

# Les cycles dans les suites de Hasse-Allouche

Pierre Lamothe

Juin 2020

## Résumé

Les suites de Hasse-Allouche englobent les suites de Collatz-Kakutani. Ce qui a été montré auparavant [1] avec les suites de Collatz-Kakutani généralisées à  $px + q$ , à savoir que les cycles numériques dérivent de cycles algébriques, est développé ici dans le cadre plus complexe de  $T(x) = \lfloor px/r \rfloor$  des suites de Hasse-Allouche. Le nombre de fonctions élémentaires passe de 2 à  $r$ . À nouveau le début et la fin d'une suite sont reliés par une équation diophantienne, ici  $p^m x - r^d y - q = 0$ , où  $m$  et  $d$  sont les nombres respectifs de multiplications et de divisions. On a encore des cycles de rotation  $(q_1 q_2 \dots q_m)$  et des cycles dérivés  $(x_1 x_2 \dots x_m)$  lorsque les  $q_i / (p^m - r^d)$  sont des entiers. L'énumération des classes de sous-suites entre deux entiers non multiples de  $r$  permet un calcul tout simple du paramètre  $q$  à partir du rang  $\rho$  de la sous-suite en base  $r$ .

## Introduction

Est-elle vraie, fausse ou indécidable? C'est la question qui se pose normalement à propos de toute conjecture. Dans le cas de la conjecture de Syracuse, la plus simple en apparence, une autre question se pose. Malgré toute l'attention reçue jusqu'ici, comment se fait-il qu'elle ne soit pas encore résolue? Est-il possible de mettre le doigt sur ce qui la rend vraisemblablement hors d'atteinte? Comme on n'a pas su la démontrer, il n'est pas question pour moi de tenter de le faire, étant un simple chercheur non mathématicien. Comprendre le problème est plutôt ce à quoi j'espère contribuer.

Dans deux articles précédents, j'ai mis l'accent sur un aspect des cycles numériques vus comme « dérivés » de cycles algébriques. Ceci en vue d'isoler le facteur qui demeure impondérable dans leur apparition. La rotation des fonctions dans un cycle est en soi une évidence, aussi cette simple concomitance ne saurait justifier une interprétation en termes de « cycles dérivés ». Or comprendre c'est un peu enraciner une interprétation. La reprise du thème des cycles universels et dérivés dans le cadre des suites de Hasse-Allouche permet de conforter cette interprétation. On pourra voir en outre jusqu'à quel point était pertinent le souci au départ d'énumérer l'ensemble des possibles.

# 1 Vocabulaire

Il n'y a que des mathématiques toutes simples dans cet exposé mais aussi des choses nouvelles, à savoir les items **1.2 Convention** et **1.3 Opérateur triplet**. Quant aux autres items c'est pour ceux qui ne sont pas familiers avec le langage mathématique. Une fois notée la convention, on peut aborder directement la section suivante, **2 Définitions**.

## 1.1 Composition de fonctions

Considérons une suite de Collatz : si un terme  $x$  est pair, le suivant est  $x/2$ , mais s'il est impair, le suivant est  $3x + 1$ . Une suite est ainsi déterminée par son nombre de départ. Si ce nombre est 9, par exemple, la suite sera :

$$(9 \ 28 \ 14 \ 7 \ 22 \ 11 \ 34 \ 17 \ 52 \ 26 \ 13 \dots).$$

Ce ne sont pas ces suites numériques qui seront l'objet de notre attention, mais les suites de fonctions qui leur correspondent. Il y a deux fonctions :  $C(x) = 3x + 1$  et  $D(x) = x/2$ . Le nombre 9 étant impair, la fonction  $C$  est appliquée :  $C(9) = 3 \times 9 + 1 = 28$ ; puis la fonction  $D$  est appliquée :  $D(28) = 28/2 = 14$ ; puis  $D(14) = 14/2 = 7 \dots$  La chaîne de fonctions correspondante, déterminée par le nombre 9 au départ, est ainsi :

$$(CDDCDCDCDD \dots)$$

Maintenant, si on veut savoir quelle fonction fait passer de 9 à 7, par exemple, il faut savoir composer les fonctions. Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions, leur composée  $f \circ g$  est définie par  $f \circ g(x) = f(g(x))$ . On sait que  $D(D(C(9))) = D \circ D \circ C(9) = 7$  mais on veut savoir ce que vaut  $D \circ D \circ C(x)$ . Alors on a :

$$D(D(C(x))) = D(D(3x + 1)) = D((3x + 1)/2) = (3x + 1)/4$$

## 1.2 Convention

Par convention on va identifier une chaîne de fonctions à sa composée. Si  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont des fonctions, la chaîne  $FGH$  équivaut à  $H \circ G \circ F$ . On peut alors écrire  $CDD(9) = 7$  au lieu de  $D \circ D \circ C(9) = 7$ . Cette inversion est juste pratique avec les chaînes de fonctions.

## 1.3 Opérateur triplet

On trouve en Annexe **A** la présentation formelle de l'opérateur triplet et les formules de composition qui les concernent. Les triplets sont un outil très utile dérivé des matrices. Ils permettent de remplacer la composition des fonctions par la composition des triplets associés à ces fonctions. Cette petite introduction aux triplets ne vise qu'à démontrer leur utilité.

Il n'y a que des fonctions simples à composer dans cet article. Elles sont de la forme, disons :  $f(x) = (ax + c)/b$ . Par exemple :  $f(x) = (3x + 5)/11$  et  $g(x) = (2x + 9)/7$  seront composées à la manière habituelle de cette façon :

$$\begin{aligned} fg(x) &\equiv g \circ f(x) = g(f(x)) \\ &= g((3x + 5)/11) \\ &= (2((3x + 5)/11) + 9)/7 \\ &= (6x + 109)/77 \end{aligned}$$

Imaginez une longue chaîne de fonctions à composer ! Ça pourrait être assez fastidieux. Voici le même calcul effectué avec les triplets :

$$\begin{aligned} \langle fg \rangle &= \langle f \rangle \langle g \rangle \\ &= \langle 3, 11, 5 \rangle \langle 2, 7, 9 \rangle \\ &= \langle 3 \times 2, 11 \times 7, 11 \times 9 + 5 \times 2 \rangle \\ &= \langle 6, 77, 109 \rangle \end{aligned}$$

Par définition, les triplets se composent ainsi :

$$\langle a_1, b_1, c_1 \rangle \langle a_2, b_2, c_2 \rangle = \langle a_1 a_2, b_1 b_2, b_1 c_2 + c_1 a_2 \rangle$$

Si on a à composer  $n$  fois le même triplet on a cette formule toute simple :

$$\langle a, b, c \rangle^n = \langle a^n, b^n, c(a^n - b^n)/(a - b) \rangle$$

Si on a à composer  $n$  triplets différents, c'est-à-dire si on a

$$\langle a, b, c \rangle = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \langle a_2, b_2, c_2 \rangle \dots \langle a_n, b_n, c_n \rangle$$

alors on a :

$$\begin{aligned} a &= a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n \\ b &= b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots b_n \\ c &= c_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n \\ &\quad + b_1 c_2 a_3 a_4 \cdots a_n \\ &\quad + b_1 b_2 c_3 a_4 \cdots a_n \\ &\quad + b_1 b_2 b_3 c_4 \cdots a_n \\ &\quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ &\quad + b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots c_n \end{aligned}$$

## 1.4 Notion de monoïde

Le terme monoïde désigne le type d'algèbre qui sera utilisé avec les fonctions et leurs triplets. C'est tout simple. Ça veut dire qu'il y a une seule opération, qu'elle est associative, et qu'une des fonctions « ne fait rien ». En détail :

- Il y a une seule opération, la composition :  $fg(x) = f(g(x))$  ou  $\langle fg \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle$ . On n'additionne pas les fonctions :  $f(x) + g(x)$  ou  $\langle f \rangle + \langle g \rangle$ . On ne les multiplie pas non plus :  $f(x) \times g(x)$  ou  $\langle f \rangle \times \langle g \rangle$ . Le produit  $\langle f \rangle \langle g \rangle (x)$  équivaut à  $fg(x)$ .
- Dire que la composition est associative c'est dire que tout ceci est équivalent :

$$\langle fgh \rangle = \langle fg \rangle \langle h \rangle = \langle f \rangle \langle gh \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle \langle h \rangle$$

- La fonction qui « ne fait rien » c'est l'identité  $I(x) = x$  ou  $\langle I \rangle = \langle 1, 1, 0 \rangle$ . Quand on la compose avec quelque chose ça ne change rien :  $IX = XI = X$ . On pourra la mettre au début mais jamais dans les chaînes de fonctions.

