сближения параметра $(G_ф)_{max}$ с математической константой e описывается такой формулой:

$$\textbf{ОП} = [e - (G_ф)_{max}]/(G_ф)_{max} = e/(G_ф)_{max} - 1 \approx A/(e\text{^}t)\text{^}B, \qquad (6.10)$$

где A = 1,9220 и B = 0,8915 (причем они явно растут с ростом t). В конце Гипербольшого отрезка формула (6.10) дает ОП ≈ 1,75·10^–53, а при A = 2 и B = 1 получим ОП ≈ 6,12·10^–60 (что ближе к истине?).

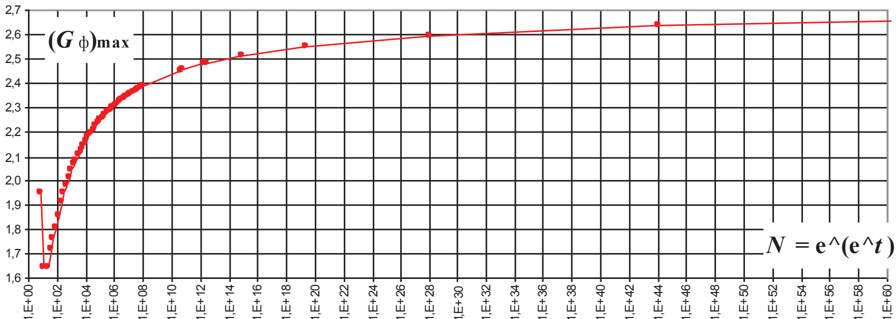

Рис. 6.2. Максимально возможное финишное слагаемое $(G_ф)_{max}$ у числа N

Из формулы (6.10) вытекает эмпирический закон роста $(G_ф)_{max}$:

$$\mathbf{(G_ф)_{max} \approx e/[1 + A/(e\text{^}t)\text{^}B]}, \qquad (6.11)$$

у которого ОП в части $(G_ф)_{max}$ убывает от 4% до 0,002% на отрезке от $t = 1$ до $t = 5{,}3$, а при $t > 42$ перестает изменяться уже 14-я цифра в результате счёта: $(G_ф)_{max} \approx 2{,}71828182845905\ldots$. Формула (6.11) – это и есть уравнение красной линии на рис. 6.2 (при $N > 22$ и, разумеется, с некой погрешностью), на которой лежат реальные значения $(G_ф)_{max}$.

Зная $(G_ф)_{max}$ и их параметр $t = \ln\ln N$, нетрудно убедиться, что при $N \geq 13$ формула $k_ф = А[e\hat{}(t + 1) – 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) – 1{,}5\cdot(1 + t)]$ выдает финишный номер $k_ф$, который на единицу больше реального, а реальный финишный номер равен номеру серии ($k_ф = S$):

$$\mathbf{k_ф = S = А[e\hat{}(t + 1) – 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) – 1{,}5\cdot(1 + t)] – 1}, \qquad (6.12)$$

где функция антье (А) выделяет целую часть из выражения, стоящего в квадратных скобках. Формула (6.12) позволяет нам утверждать, что на Гипербольшом отрезке насчитывается около $S \approx 8{,}877\cdot10\hat{}59$ серий (всего лишь в 9,09 раз меньше, чем количество натуральных чисел на Большом отрезке).

Поиск конца серии, то есть поиск числа $(N_s)_{max}$, которым заканчивается данная серия S. Для любого $S = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots$ легко оценить (вычислить с неким «перебором») соответствующее число $(N_s)_{max}$. Чтобы его найти мы приравняем финишное слагаемое ($G_ф$) к числу e: $G_ф = (e\hat{}t)\hat{}k_ф/k_ф/(k_ф)! = e$ и решим это уравнение с учетом формулы Стирлинга (см. гл.8). В итоге мы получим:

$$t^* = [1 + 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) + 1{,}5\cdot\ln S)]/S + \ln S – 1, \qquad (6.13)$$

или $N^* = e\hat{}(e\hat{}t^*)$. Причем для любого S имеем $t^* > t$, и модуль относительной погрешности формулы (6.13) быстро убывает примерно таким образом: $|ОП| = |t – t^*|/t^* \approx 1{,}816/S\hat{}2{,}0051$. Например, при $S = 3$ получим $t^* = 1{,}2875\ldots$, а реально $t = 1{,}1285\ldots$ – именно при таком t мы получим $(N_s)_{max} = e\hat{}(e\hat{}t) = 22$ – число, завершающее серию с номером $S = 3$. Зная t^*, с помощью ПК уже легко выйти и на реальное t, за котором происходит резкий «провал» (по направлению к единице) финишного слагаемого $G_ф = (e\hat{}t^*)\hat{}k_ф/k_ф/(k_ф)!$.