Ajoutons ce qui est implicite : la composition n'est pas commutative,  $fg \neq gf$ , et il n'y a pas d'inverse : on prend seulement les fonctions descendantes, ou alors seulement les fonctions montantes.

Le monoïde de fonctions qu'on va définir sera dit « libre » parce que les fonctions seront décomposables de façon unique en fonctions élémentaires d'une partie génératrice appelée « base ».

## 1.5 Numération

La façon d'écrire les nombres dépend du système de numération utilisé. On utilise le plus souvent le système décimal avec les chiffres de 0 à 9, mais d'autres sont aussi utilisés comme le système binaire avec 0 et 1. Par exemple 101101 en binaire c'est la même chose que 45 en décimal. La base de numération en binaire c'est 2, et en décimal c'est 10. En décimal ça correspond à ce qu'on prononce :

$$3547 = (3 \times 1000) + (5 \times 100) + (4 \times 10) + (7 \times 1)$$

Dans une autre base on a par exemple : 34012 écrit en base 5 c'est le nombre 2382 écrit en base 10. Alors au lieu de prendre les puissances de 10 : (1 10 100 1000 ...) on prend les puissances de 5 : (1 5 25 125 625 3125 ...) :

$$(3 \times 625) + (4 \times 125) + (0 \times 25) + (1 \times 5) + (2 \times 1) = 2382$$

Pour exprimer un nombre dans une autre base c'est simple. On divise le nombre, ici 2382, par la plus grande puissance possible, ici 625, ce qui donne 3 et le reste 507. On continue avec le reste pour les autres chiffres.

## 2 Définitions

### 2.1 Suites et sous-suites

**Définition 1.** Une suite de Collatz-Kakutani est une suite d'entiers où le successeur de  $x$  est

$$\begin{aligned} D(x) &= x/2 && \text{si } x \text{ est pair} \\ C(x) &= 3x + 1 && \text{sinon} \end{aligned}$$

La conjecture de Kakutani stipule qu'une suite aboutit toujours, quelque soit le nombre de départ, à l'un des quatre cycles suivants, dont voici seulement les impairs :

$$(1) \quad (-1) \quad (-5 - 7) \quad (-17 - 25 - 37 - 55 - 41 - 61 - 91)$$

La valeur de  $C(x)$  étant toujours paire, on peut utiliser  $T = CD$  au lieu de  $C$  et on obtient ainsi une suite réduite.

**Définition 2.** Une suite réduite de Collatz-Kakutani est une suite où le successeur de  $x$  est

$$\begin{aligned} D(x) &= x/2 && \text{si } x \text{ est pair} \\ T(x) &= (3x + 1)/2 && \text{sinon} \end{aligned}$$

Pour les suites de Hasse-Allouche, on va définir d'abord la suite réduite, avec  $D$  et  $T$ , et définir ensuite la suite complète, moins simple, avec  $D$  et  $C$ .

**Définition 3.** Soient deux entiers  $p$  et  $r$  premiers entre eux où  $p > r > 1$ . Une suite réduite de Hasse-Allouche est une suite d'entiers où le successeur de  $x$  est

$$\begin{aligned} D(x) &= x/r && \text{si } x \bmod r = 0 \\ T(x) &= \lfloor px/r \rfloor && \text{sinon} \end{aligned}$$

Voir **E** pour  $\lfloor x \rfloor$  — et dans le cas d'une suite complète

$$\begin{aligned} D(x) &= x/r && \text{si } x \bmod r = 0 \\ C(x) &= r \lfloor px/r \rfloor && \text{sinon} \end{aligned}$$

À la définition de Hasse est ajouté  $p > r$  pour éviter la trappe  $T(1) = 0$ . Pour la justification voir Annexe **E** Hasse-Allouche. Avec le couple  $(p, r) = (3, 2)$  on a une suite inversée  $(3x - 1)$  de Collatz-Kakutani. Exemple, au lieu du cycle  $(-5 -7)$  c'est  $(5 7)$ , etc.

Lorsque  $r > 2$ , les fonctions  $C$  et  $T$  regroupent  $r - 1$  fonctions élémentaires simples  $C_i$  et  $T_i$  où  $0 < i < r$ .

$$\begin{array}{ll} C_1(x) = px - 1 & T_1(x) = (px - 1)/r \\ C_2(x) = px - 2 & T_2(x) = (px - 2)/r \\ \dots & \dots \\ C_{r-1}(x) = px - r + 1 & T_{r-1}(x) = (px - r + 1)/r \end{array}$$

Dans cet article, le terme « sous-suite » ne désignera pas une portion quelconque de suite de Hasse-Allouche mais une portion finie généralisable, de fait balisée pour faciliter entre autre l'énumération.

**Définition 4.** Une sous-suite générale de Hasse-Allouche, ou « sous-suite », est une portion finie de suite de Hasse-Allouche débutant et se terminant par un non multiple de  $r$ .

Il y a 3 types de sous-suites :

- *complète* si elle est extraite d'une suite complète ( $C$  et  $D$ )
- *réduite* si elle est extraite d'une suite réduite ( $T$  et  $D$ )
- *compacte* si elle ne contient que les non multiples de  $r$ .

Pour le couple  $(p, r) = (11, 7)$ , par exemple, entre 1945 et 2 on a :

- (1945 21392 3056 33614 4802 686 98 14 2) une sous-suite complète,
- (1945 3056 4802 686 98 14 2) une sous-suite réduite,
- (1945 3056 2) une sous-suite compacte.

**Définition 5.** Le vecteur type d'une sous-suite est la suite de chiffres qui correspond à la chaîne des fonctions entre le premier et le dernier terme de la sous-suite réduite équivalente, selon :

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow 0 \\ T_i &\longrightarrow i \quad (0 < i < r) \end{aligned}$$

Dans l'exemple précédent de la suite réduite entre 1945 et 2, la chaîne de fonctions est  $T_3T_2DDDD$  et le vecteur type est dès lors 320000. Si  $r > 10$  on peut utiliser aussi des lettres comme dans l'énumération hexadécimale.

**Définition 6.** La classe type d'une sous-suite est le sous-ensemble des sous-suites ayant le même vecteur type.

On représentera normalement une classe type par la sous-suite de cette classe dont les termes en valeur absolue sont les plus petits.

Pourquoi avoir utilisé la sous-suite réduite pour définir le vecteur type plutôt que la sous-suite complète? Une fonction  $C_i$  est forcément suivie d'une fonction  $D$ , donc toutes les combinaisons de chiffres ne sont pas possibles. Une fonction  $T_i$  par contre est suivie de n'importe quelle fonction et toutes les combinaisons de chiffres sont possibles. Et ça donne quoi? On peut énumérer toutes les classes de sous-suites de Hasse-Allouche. Leur rang  $\rho$  en base  $r$  est précisément le vecteur type de la classe.

Énumérer les classes, c'est énumérer les chaînes correspondantes, de même que leurs composées  $\omega$  et les équations de transition  $y = \omega(x)$  entre le début  $x$  et l'arrivée  $y$  des sous-suites de ces classes (cf. Annexe B). Ne reste plus qu'à savoir composer les fonctions des chaînes et résoudre les équations pour trouver les sous-suites d'un rang  $\rho$  donné.

**Définition 7.** Soit  $\Omega$  l'ensemble des fonctions de transition  $\omega$  entre les éléments des sous-suites compactes. Cet ensemble muni de la loi de composition des fonctions et adjoint à la fonction identité forme le monoïde libre  $(\Omega, \circ, I)$  dont la base est

$$\{\beta_{q_i d_i}\} = \{T_{q_i} D^{d_i}\} \quad (0 < q_i < r) \quad (0 \leq d_i < \infty) \quad (1)$$

et l'ensemble des fonctions  $\omega$  est

$$\Omega = \left\{ \prod_{i=1}^m \beta_{q_i d_i} \right\} \quad (m > 0) \quad (2)$$

Les suites  $(q_i)_m$  et  $(d_i)_m$  déterminent une fonction  $\omega$  distincte :

$$\begin{aligned} \omega &= \beta_{q_1 d_1} \beta_{q_2 d_2} \dots \beta_{q_m d_m} \\ &= T_{q_1} D^{d_1} T_{q_2} D^{d_2} \dots T_{q_m} D^{d_m} \end{aligned}$$

Soient  $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m+1})$  une sous-suite compacte. Les  $q_i 0^{d_i}$  correspondent aux vecteurs type des éléments de la base, où les  $q_i$  isolés (non suivis de 0) sont notés  $q_i 0^0$ .

$$\begin{aligned} q_1 0^{d_1} \quad q_2 0^{d_2} \quad \dots \quad q_m 0^{d_m} \\ x_1 \longmapsto x_2 \longmapsto x_3 \cdots x_m \longmapsto x_{m+1} \\ x_{m+1} = \omega(x_1) \end{aligned}$$

Les vecteurs type des fonctions sont les concaténations des  $q_i 0^{d_i}$  successifs. En n'écrivant pas les  $0^0$  on a le rang  $\rho$  de la fonction  $\omega$  en base  $r$ .

$$\rho = q_1 0^{d_1} q_2 0^{d_2} \dots q_m 0^{d_m} \quad (3)$$

Sans même devoir composer les fonctions, que sait-on des sous-suites de la classe dont le rang  $\rho$  détermine les suites  $(q_i)_m$  et  $(d_i)_m$ ? On connaît le nombre de multiplications  $m$  qui est le nombre de chiffres non nuls; on connaît le nombre de divisions  $d$  qui est la somme des  $d_i$  ajoutée aux  $m$  divisions dans les  $T_i$ ; on connaît enfin les diverses longueurs de sous-suites, qu'elles soient complètes, réduites ou compactes : soient  $m + d + 1$  pour la complète,  $d + 1$  pour la réduite et  $m + 1$  pour la compacte.

### 3 Composition des fonctions

La composition des fonctions d'une chaîne  $f_1 f_2 \dots f_n$  qu'on identifie par convention à  $f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  poserait problème si elle devait s'exécuter une à une en traînant la variable.

$$f_1 f_2 \dots f_n(x) = f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1(x) = f_n(\dots(f_2(f_1(x))))$$

Comme il s'agit de fonctions linéaires, on aurait pu utiliser des matrices pour profiter de l'associativité et oublier la variable. On peut simplifier davantage avec les triplets qui sont dérivés des matrices.

### 3.1 Opérateur triplet

À toute fonction de la forme  $f(x) = (ax + c)/b$  on peut associer le triplet  $\langle f \rangle = \langle a, b, c \rangle$  en guise d'opérateur équivalent à  $f$  :

$$\langle f \rangle (x) = \langle a, b, c \rangle (x) = f(x)$$

Ce qui implique la loi de composition suivante

$$\langle a_1, b_1, c_1 \rangle \langle a_2, b_2, c_2 \rangle = \langle a_1 a_2, b_1 b_2, b_1 c_2 + c_1 a_2 \rangle$$

de même que l'élément neutre  $\langle 1, 1, 0 \rangle$  et l'inverse  $\langle a, b, c \rangle^{-1} = \langle b, a, -c \rangle$ , quoique dans le cadre du monoïde il n'y aura pas de fonctions inverses car on ne compose que des fonctions descendantes. Par contre l'inverse de toutes ces fonctions forme le monoïde des fonctions montantes.

Les triplets des fonctions élémentaires sont :

$$\langle D \rangle = \langle 1, r, 0 \rangle \quad \langle C_i \rangle = \langle p, 1, -i \rangle \quad \langle T_i \rangle = \langle p, r, -i \rangle$$

et ceux des éléments de la base :

$$\langle \beta_{q_i d_i} \rangle = \langle p, r^{d_i+1}, -q_i \rangle$$

Pour simplifier l'expression des formules en tableaux posons

$$\langle \beta_{q_i d_i} \rangle = \langle p, r_i, -q_i \rangle \quad \text{où} \quad (4)$$

$$r_i = r^{d_i+1} \quad (5)$$

La seule formule (cf. Annexe A) dont on aura besoin pour composer en bloc les chaînes de fonction est celle-ci :

$$\prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i, c_i \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

$$\begin{aligned} a &= a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n \\ b &= b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots b_n \\ c &= \begin{aligned} &c_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n \\ &+ b_1 c_2 a_3 a_4 \cdots a_n \\ &+ b_1 b_2 c_3 a_4 \cdots a_n \\ &+ b_1 b_2 b_3 c_4 \cdots a_n \\ &\vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ &+ b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots c_n \end{aligned} \end{aligned} \quad (6)$$



### 3.2 Équation diophantienne

Avec  $\langle p, r_i, -q_i \rangle$  la formule nous donne  $\langle \omega \rangle$  où le nombre de divisions  $d = m + \sum d_i$

$$\langle \omega \rangle = \prod_{i=1}^m \langle p, r_i, -q_i \rangle = \left\langle p^m, r^d, -q \right\rangle$$

$$q = \begin{matrix} + q_1 p p p & \cdots & p \\ + r_1 q_2 p p & \cdots & p \\ + r_1 r_2 q_3 p & \cdots & p \\ + r_1 r_2 r_3 q_4 & \cdots & p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ + r_1 r_2 r_3 r_4 & \cdots & q_m \end{matrix} \quad (7)$$

et l'équation diophantienne correspondante

$$p^m x - r^d y - q = 0 \quad (8)$$

dont le paramètre  $q$  peut s'écrire de manière concise

$$q = \sum_{i=1}^m q_i p^{m-i} r^{\sigma_i} \quad (9)$$

$$\text{en posant } \sigma_i = \sum_{k=1}^i (1 + d_{k-1}) \quad \text{avec } d_0 = -1$$

La suite  $(d_i)_m$  est ainsi remplacée par la suite  $(\sigma_i)_m$ . Par exemple :

$$(d_i)_m = (2 \ 3 \ 0 \ 2 \ 1) \rightarrow (d_i + 1)_m = (3 \ 4 \ 1 \ 3 \ 2) \rightarrow (\sigma_i)_m = (0 \ 3 \ 7 \ 8 \ 11)$$

$$q = q_1 p^4 + q_2 p^3 r^3 + q_3 p^2 r^7 + q_4 p r^8 + q_5 r^{11}$$

### 3.3 Solution générale de l'équation

Juste un mot sur les solutions non cycliques de l'équation — [1] *Approche algébrique du problème  $3n + 1$  généralisé* — avant de passer à la solution cyclique  $x = y$ , objet de cet article. On peut toujours solutionner car  $p$  et  $r$  sont premiers entre eux. Dans la solution générale  $(r^d k + x_0, p^m k + y_0)$  où  $k$  est un entier relatif on obtient, à la fréquence d'une fois sur  $r$ ,  $(p^m k + y_0) \bmod r = 0$ . Ces valeurs  $k$  ne seront pas retenues car la valeur  $y$  ne peut pas être un multiple de  $r$ . En solutionnant l'équation de Bezout

$$p^m u + r^d v = 1$$

on a une solution minimale  $y_0 = -qv \bmod p^m$  qui peut être multiple de  $r$ . Dans ce cas il faut prendre la valeur  $y_0$  minimale de signe contraire en diminuant ou ajoutant  $p^m$ . La

valeur  $x_0$  est obtenue en entrant  $y_0$  dans l'équation originale. Au besoin on peut calculer la valeur  $k_0$  du test  $k \bmod r = k_0$  pour éliminer les valeurs de  $k$  non permises.