7. Тайна золотого сечения

Кратность (Q_k) – это отношение последующего гауссова слагаемого (G_{k+1}) к предыдущему (G_k). То есть: $\mathbf{Q_k \equiv G_{k+1}/G_k}$ – это кратность

k-го гауссова слагаемого. Поскольку $G_k = (\ln N)$^$k/k/k!$ и $G_{k+1} = (\ln N)$^$(k+1)/(k+1)/(k+1)!$, то нетрудно получить такую формулу:

$$\boldsymbol{Q_k = \ln N/(k + 1/k + 2) = e\text{^}t/(k + 1/k + 2)}. \qquad (7.1)$$

Например, для Большого отрезка $t = 4{,}9433\ldots$ и формула (7.1) нам выдает кратность первого слагаемого: $\boldsymbol{Q_1 = G_2/G_1 = e\text{^}t/4} \approx 35{,}063$. У всякого числа N гауссовы номера k растут до бесконечности, поэтому и кратность Q_k убывает до бесконечности. Любопытно, что если вместо k подставлять *тёмные экзочисла* $Э_k = 1/k = 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5, 1/6, 1/7, \ldots$, то формула (7.1) абсолютно никак не изменится.

Сумма постфинишных слагаемых (Σ) – так мы будем называть сумму всех (а их, напоминаю, – бесконечно много) гауссовых слагаемых произвольного числа $N = e$^$(e$^$t)$, которые меньше единицы ($G_k < 1$ для всех $k > k_ф$). С помощью ПК, вычисляя в лоб (по формуле 2.3), мы видим, что у первых пяти чисел N, «открывающих» серии с номерами $S = 1, 2, 3, 4, 5$ (*магия числа* 7 ± 2) происходит рост нашей суммы $\Sigma \approx 0{,}335;\ 0{,}616;\ 0{,}660;\ 0{,}689;\ 0{,}723935795115066\ldots$ (соответственно у чисел $N = 3, 8, 14, 23, 37$). А вот для чисел N, открывающих все последующие серии $S = 6, 7, 8, 9, 10,\ldots$, сумма Σ уже только убывает, устремляясь к некому числовому пределу, примерно равному **0,582**. Напомню, что серии $S > 85$ открывает число $N = e$^$(e$^$t)$, у которого $t \approx [0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) + 1{,}5\cdot\ln S)]/S + \ln S - 1$.

С помощью ПК, вычисляя в лоб (по формуле 2.3), мы видим, что у первых 33-х чисел $N = 7, 13, 22, 36,\ldots, 3317686$, «закрывающих» серии с номерами $S = 1, 2, 3, 4,\ldots, 33$ (*магия числа* 32 ± 2), происходит рост указанной суммы $\Sigma \approx 1{,}278;\ 1{,}281;\ 1{,}355;\ 1{,}453;\ldots;\ 1{,}61723926061026\ldots$ (это только на 0,049% меньше *золотого сечения*, равного 1,618). А вот для чисел N, закрывающих все прочие серии $S = 34, 35, 36, 37, 38,\ldots$, сумма Σ уже только убывает, устремляясь к некому числовому пределу, примерно равному **1,582**.

Указанные здесь числа **0,582** и **1,582** (математическая природа которых будет полностью раскрыта ниже), по моему мнению, лежат в основе феномена «***золотого сечения***», которое символизируют числа 0,618 и 1,618. Последние можно получить разными способами (см. Википедию), а их математическая природа (по глубине смысла) не идет ни в какое сравнение с гауссовыми числами 0,582 и 1,582. Короче говоря, будь моя воля, то именно числа 0,582 и 1,582 я бы объявил «золотым сечением», имеющим глубочайший смысл в мире чисел (а также в… теоретической физике, но это пока – очевидно только автору).