Le couple  $(x, y)$  ne détermine pas seul les sous-suites de la classe solution, il faut aussi connaître  $d$  ou  $m$  car si on a pénétré dans un cycle, certains nombres et peut-être même tous pourraient avoir été répétés. On peut alors savoir combien de fois chacun.

### 3.4 Solution cyclique

La solution cyclique  $x = y$  est toutefois éminemment simple

$$x = q / (p^m - r^d) \quad (10)$$

et la condition *sine qua non* d'un cycle numérique également :

$$q \bmod \delta = 0 \quad \text{où} \quad \delta = p^m - r^d \quad (11)$$

Les nombres  $m$  et  $d$  de multiplications et de divisions dans un cycle numérique sont constants. Dès lors un cycle numérique  $(x_i)_m$  implique un cycle  $(q_i)_m$  du paramètre  $q$  dans l'équation, car  $\delta$  est constant. Si la composition des fonctions était commutative, alors la composée des  $\langle \beta_{q_i d_i} \rangle = \langle p, r_i, -q_i \rangle$  serait constante, et la valeur  $q$  ne varierait pas avec l'ordre des fonctions. Mais c'est non commutatif et la moindre permutation modifiant le vecteur type, autrement dit le rang  $\rho$ , implique une valeur  $q$  distincte.

Dans un cycle numérique les nombres effectuent une rotation et il en est forcément ainsi des fonctions et des indices dans le tableau de calcul de  $q$ . La rotation des indices engendre le cycle  $(q_i)_m$  et ce sont les quotients  $(q_i / \delta)_m$  qui forment le cycle numérique  $(x_i)_m$  de l'hypothèse.

Alors une question surgit. Peut-il y avoir un cycle de rotation des fonctions quand la condition de divisibilité par  $\delta$  ne permet pas le cycle numérique? Voyons cela!

### 3.5 Cycles universels et cycles dérivés

Du point de vue numérique tout semble désordonné hormis la règle du successeur et on pourrait être tenté de voir les choses de la façon suivante : le fait que certains nombres forment des cycles numériques dans les suites serait une propriété de ces nombres comme tels et le fait que les fonctions  $\beta_{q_i d_i}$  entre ces nombres forment alors forcément des cycles ne serait qu'une banale conséquence.

Dans l'éclaircie du point de vue algébrique tout le possible est ordonné, voire bien énuméré, et tout est régulé hormis l'impondérable de la divisibilité de  $q$  par  $\delta$ . Alors on voit les choses autrement : un cycle de fonctions correspond à une rotation des indices dans les  $\langle p, r_i, -q_i \rangle$  et dans le tableau qui permet de calculer  $q$ . Or une rotation des indices entraîne forcément une valeur  $q$  valide et les mêmes nombres  $m$  et  $d$  de multiplications et de divisions. Qu'il y ait un cycle numérique ou pas, toutes les chaînes de fonctions et leur

valeur  $q$  sont cycliques par rotation des indices. Ce n'est donc pas une cyclicité de nature numérique qui entraîne celle des fonctions.

La « cyclicité de rotation » est une propriété algébrique universelle. Elle ne se reflète qu'à l'occasion dans les suites numériques, lorsque le quotient  $q/\delta$  est un entier. La suite numérique hérite alors de la propriété cyclique des  $q_i$  associés à la rotation des fonctions. C'est le sens du terme « dérivé » appliqué au cycle numérique.

### 3.6 Fonction de rotation des $q_i$

Le fait que la rotation des  $q_i$  se reflète à l'occasion dans des  $x_i$  facilite l'explicitation de la fonction de rotation  $R$  définie sur les ensembles de  $q_i$  pour un couple  $(p, r)$  et ses couples  $(d, m)$  spécifiques. L'ensemble des  $q_i$  ne recouvre qu'une partie des entiers. On note d'abord que la rotation s'effectue sur la sous-suite compacte de sorte que dans le vecteur type (ou rang) les '0' sont attachés au chiffre non nul qui précède. Par exemple :

$$13102300 \rightarrow 30013102 \rightarrow 23001310 \rightarrow 10230013 \rightarrow 31023001$$

On sait que les chiffres non nuls correspondent à la fonction  $T$  qui regroupe ici  $T_1, T_2$  et  $T_3$ . Les zéros pour leur part correspondent à la fonction  $D$ . Seule la fonction  $T$  est modifiée afin que les  $i$  des  $T_i$  soient  $i\delta$ . On notera  $T^*$  cette partie multiplicative de la fonction  $R$  qui regroupe les fonctions élémentaires  $T_i^*(q) = (pq - i\delta)/r$  où  $0 < i < r - 1$ . On a ainsi pour la réduction occasionnelle  $x_i = q_i/\delta$  :

$$T^*(q) = (pq - (pq \bmod r)\delta)/r \quad (12)$$

Y a-t-il une manière élégante en mathématique d'ajouter la fonction  $D^{q_i}$  où la valeur  $q_i$  est variable? À défaut, je propose celle-ci qui contient l'opérateur  $\bmod^*$ , un « modulo en contexte multiplicatif », que j'explique par la suite. La fonction  $R$  devient alors

$$R(q) = (pq - (pq \bmod r)\delta) \bmod^* r \quad (13)$$

On sait que  $x = rk + q$  où  $q < r$  implique  $q = x \bmod r$  en tant que reste de la division. D'une manière analogue,  $x = r^k q$  où  $q$  n'est pas un multiple de  $r$  implique  $q = x \bmod^* r$  en tant que résidu non multiple de  $r$ . Alors, au choix :  $r^{-v_r(pq - (pq \bmod r)\delta)}$  ou  $\bmod^* r$ ?

On verra l'importance de  $R$  en 3.10 *Liaison des cycles*. On peut aussi définir

$$N(x) = \lfloor px/r \rfloor \bmod^* r = T(x) \bmod^* r \quad (14)$$

La fonction  $N$  regroupe les fonctions élémentaires  $N_i(x) = T_i(x) \bmod^* r$  où  $0 < i < r$ . Alors que le cycle numérique  $N^m(x) = x$  de  $m$  entiers non multiples de  $r$  ne survient que rarement, si et seulement si il existe un  $d$  tel que  $x \bmod (p^m - r^d) = 0$ , les multiples cycles de  $q_i$  à  $m$  fonctions,  $R^m(q) = q$ , sont universels quelque soit le contexte  $(d, m)$  considéré.

### 3.7 Deux exemples

Voici deux sous-suites réduites avec  $(p, r) = (4, 3)$  en contexte  $(d, m) = (5, 4)$ .

$$\begin{aligned} & (22\ 29\ 38\ 50\ 66\ 22) \\ N^4(22) & \equiv T_1 T_2 T_2 T_2 D(22) = 22 \\ \rho & = 12220_3 = 159 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (23\ 30\ 10\ 13\ 17\ 22) \\ N^4(23) & \equiv T_2 D T_1 T_1 T_2(23) = 22 \\ \rho & = 20112_3 = 276 \end{aligned}$$

Le premier cas est cyclique

$$\begin{aligned} \langle 4, 3, -1 \rangle \langle 4, 3, -2 \rangle \langle 4, 3, -2 \rangle \langle 4, 9, -2 \rangle & = \langle 256, 243, -286 \rangle \\ R^i(286) & = (286\ 377\ 494\ 650\ 286 \dots) \text{ cyclique} \end{aligned}$$

$$q = 286, \quad \delta = 256 - 243 = 13, \quad 286 \bmod 13 = 0 \quad (N \text{ cyclique})$$

Le second cas est non cyclique

$$\begin{aligned} \langle 4, 9, -2 \rangle \langle 4, 3, -1 \rangle \langle 4, 3, -1 \rangle \langle 4, 3, -2 \rangle & = \langle 256, 243, -542 \rangle \\ R^i(542) & = (542\ 238\ 313\ 413\ 542 \dots) \text{ cyclique} \end{aligned}$$

$$q = 542, \quad \delta = 256 - 243 = 13, \quad 542 \bmod 13 = 9 \quad (N \text{ non cyclique})$$

### 3.8 Classes d'équations

Il existe une infinité d'équations distinctes ayant le même nombre  $m$  de multiplications car le nombre  $d$  de divisions n'est pas limité. À l'inverse, le nombre d'équations ayant un nombre  $d$  de divisions est limité car le nombre  $m$  de multiplications ne peut dépasser  $d$  et le nombre de combinaisons pour  $q$  est fini.

**Définition 8.** Notons  $K_d[n]$  la classe des équations ayant le même nombre  $n$  de divisions.

Le rang  $\rho$  de toutes les équations de  $K_d[d]$  comporte exactement  $d$  chiffres. On peut ainsi en évaluer aisément le nombre.

$$\text{card } K_d[d] = (r - 1)r^d \tag{15}$$

Mais ce qu'il importe de connaître c'est le nombre, parmi ces équations, qui possèdent exactement  $m$  multiplications. Pourquoi ? Il a été montré antérieurement [1] que ce nombre est nécessaire pour calculer la probabilité d'occurrence des cycles parmi ces équations, dans la mesure où on peut légitimement postuler l'équiprobabilité des  $\delta$  valeurs possibles de  $q \bmod \delta$ .

**Définition 9.** Notons  $K_{dm}[d, m]$  les sous-classes d'équations de  $K_d[d]$  ayant le même nombre  $m$  de multiplications.

La représentation géométrique des classes  $K_{dm}[d, m]$  sous forme de réseau rend les calculs plus simples. Dans la figure 1 chaque cercle représente une classe  $K_{dm}[d, m]$  avec en abscisse  $d$  et en ordonnée  $m$ . Le cercle contient  $\text{card } K_{dm}[d, m]$ , un nombre où  $n = r - 1$ , soit le nombre de  $T_i$  dans  $T$  ou encore le nombre de chiffres non nuls distincts pour le rang en base  $r$  de l'équation. Le cercle isolé représente l'identité  $I$  de rang  $\rho = 0$  et de classe, disons,  $K_{dm}[0, 0]$  où il n'y a pas d'équation. Les liens diagonaux représentent les multiplications par les  $T_i$  et les liens horizontaux les divisions par  $r$ .

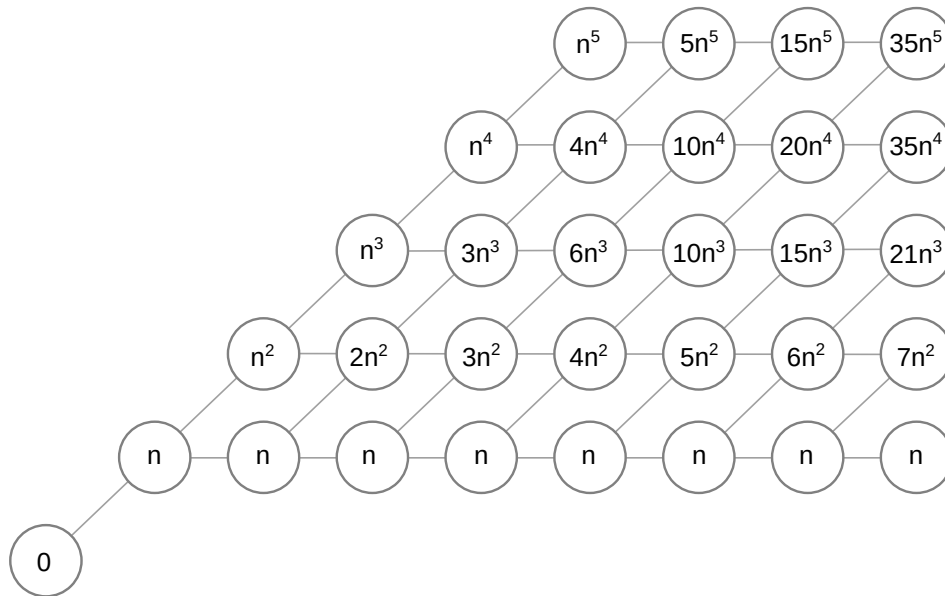


FIGURE 1 – Nombre d'équations dans les classes  $K_{dm}[d, m]$  où  $n = r - 1$

Explicitons à présent comment sont calculés ces nombres. Oublions la sémantique des fonctions car le problème se réduit à un problème sur les entiers énumérés en base  $r$ . Les paramètres  $d$  et  $m$  sont respectivement le nombre de chiffres en tout et le nombre de chiffres non nuls. Combien y a-t-il de nombres pour chaque couple  $(d, m)$  ?

Dans le premier cercle on a les  $n$  chiffres non nuls  $(1\ 2\ \dots\ n)$ . Dans les cercles suivants sur la ligne de base on a encore  $n$  éléments formés d'un premier chiffre non nul suivi de  $d - 1$  zéros :  $(10\ 20\ \dots\ n0)$ ,  $(100\ 200\ \dots\ n00)$ ,  $(1000\ 2000\ \dots\ n000)$ ... Les rangs dans le cercle  $(d, m)$  sont les concaténations  $AB$  de deux rangs :

- rang  $A$  issu d'un cercle  $(x, m - 1)$  où  $x$  varie de  $m - 1$  à  $d - 1$ ,
- rang  $B$  issu d'un cercle de la ligne de base.

Alors il suffit de faire la somme des rangs  $A$  et de multiplier par  $n$  car il y a toujours  $n$  rangs dans chaque cercle de la ligne de base. On a donc :

$$\text{card } K_{dm}[d, m] = \binom{d-1}{m-1} (r-1)^m \quad (16)$$

On remarquera que dans le cas  $r = 2$  des suites de Collatz-Kakutani généralisées, on a  $n = 1$  et alors on obtient le triangle de Pascal qui a servi pour le calcul des probabilités. On peut déjà anticiper que pour une même valeur  $p$ , les cycles deviennent moins improbables lorsque  $r$  grandit car il y a davantage de cas dans chaque classe  $K_{dm}$ .

De moindre importance, le calcul du nombre d'équations qui correspondent à des sous-suites d'une longueur donnée pourrait être intéressant car il a déjà aussi été montré que pour  $r = 2$ , dans le cas de sous-suites complètes, ces nombres formaient une suite de Fibonacci.

### 3.9 Sous-suites de longueur donnée

Combien y a-t-il de sous-suites d'une longueur donnée? Question vague à préciser. D'abord, il y a une infinité de sous-suites d'une longueur donnée, quelque soit le type de longueur considéré. Alors précisons qu'il s'agit de sous-suites représentant leur classe type, c'est-à-dire de sous-suites ayant un vecteur type distinct et donc un rang distinct. Mais de quelle longueur s'agit-il? Distinguons les trois cas : longueurs de sous-suites compactes, réduites et complètes.

On a vu que la longueur  $L$  d'une sous-suite compacte, n'ayant pas de multiple de  $r$  est  $L = m + 1$ . Le nombre  $d$  de divisions n'étant pas limité, on en a une infinité. On a vu aussi que la longueur d'une sous-suite réduite est  $L = d + 1$ . À l'équation 15 on a déjà traité ce cas. Il y en a donc  $(r-1)r^{L-1}$ . Le cas des sous-suites complètes où  $L = d + m + 1$  est plus complexe mais aussi plus intéressant.