Добавлю, что конец Большого отрезка (при t = 4,9433…) имеет сумму Σ = 0,802903279315056…, что больше 0,582, поскольку конец Большого отрезка находится «внутри» серии S = 371, которую открывает число N = e^(e^t) с параметрами t = 4,94259894030856… и Σ = 0,597682152487506… .

Минимальная сумма (Σ_{min}) – это минимально возможная сумма всех постфинишных слагаемых для любого числа N. Мы знаем, что с ростом числа N, открывающего каждую серию, его финишное слагаемое $G_ф$, вообще говоря, устремляется к единице. Поэтому мы сделаем такое допущение: $G_ф = 1$, хотя это никогда и не реализуется. А ещё мы будем полагать, что Q_k = e^$t/k_ф$ = const, хотя на самом деле кратность Q_k быстро устремляется к нулю с ростом k. С учетом этих допущений и рекуррентной формулы $G_{k+1} = Q_k \cdot G_k$ мы получаем: $G_{k+1} = Q_k \cdot 1$; $G_{k+2} = Q_k \cdot G_{k+1}$; $G_{k+3} = Q_k \cdot G_{k+2}$; $G_{k+4} = Q_k \cdot G_{k+3}$; и т.д. То есть мы получили бесконечную *убывающую геометрическую прогрессию*, у которой первый член $a = Q_k = e\text{^}t/k_ф$, а знаменатель $q = a = Q_k$ = const. Сумма ($\Sigma_{угп}$) убывающей геометрической прогрессии, как известно, вычисляется по формуле $\Sigma_{угп} = a/(1-q)$, которая в нашем случае ($q = a$) принимает вид: $\Sigma_{угп} = 1/(1/a - 1)$. Итак, мы получаем:

$$\mathbf{\Sigma \approx 1/(k_ф/e\text{^}t - 1)}, \tag{7.2}$$

где $k_ф \approx e\text{^}(t + 1) - [0,5\cdot\ln(2\cdot\pi) + 1,5\cdot(1 + t)]$. Например, для конца Большого отрезка Σ ≈ 0,6067, что (из-за допущений) меньше реальной суммы всех постфинишных слагаемых.

При $t \to \infty$ полагаем $k_ф = e\text{^}(t+1) = e\cdot e\text{^}t$ (что больше реального $k_ф$), и формула (7.2) выдает нам красивый *предельный* результат:

$$\mathbf{\Sigma_{min} > 1/(e - 1) = 0,581976706869326\ldots}, \tag{7.3}$$

где Σ_{min} – *минимально возможная* сумма посфинишных слагаемых для любого числа $N \to \infty$. Причем данный вывод – абсолютно правильный, несмотря на наши явно примитивные рассуждения. Это показывают и исследования на ПК, о которых вкратце скажу ниже.

Рассмотрим все числа $N = e^{(e^t)}$, открывающие серию с номером $S = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Как мы знаем, у таких чисел N финишное слагаемое $G_ф$, вообще говоря, наименьшее и стремящееся к единице (при $t \to \infty$). Поэтому у этих N их реальную сумму (Σ) постфинишных слагаемых можно рассматривать как некое приближение к константе $\Sigma_{min} \approx 0{,}582$, а модуль *относительной погрешности* |ОП| такого приближения будет убывать примерно по такому эмпирическому закону (который работает от $t = 1{,}49647$ до $t = 33$):

$$|ОП| = |\Sigma_{min} - \Sigma|/\Sigma < 9{,}85/(e^t)^{0{,}9683}, \qquad (7.4)$$

где Σ – сумма реальных постфинишных слагаемых у рассмотренных мною чисел N из указанного отрезка числовой оси. Вероятно, в конце Гипребольшого отрезка: $|ОП| < 2\cdot10^{-57}$.