Il suffit d'abord de compter les éléments le long des diagonales où la somme  $d + m$  de l'abscisse et de l'ordonnée est <sup>1</sup>  $d + m = L - 1$  :

$$\begin{aligned} & n, n, n(n+1), n(2n+1), n(n^2+3n+1)... \\ & r-1, r-1, r(r-1), (2r-1)(r-1), (r^2+r-1)(r-1)... \end{aligned}$$

Ça semble complexe à première vue, mais en divisant par  $n = r - 1$  on obtient les suites bien connues suivantes  $(u_k)$  :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad u_1 = 1 \\ u_k &= u_{k-1} + nu_{k-2} \end{aligned} \quad (17)$$

---

1. Selon la définition 4, la longueur minimale d'une sous-suite complète est 3.

Pour  $r = 2$  et donc  $n = 1$  on retrouve la suite de Fibonacci évoquée; pour  $r = 3$  c'est la suite de Jacobsthal... Bref, ce sont les suites  $U_k(P, Q)$  de Lucas où  $P = 1$  et  $Q = 1 - r$ . On trouve la formule du terme général sur [MathWorld, Lucas Sequence, équation 33](#) à partir de laquelle on obtient, en adaptant, le nombre

$$2^{2-L}(r-1) \sum_{k=0}^{\lfloor (L-2)/2 \rfloor} \binom{L-1}{2k+1} (4r-3)^k \quad (18)$$

### 3.10 Liaison des cycles

Les cycles algébriques ne sont pas des entités isolées les unes des autres. Chacun des éléments  $(q_0 q_1 \dots q_{m-1})$  d'un cycle  $q_i = R^m(q_i)$  participe à une infinité d'autres cycles et d'une façon aucunement chaotique. Le monoïde  $\Omega$  est parfaitement structuré en couches de cycles de longueur  $m$  liés entre eux. Au lieu de tenter de le démontrer à l'aide des chaînes  $(N_i)_m$  de fonctions, on va essayer de le comprendre à la racine : les cycles  $(q_i)_m$  sont tout simplement le reflet des cycles de rotation du vecteur type  $(\rho_i)_m$ . Afin de bien montrer sur quelle propriété s'appuie la liaison des cycles, résumons ce qui est déjà établi.

Soit  $q = Q(\rho)$  la valeur du paramètre  $q$  dans l'équation de rang  $\rho$ . De même que le cycle  $(q_0 q_1 \dots q_{m-1})$  est engendré par la fonction  $R$  de rotation

$$R(q_i) = q_j \text{ où } j = (i+1) \bmod m \quad (19)$$

on a le cycle  $(\rho_0 \rho_1 \dots \rho_{m-1})$  engendré par la fonction  $V$  de rotation du vecteur type

$$V(\rho_i) = \rho_j \text{ où } j = (i+1) \bmod m \quad (20)$$

et les deux cycles se correspondent par  $q_i = Q(\rho_i)$ . Voilà ce que sont les cycles comme entités séparées. Et ce qui assure la liaison des cycles et la structuration cyclique de  $\Omega$  en couches  $m$ , du point de vue des rangs  $\rho$ , est ceci :

$$V(r^k \times \rho) = V(\rho) \quad (21)$$

En somme, si on ajoute des '0' à la fin du vecteur type  $\rho$ , ou des fonctions  $D$  au bout de la chaîne de composée  $\omega$ , la valeur  $q$  demeure la même. Dans le calcul de  $q$  de l'équation (7) la valeur  $q_m$  au bas du tableau occulte la valeur  $r_m$  qui porterait la différence pour  $q$ .

On peut encore une fois se demander « Et ça donne quoi ? ». Eh bien, une fois qu'on a les  $(r-1)^m$  valeurs  $q$  faciles à calculer de la classe  $K_{dm}[m, m]$  et les  $\delta_i = p^m - r^{m+i-1}$  qu'on veut traiter, on a besoin seulement de la fonction  $R$  pour obtenir l'ensemble des valeurs  $q$  jusqu'à la classe  $K_{dm}[m, m+i-1]$ . Pourquoi? Toutes les valeurs de  $q$  dans une classe se retrouvent dans la classe suivante. Et en appliquant la rotation  $R$  à ces valeurs on obtient toutes les nouvelles valeurs de la nouvelle classe. Exemple de ce calcul à l'annexe C.

*Question.* Si on a calculé toutes les valeurs  $q$  des classes  $K_{dm}$  de  $[m, m]$  à  $[d, m]$ , combien d'équations distinctes  $N$  aura-t-on obtenues?

*Réponse.* À l'aide de la figure 1 on obtient aisément :  $N = \binom{d}{m}(r-1)^{m-1}$ .

## Conclusion

Il y aurait encore beaucoup à dire sur les cycles dans les suites de Hasse-Allouche. En particulier, la figure 1 est seulement la projection d'un réseau 3D où chacune des couches horizontales se sépare en sous-couches distinctes dans laquelle l'infinité des valeurs  $q$  peut être calculée avec la fonction de rotation  $R$  à partir d'une seule valeur initiale  $q_0$ . Mais tout ça n'entre pas dans le cadre d'un article qui ne visait au départ qu'à mettre le doigt sur ce qui fait vraiment problème dans la conjecture de Syracuse. Par ailleurs j'ai résisté à la tentation d'une plongée dans l'étude systématique comparative des cycles. Ce n'est pas la place. Ça aurait distraité du message essentiel ici.

La fécondité de l'approche algébrique pour comprendre la difficulté particulière du problème de Collatz-Kakutani me semble maintenant assez bien établie. Sur le versant algébrique « tout n'est qu'ordre et beauté » sauf l'impondérable division  $q/(p^m - r^d)$  dont dépend l'apparition d'un cycle, lorsque ce quotient est entier.

Une démonstration satisfaisante de la conjecture de Collatz-Kakutani impliquerait une dépendance du numérateur vis-à-vis du dénominateur, qui devrait être du coup dévoilée. À l'inverse, montrer que le résultat  $q \bmod (p^m - r^d)$  est tout-à-fait aléatoire équivaudrait à montrer que les conjectures de Syracuse et de Kakutani ne peuvent pas être démontrées de façon absolue bien qu'elles soient éminemment probables si on tient compte du calcul des probabilités présenté dans les deux précédents articles — Voir Références [1][2] — qui repose sur l'hypothèse de l'équiprobabilité des valeurs possibles de  $q \bmod (p^m - r^d)$ .

Il n'y a pas lieu, pour le moment du moins, de pousser plus loin l'évaluation de ces probabilités dans le cadre des suites de Hasse-Allouche. Ça ne diffère que par le facteur du nombre de cas  $(r - 1)^m$ . Un peu d'exploration est maintenant nécessaire. Et la porte est désormais ouverte pour l'exploration de nouvelles suites exemptes de divergence telles, du moins présumément, celles de Collatz-Kakutani. Dans les suites de la forme  $px + q$ , déjà le quotient suivant  $p/r = 5/2$  était trop élevé, semble-t-il, pour éviter de telles suites divergentes.

Avant de déposer cet article j'ai voulu m'assurer que les exemples de calculs qu'on trouve en Annexe sont exempts des erreurs de calculs faits à la main, qui sont un peu trop fréquentes chez moi. Du coup j'ai commencé à écrire des petits programmes Pascal pour l'exploration des suites de Hasse-Allouche et la structure algébrique sous-jacente. Ça pourrait être éventuellement déposé sur la Toile. Mais si quelqu'un était déjà intéressé ça serait disponible [chordoid at gmail.com] en l'état : sources et exécutable Windows.