При желании и в части реального |ОП| можно обнаружить нашу *Альфу* ($\alpha = 0{,}007297\ldots$). При $S = 1867$ ($t \approx 6{,}5386$ или $N \approx 1{,}759\cdot10^{300}$) реальный $|ОП| \approx 0{,}007299$ – чуть больше, чем *Альфа*. При $S = 1868$ ($t \approx 6{,}5392$ или $N \approx 2{,}541\cdot10^{300}$) реальный $|ОП| \approx 0{,}007296$ – чуть меньше, чем *Альфа*. Указанные здесь два числа $N \sim 10^{300}$ имеют порядок, отдаленно напоминающий современное значение *числа Скьюза* ($N_c \approx 8{,}185\cdot10^{370}$ или $t = 27/4 = 6{,}75$), причем это значение может оказаться ещё ближе к нашим $N \sim 10^{300}$.

Максимальная сумма (Σ_{max}) – это максимально возможная сумма всех постфинишных слагаемых для любого числа N. Мы знаем, что с ростом числа N, закрывающего каждую серию, финишное слагаемое $G_ф$, вообще говоря, устремляется к числу $e = 2{,}718\ldots$. Поэтому мы сделаем такое допущение: $G_ф = e$, хотя это никогда и не реализуется. А ещё мы будем полагать, что $Q_k = e^t/k_ф = \text{const}$, хотя на самом деле кратность Q_k быстро устремляется к нулю с ростом номера k. С учетом этих допущений и рекуррентной формулы $G_{k+1} = Q_k\cdot G_k$ мы получаем: $G_{k+1} = Q_k\cdot e$; $G_{k+2} = Q_k\cdot G_{k+1}$; $G_{k+3} = Q_k\cdot G_{k+2}$; $G_{k+4} = Q_k\cdot G_{k+3}$; и т.д. То есть мы получили бесконечную *убывающую геометрическую прогрессию*, у которой первый член $a = Q_k\cdot e = e^t/k_ф\cdot e$, а знаменатель $q = Q_k = \text{const}$. Сумма ($\Sigma_{угп}$) убывающей геометрической прогрессии $\Sigma_{угп} = a/(1-q)$, которая в нашем случае принимает вид: $\Sigma_{угп} = e/(1/a - 1)$. Итак, мы получаем:

$$\boldsymbol{\Sigma \approx e/(k_ф/e^t - 1)}, \qquad (7.5)$$

где $k_ф \approx e$^$(t + 1) – [0,5·\ln(2·\pi) + 1,5·(1 + t)]$.

При $t \to\infty$ полагаем $k_ф = e$^$(t+1) = e·e$^t (что больше реального $k_ф$), и формула (7.5) выдает нам красивый *предельный* результат:

$$\boldsymbol{\Sigma_{max} > e/(e - 1) = 1{,}581976706869326\ldots}, \qquad (7.6)$$

где Σ_{max} – *максимально возможная* сумма посфинишных слагаемых для любого числа N. Замечу, что $\boldsymbol{\Sigma_{max} - \Sigma_{min} = e/(e - 1) - 1/(e - 1) = 1}$. Причем данный вывод – абсолютно правильный, несмотря на наши явно примитивные рассуждения. Это показывают и исследования на ПК, о которых вкратце скажу ниже.

Рассмотрим все числа N = e^(e^t), закрывающие серию с номером S = 1, 2, 3, 4, 5,… . Как мы знаем, у таких чисел N финишное слагаемое $G_ф$, вообще говоря, наибольшее и стремящееся к числу e (при $t \to \infty$). Поэтому у этих N их реальную сумму (Σ) постфинишных слагаемых можно рассматривать как некое приближение к константе $\Sigma_{max} \approx 1{,}582$, а модуль *относительной погрешности* |ОП| такого приближения будет убывать примерно по такому эмпирическому закону (который построен на отрезке от N = 7 до $t \approx 15{,}123467$):

$$|ОП| = |\Sigma_{max} - \Sigma|/\Sigma < 1{,}6773/(e\text{^}t)\text{^}0{,}9432, \qquad (7.7)$$

где Σ – сумма реальных постфинишных слагаемых у рассмотренных мною чисел N из указанного отрезка числовой оси. По формуле (7.7) в конце Гипербольшого отрезка мы получаем |ОП| < 10^–56.

При желании и в части реального |ОП| можно обнаружить нашу *Альфу* (α = 0,007297…). При S = 360 ($t \approx 4{,}915892516$ или $N \approx$ 1,801·10^59) реальный |ОП| ≈ 0,007304 – чуть больше, чем *Альфа*. При S = 361 ($t \approx 4{,}918595606$ или $N \approx$ 2,606·10^59) реальный |ОП| ≈ 0,007290 – чуть меньше, чем *Альфа*. Указанные числа N почти в 45 и 31 раз меньше Большого отрезка, то есть их порядок почти такой же. При S = 370 ($t \approx 4{,}9426$ или $N \approx$ 7,236·10^60, внутри этой серии лежит конец Большого отрезка) реальный |ОП| ≈ 0,007169 (почти *Альфа*).

8. Формула Стирлинга

Произведение всех натуральных чисел от 1 до k включительно называется ***факториáл*** *числа k* (от лат. factorialis – производящий; обозначается $k!$, произносится «*ка факториал*», в данной моей работе удобнее брать именно букву k – это номер гауссова слагаемого):

$$\boldsymbol{k! \equiv 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot k}. \qquad (8.1)$$

По договорённости считают: 0! ≡ 1. Факториалы часто используются в комбинаторике, *теории чисел*, функциональном анализе. Факториал является чрезвычайно быстро растущей функцией. Он растёт быстрее, чем экспоненциальная функция (e^*k*), но медленнее, чем двойная экспоненциальная функция e^(e^*k*).

Для чисел k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…, 170,… последовательность факториалов начинается так: $k!$ = 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040,…, 7,257·10^306,… . Общеизвестная программа "Excel" позволяет вычислить факториал именно до числа k = 170, а вот уже для k = 171 ПК напишет такое сообщение: «#ЧИСЛО!».

При $k \geq 170$ во многих случаях для приближённого значения факториала достаточно рассматривать ***формулу Стирлинга***, точнее говоря, только *главный (первый) член* (длиной) формулы Стирлинга:

$$\boldsymbol{k! \approx (2\cdot\pi\cdot k)\hat{}0{,}5\cdot(k/e)\hat{}k}, \qquad (8.2)$$

где π = 3,14… , e = 2,718… – известные математические константы. По моим оценкам при 1 < K < 170 относительная погрешность (ОП) формулы (8.2) будет убывать примерно по закону ОП = 0,0832/k, и это примерно на 1% меньше реальной ОП формулы (8.2).

Прологарифмировав формулу (8.2), получим такое выражение:

$$\boldsymbol{\ln(k!) \approx 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) + 0{,}5\cdot\ln k + k\cdot(\ln k - 1)}, \qquad (8.3)$$

где 0,5·ln(2·π) = 0,91893853… . Формула (8.3) замечательна тем, что на ПК по ней можно вычислять вплоть до $k = k_{max} \approx$ 2,55·10^305. При этом по моим оценкам при 1 < k < 170 относительно реальных значений ln(k!) у формулы (8.3) её ОП будет убывать примерно по закону ОП ≈ 0,0726/k^2,2507. Так же, возможно, что при $k \to \infty$ этот закон трансформируется, скажем, к такому виду: ОП ≈ 0,0073/k^2.

Итак, чтобы вычислить факториал колоссального числа (170 < k < 2,55·10^305), сначала по формуле (8.3) надо вычислить логарифм его факториала: ln(k!) ≈ X, а уже затем найти и сам факториал:

$$\boldsymbol{k! = \exp(X) = e\hat{}X = 10\hat{}(X/\ln 10) \approx 10\hat{}(X/2{,}3)}. \qquad (8.4)$$

Например, при $k = k_{max} \approx$ 2,55·10^305 имеем ln(k!) ≈ 1,791·10^308, откуда вычисляем сам факториал: k! ≈ 10^(7,777·10^307).

Формула (8.3) замечательна ещё и любопытным выводом:

$$\boldsymbol{\ln(k!) \sim k\cdot\ln k}. \qquad (8.5)$$

То есть при устремлении аргумента k к бесконечности ($k \to \infty$), мы вправе говорить, что логарифм факториала $\ln(k!)$ устремляется к *простому числу* ($N \sim k\cdot\ln k$) с ***порядковым номером k*** (в ряде всех простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13,…). Иначе говоря, большое ***k-ое простое число устремляется к логарифму факториала числа k***. Собственно поэтому в данной главе факториал я обозначил именно $k!$, а не $n!$ (*эн факториал*), как это обычно принято в математике.