## ANNEXES

### A L'opérateur triplet

#### A.1 Définition

Tirée de [1] *Approche algébrique du problème  $3n + 1$  généralisé*

À la fonction  $f(n) = (an + c)/b$  est associé l'opérateur  $\langle f \rangle = \langle a, b, c \rangle$  équivalent à  $f$  :

$$\langle f \rangle (n) = \langle a, b, c \rangle (n) = (an + c)/b = f(n)$$

Soit  $\langle g \rangle = \langle a', b', c' \rangle$ . Voici la *loi de composition* à droite  $\langle f \rangle \langle g \rangle = \langle fg \rangle$  équivalente à celle des fonctions :

$$\boxed{\langle a, b, c \rangle \langle a', b', c' \rangle = \langle aa', bb', bc' + ca' \rangle}$$

de sorte que l'on ait, tenant compte de la convention d'inversion des fonctions :

$$fg(n) = g(f(n)) = (aa'n + bc' + ca')/bb' \equiv \langle fg \rangle (n)$$

Les opérateurs triplet munis de cette loi de composition à droite sont équivalents aux fonctions linéaires munies de leur propre loi de composition. Si les coefficients de  $\langle q_a, q_b, q_c \rangle$  sont des rationnels non entiers on peut toujours réduire à un triplet d'entiers car

$$\langle ka, kb, kc \rangle \equiv \langle a, b, c \rangle$$

En tant que groupe, voici l'élément neutre (fonction identité) et l'inverse :

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle^0 &= \langle 1, 1, 0 \rangle \\ \langle a, b, c \rangle^{-1} &= \langle b, a, -c \rangle \end{aligned}$$

#### A.2 Les deux formules de base des triplets

##### 1. Puissance d'un triplet

$$\boxed{\langle a, b, c \rangle^k = \langle a^k, b^k, c(a^k - b^k)/(a - b) \rangle} \quad (22)$$

*Démonstration.* On peut utiliser la récurrence. Montrons d'abord que si c'est vrai pour  $k$  c'est vrai aussi pour  $k + 1$ . En effet on a :

$$\begin{aligned}
\langle a, b, c \rangle^k \langle a, b, c \rangle &= \left\langle a^k, b^k, c(a^k - b^k)/(a - b) \right\rangle \langle a, b, c \rangle \\
&= \left\langle a^{k+1}, b^{k+1}, K \right\rangle \text{ où} \\
K &= b^k c + c(a^k - b^k)a/(a - b) \\
&= cb^k(a - b)/(a - b) + ca(a^k - b^k)/(a - b) \\
&= c(ab^k - b^{k+1} + a^{k+1} - ab^k)/(a - b) \\
&= c(a^{k+1} - b^{k+1})/(a - b)
\end{aligned}$$

Reste à montrer que c'est vrai pour  $k = 1$ . En effet :

$$\left\langle a^1, b^1, c(a^1 - b^1)/(a - b) \right\rangle = \langle a, b, c \rangle$$

## 2. Produit de triplets

$$\prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i, c_i \rangle = \langle a, b, c \rangle \text{ où :}$$

$$a = \prod_{i=1}^n a_i$$

$$b = \prod_{i=1}^n b_i$$

$$\begin{aligned}
c &= \begin{array}{ccccccc}
c_1 a_2 a_3 a_4 & \cdots & a_n \\
+ b_1 c_2 a_3 a_4 & \cdots & a_n \\
+ b_1 b_2 c_3 a_4 & \cdots & a_n \\
+ b_1 b_2 b_3 c_4 & \cdots & a_n \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
+ b_1 b_2 b_3 b_4 & \cdots & c_n
\end{array} \quad (23)
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Tout l'intérêt de la proposition réside dans la disposition particulière de la matrice des produits partiels de  $c$ . Inutile de se mettre martel en tête à formuler une démonstration pointilleuse ici. Il suffit d'exhiber comment évolue la matrice en passant d'un indice au suivant. Partons des trois premières étapes :

$$\begin{aligned}
\langle a, b, c \rangle &= \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \langle a_2, b_2, c_2 \rangle \dots \\
&= \langle a_1 a_2, b_1 b_2, (c_1 a_2 + b_1 c_2) \rangle \langle a_3, b_3, c_3 \rangle \dots \\
&= \langle a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3, (c_1 a_2 a_3 + b_1 c_2 a_3 + b_1 b_2 c_3) \rangle \langle a_4, b_4, c_4 \rangle \dots
\end{aligned}$$

Oublions  $a$  et  $b$  qui évoluent de façon simple, et calculons la prochaine valeur de  $c$  :

$$c = (c_1 a_2 a_3 + b_1 c_2 a_3 + b_1 b_2 c_3) a_4 + b_1 b_2 b_3 c_4 \quad (24)$$

Il suffit d'aligner les termes pour découvrir le schéma matriciel et son évolution :

$$c = \begin{pmatrix} c_1 a_2 a_3 \\ + b_1 c_2 a_3 \\ + b_1 b_2 c_3 \end{pmatrix} a_4 + b_1 b_2 b_3 \cdot c_4$$

Alors – ce qui est suffisamment probant – la somme de produits devient à l'étape 4 :

$$c = \begin{pmatrix} c_1 a_2 a_3 a_4 \\ + b_1 c_2 a_3 a_4 \\ + b_1 b_2 c_3 a_4 \\ + b_1 b_2 b_3 c_4 \end{pmatrix} \quad (25)$$

## B Ordre des sous-suites

### B.1 Exemple de liste ordonnée

Voici un extrait, du rang 54 à 60, de la liste des sous-suites de Hasse-Allouche où  $(p, r) = (4, 3)$ . Il suffit de connaître le rang pour déduire le reste. Le passage du rang  $n$  au

$n$	$\rho$	$\langle \omega \rangle$	$bk + x$	$ak + y$	<i>complète</i>	<i>compacte</i>
..						
54	2000	$\langle 4, 81, -2 \rangle$	$81k - 40,$	$4k - 2$	$(-40 -162 -54 -18 -6 -2)$	$(-40 -2)$
55	2001	$\langle 16, 81, -35 \rangle$	$81k + 68$	$16k + 13$	$(68 270 90 30 10 39 13)$	$(68 10 13)$
56	2002	$\langle 16, 81, -62 \rangle$	$81k - 67$	$16k - 14$	$(-67 -270 -90 -30 -10 -42 -14)$	$(-67 -10 -14)$
57	2010	$\langle 16, 81, -17 \rangle$	$81k - 4$	$16k - 1$	$(-4 -18 -6 -2 -9 -3 -1)$	$(-4 -2 -1)$
58	2011	$\langle 64, 81, -95 \rangle$	$81k + 23$	$64k + 17$	$(23 90 30 10 39 13 51 17)$	$(23 10 13 17)$
59	2012	$\langle 64, 81, -122 \rangle$	$81k + 50$	$64k + 38$	$(50 198 66 22 87 29 114 38)$	$(50 22 29 38)$
60	2020	$\langle 16, 81, -26 \rangle$	$81k - 49$	$16k - 10$	$(-49 -198 -66 -22 -90 -30 -10)$	$(-49 -22 -10)$
..						

vecteur type  $\rho$ , puis à la composée  $\omega$ , est symbolisé par les fonctions Pascal

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Vectype}(n) \\ \omega &= \text{Omega}(\rho) \end{aligned}$$

et la procédure Pascal (Annexe D) pour obtenir  $(x, y) = \text{Solution} \{ y = \omega(x) \}$ .

## B.2 Code Pascal utilisé pour Omega et Vectype

Voici d'abord la fonction  $w = \text{Omega}(v)$  précédée des déclarations globales :

```
type
  Triplet = Record m,d : byte; a,b,q : Qword; end;
const
  Ident : Triplet = (m : 0; d : 0; a : 1; b : 1; q : 0);
  p : byte = 4; r : byte = 3; // exemple
  Chiffres : shortstring = '012'; // base 3
var
  n : Qword; v : string;



---



function Omega (v : string) : Triplet;
var
  w : Triplet; k,i : byte;
begin
  w := Ident;
  with w do begin
    for k := 1 to length (v) do begin
      i := Pos (v[k], Chiffres) - 1;
      if i = 0 then begin // <D> = <1,r,0> si i = 0
        d := d + 1; b := b * r
      end else begin // <T> = <p,r,-i> sinon
        q := q * p + b * i;
        m := m + 1; a := a * p;
        d := d + 1; b := b * r;
      end
    end;
  end;
  Omega := w;
end;
```