Рассмотрим модуль относительной погрешности (ОП без знака «минус») формулы (8.5). То есть мы рассмотрим ОП выражения $k\cdot\ln k$ (которое отличается от реального k-го простого числа) относительно максимально точного значения $\ln(k!)$. При $3 < k < k_{max}$ модуль ОП формулы (8.5) можно описать такой эмпирической формулой:

$$|\text{ОП}| \approx 1/\ln k. \tag{8.6}$$

Ниже приведу реальные ОП формулы (8.5) для k, знáчимых в рамках в космологии чисел (это может нам пригодиться):

$k \approx 48$ [когда $k!$ – это Большой отрезок]…. получим ОП ≈ – 24,30%;
$k \approx 198$ [когда $k!$ – это число Скьюза]…….. получим ОП ≈ – 18,57%;
$k \approx 9{,}485\cdot10$^10 [когда $k! \approx 10$^(10^12)]……. получим ОП ≈ – 3,956%;
$k \approx 2{,}490\cdot10$^57 [когда $k! \approx$ e^(e^137)]…….. получим ОП ≈ – 0,757%;
$k \approx 2{,}55\cdot10$^305 [когда $k! \approx$ e^(10^308)]……. получим ОП ≈ – 0,142%.

Особо подчеркну, что при $k! \approx$ e^(e^(1/α)), где α = 0,007297… (это числовое значение *постоянной тонкой структуры*, 1/α ≈ 137,036), мы получаем |ОП| ≈ 0,00757, что больше самого α всего лишь на 3,56%.

9. Фактории – отрезки без простых чисел

Путем нехитрых рассуждений можно доказать, что существуют *сколь угодно длинные* отрезки (ряда натуральных чисел), на которых нет ни одного простого числа (нерегулярность распределения простых чисел). Докажем сказанное. Пусть параметр m пробегает такие значения: $m = 2, 3, 4, 5, 6,\dots, F$ (просто произвольный отрезок натуральных чисел, где $F \geq 2$). Вычисляем *факториал* $F! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot F$, а потом строим такой ряд натуральных чисел (идущих подряд, без пропусков): $F!+2, F!+3, F!+4, F!+5, F!+6,\dots, F!+F$. Так вот, каждое из этих чисел – *составное* (никак не простое число), ведь всякое число $F! + m$ делится на m (поскольку F! делится на m и само m делится на m. И наша, скажем так, ***F-теорема*** – доказана.

Например, при $F = 7$ имеем факториал: $F! = 1·2·3·4·5·6·7 = 5040$, и строим такой ряд чисел $F!+2$, $F!+3$, $F!+4$, $F!+5$, $F!+6$, $F!+7$ (получим числа: 5042, 5043, 5044, 5045, 5046, 5047). Всего 6 чисел, среди которых нет ни одного простого числа, причем нет смысла это проверять в силу выше доказанной нашей *F-теоремы* (рассуждений, пригодных для любого $F \geq 2$). И совсем другое дело, что к указанным (F-теоремой) *составным* числам «примыкают» другие *составные* числа (слева: 5040, 5041 и справа: 5048, 5049, 5050), выходящие за рамки нашей теоремы – всё это уже «игра случая», зависящая от конкретного числа F.

Фактория (с номером F) – так мы назовем отрезок $[F!+2; F!+F]$ числовой оси, содержащий F–1 натуральное число, среди которых нет ни одного простого числа (в силу доказанной F-теоремы). Например,
1-я фактория – её нет (она «неправильная», там *простые* числа: 3, 2);
2-я фактория – это числа: 4, 4 (левая и правая границы совпадают);
3-я фактория – это 2 числа: 8, 9 (левая граница – 8, а правая – 9);
4-я фактория – это 3 натуральных числа: 26, 27,28;
5-я фактория – это 4 натуральных числа: 122, 123, 124, 125;
6-я фактория – это 5 натуральных чисел: 722, 723, 724, 725, 726;
7-я фактория – это 6 чисел: 5042, 5043, 5044, 5045, 5046, 5047; и т.д.

48-я фактория (F = 48) имеет уже такой факториал: $F! = 48! \approx 1{,}24·10^{61}$. То есть левая граница ($F!+2$) данной фактории близка к границе *Большого отрезка* ($N \approx 8{,}0714·10^{60}$). Иначе говоря, в конце Большого отрезка мы нашли, по крайней мере, один отрезок числовой оси длиной в 47 целых чисел (48-я фактория), среди которых нет ни одного простого числа.

Фактория с огромным номером $F \approx 2{,}4899·10^{57}$ имеет левую границу ($F!+2$), близкую к границе (N) *Гипербольшого отрезка*, у которого согласно нашему определению: $N = e^{(e^t)}$ и $t = 137{,}036…$ (численно это 1/α). Пишу «близкую» – поскольку логарифмы этих границ близки: $\ln(F!+2) \approx 3{,}2657·10^{59}$ и $\ln N = (e^t) \approx 3{,}2657·10^{59}$. Заметим, что эта, скажем, ***Гипербольшая фактория*** содержит «всего лишь» в 3242 раза меньше натуральных чисел, чем Большой отрезок, и среди всех $2{,}4899·10^{57}$ целых чисел фактории (идущих подряд, без пропусков) нет ни одного простого числа. Разве не удивительно!

Итак, у каждой фактории есть *левая граница* ($F!+2$) и *правая граница* ($F!+F$). И для каждой из этих границ мы можем вычислить количество (K) простых чисел, находящихся между 2 и данной границей (G). При этом мы будем исходить из «идеального» закона распределения простых чисел: $K = G/\ln G$ на отрезке $[2;G]$. Поэтому, скажем так, *идеальное количество* (K_n) простых чисел «внутри» каждой (F-й) фактории будет определяться следующим выражением:

$$\boldsymbol{K_n = (F! + F)/\ln(F! + F) - (F! + 2)/\ln(F! + 2)}. \qquad (9.1)$$

Вплоть до $F = 18$ параметр K_n нетрудно вычислить на ПК в программе "Excel". И хотя реальное количество простых чисел в любой фактории равно нулю (в силу нашего определения самого понятия «фактория»), наш параметр K_n растет от нуля (при $F = 2$) до $K_n = 0{,}5176559\ldots$ (при $F = 7$), а затем плавно убывает, скажем, до $K_n = 0{,}4355468\ldots$(при $F = 17$), и далее в "Excel" параметр K_n уже нельзя вычислить. Но можно найти эмпирическую формулу (для $F > 17$):

$$K_n = 0{,}7933/\ln(F! + 2)\hat{}0{,}1708, \qquad (9.2)$$

которая, при использовании формулы Стирлинга [в части замены: $\mathbf{\ln(F! + 2) \approx 0{,}5\cdot\ln(2\cdot\pi) + 0{,}5\cdot\ln F + F\cdot(\ln F - 1)}$], позволяет вычислять вплоть до $F \approx 2{,}55\cdot10\hat{}305$, когда $K_n \sim 10\hat{}{-53}$, что вызывает большие сомнения из-за чудовищно длинной экстраполяции совсем нехитрой формулы (9.2). Впрочем, сомнения вызывает даже фактория с номером «всего лишь» $F \approx 2{,}4899\cdot10\hat{}57$ (Гипербольшая фактория, см. выше), в которой мы получим примерно следующее *идеальное количество* простых чисел («внутри» фактории): $K_n \sim 5{,}4\cdot10\hat{}{-11}$.

Формула Стирлинга позволяет найти и такое отношение (Z) – во сколько раз правая граница фактории больше её левой границы: $Z = (F!+F)/(F!+2) = (1+ F/F!)/(1+2/F!) \approx 1+ F/F!$ откуда получаем:

$$\boldsymbol{Z - 1 \approx (0{,}5\cdot F/\pi)\hat{}0{,}5/(F/e)\hat{}F}. \qquad (9.3)$$

Таким образом, параметр Z для первых 18-ти факторий легко найти «в лоб» на ПК в программе "Excel", например, при $F = 18$ мы получаем $Z = 1 + 2{,}44\cdot10\hat{}{-15}$. А для $F > 18$ можно пользоваться формулой (9.3) – вплоть до $F = 171$, для которого мы получаем $Z \approx 1 + 1{,}38\cdot10\hat{}{-307}$.