---

Puis la fonction  $v = \text{Vectype}(n)$  suivie de la boucle d'appel de l'exemple 54 à 60. À noter que la fonction n'est pas limitée à  $r < 11$ . Aux chiffres 0 à 9 on peut ajouter, par exemple, les majuscules, puis les minuscules... soit déjà  $r = 62$ . Seule la position importe.

```
function Vectype ( $n$  : Qword) : string;  
var  
     $v$  : string;  $i$  : byte;  
begin  
     $v := ""$ ;  
    while  $n <> 0$  do begin  
         $i := n \bmod r$ ;  
         $v := \text{Chiffres}[i + 1] + v$ ;  
         $n := n \text{ div } r$   
    end;  
    Vectype :=  $v$   
end;
```

---

```
procedure Boucle ( $debut, fin$  : Qword);  
begin  
     $n := debut$ ;  
    repeat  
         $v := \text{Vectype}(n)$ ;  
         $w := \text{Omega}(v)$ ;  
        // ( $n v m d a b q$ ) disponibles pour sortie formatée  
         $inc(n)$ ;  
    until  $n > fin$ ;  
end;  
  
begin  
    Boucle(54, 60); // exemple  
    Readln  
end.
```

---

## C Calculs avec les fonctions de rotation

### C.1 Code Pascal utilisé

Les valeurs de  $R(q)$  ont été calculées avec le code Pascal suivant :

```
begin
  write (q : 5);
  for j := 1 to m do begin
    q := (p * q - ((p * q) mod r) * delta) div r;
    while (q mod r) = 0 do q := q div r;
    write (q : 5);
  end;
  writeln;
end;
```

### C.2 Calculs de la rotation $R$

Prenons les suites de Hasse-Allouche où  $(p, r) = (4, 3)$ . Comment obtenir toutes les valeurs  $q$  où il y a  $m = 3$  multiplications et donc toutes les équations  $64x - 3^d y - q = 0$  en utilisant seulement la fonction de rotation  $R$ ? Comme il a été mentionné, on a besoin de l'amorce des premières valeurs  $q$  pour  $d = m = 3$  et de calculer un nouveau  $\delta$  chaque fois qu'on incrémente  $d$ .

D'abord l'amorce. Il y a huit  $q$  distincts dans la classe  $K_{dm}[3, 3]$  mais on a juste besoin des valeurs  $q$  qui correspondent aux vecteurs type 111, 112, 122 et 222. On obtient les autres avec la rotation  $R$  car on a avec  $V^i(\rho)$  :

$$(111 \ 111 \ 111) \ (112 \ 121 \ 211) \ (122 \ 221 \ 212) \ (222 \ 222 \ 222)$$

$$111: \ q = 37 \quad \text{car} \quad \langle 4, 3, -1 \rangle^3 = \langle 4^3, 3^3, -1(4^3 - 3^3) \rangle = \langle 64, 27, -37 \rangle$$

$$222: \ q = 74 \quad \text{car} \quad \langle 4, 3, -2 \rangle^3 = \langle 4^3, 3^3, -2(4^3 - 3^3) \rangle = \langle 64, 27, -74 \rangle$$

$$112: \ q = 46 \quad \text{car} \quad \langle 4, 3, -1 \rangle^2 \langle 4, 3, -2 \rangle = \langle 16, 9, -7 \rangle \langle 4, 3, -2 \rangle = \langle 64, 27, -46 \rangle$$

$$122: \ q = 58 \quad \text{car} \quad \langle 4, 3, -1 \rangle \langle 4, 3, -2 \rangle^2 = \langle 4, 3, -1 \rangle \langle 16, 9, -14 \rangle = \langle 64, 27, -58 \rangle$$

$$\text{Étape 1:} \quad d = 3 \quad \delta = 4^3 - 3^3 = 37 \quad \text{— Équations } 64x - 27y - q = 0$$

$$R^i(q) = (37 \ 37 \ 37 \ 37 \dots) \ (46 \ 49 \ 53 \ 46 \dots) \ (58 \ 65 \ 62 \ 58 \dots) \ (74 \ 74 \ 74 \ 74 \dots)$$

Par exception, on retrouve la valeur initiale à la fin pour bien montrer qu'il y a rotation. Ce ne sera plus le cas aux étapes suivantes où ne seront affichées que les trios de  $q$  qui

bouclent par  $R$ .

**Étape 2 :**  $d = 4$   $\delta = 4^3 - 3^4 = -17$  — Équations  $64x - 81y - q = 0$

(37 55 79) (46 67 95) (58 83 122) (74 110 158)  
(49 71 106) (53 82 115) (62 94 79) (65 98 142)

**Étape 3 :**  $d = 5$   $\delta = 4^3 - 3^5 = -179$  — Équations  $64x - 243y - q = 0$

(37 109 205) (46 121 221) (58 137 302) (74 218 410)  
(55 133 79) (67 149 106) (83 230 142) (110 266 158)  
(49 125 286) (53 190 313) (62 202 329) (65 206 394)  
(71 214 115) (82 169 95) (94 185 122) (98 250 131)

**Étapes 4 :** *se prolonge ainsi à l'infini...*

### C.3 La rotation $V$

La fonction  $V$  de rotation du vecteur  $\rho$  ne pose pas de problème particulier. Un exemple suffit à illustrer sa définition.

$$V^4(1200031) = V^3(2000311) = V^2(3112000) = V(1120003) = 1200031$$

Le premier chiffre (jamais nul) et les zéros qui le suivent sont déplacés à la fin de la suite de chiffres. Ce qui peut se traduire en Pascal par cette fonction  $Vrot$  :

```
function Vrot ( $v$  : string) : string;  
begin  
  repeat  
     $v := \text{Concat}(v, v[1]);$   
    Delete( $v, 1, 1$ )  
  until  $v[1] <> '0'$ ;  
  Vrot :=  $v$   
end;
```

Avec l'exemple de l'**Étape 2**, on peut vérifier que les valeurs  $q$  obtenues par la rotation  $R(q)$  correspondent parfaitement aux vecteurs type  $\rho$  obtenus par la rotation  $V(\rho)$ .

(1110 1101 1011) (1120 1201 2011) (1220 2201 2012) (2220 2202 2022)  
(1210 2101 1012) (2110 1102 1021) (2120 1202 2021) (2210 2102 1022)

## D Solution de l'équation diophantienne

### D.1 Code Pascal utilisé

Le plus difficile est de résoudre l'équation de Bezout  $au + bv = 1$ . J'utilise une variante avec changement de signe. Le reste est très simple.

```
procedure Bezout (a, b : longint);           // variante  $au - bv = 1$ 
begin
  r1 := a; r0 := b; u1 := 1; v1 := 0; u0 := 0; v0 := 1;
  while r0 <> 0 do
    begin
      q := r1 div r0;
      r2 := r1; u2 := u1; v2 := v1;
      r1 := r0; u1 := u0; v1 := v0;
      r0 := r2 - q * r0; u0 := u2 - q * u0; v0 := v2 - q * v0;
    end;
    u := u1; v := -v1;                       // variante
  end;
```

Le code intègre ici les données pour l'exemple de l'équation  $64x - 27y - 37 = 0$ .

```
var
  pm, rd, r, q, u, v, x, y : longint;
begin
  pm := 64; rd := 27; r := 3; q := 37;           // exemple
  Bezout (pm, rd);                               // renvoie (u, v)
  y := (v * q) mod pm;
  if y mod r = 0 then                            // ajuste si multiple de r
    if y < 0 then y := y + pm
      else y := y - pm;
  x := (rd + q) div pm;
end.
```

Bezout retourne  $(u, v) = (-8, -19)$ . Alors  $y = (-19 \times 37) \bmod 64 = -63$ . Comme c'est un multiple de 3 alors on a  $y = 64 - 63 = 1$ . Revenant à l'équation on a  $x = 1$ . C'est un cas de spirale, un cycle à 3 tours. La solution générale est  $(x, y) = (27k + 1, 64k + 1)$  où  $k$  est un entier relatif tel que  $k \pmod{r} \neq 2$ .



## E Référence Hasse-Allouche

### E.1 Notation $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$

La partie entière notée  $\lfloor x \rfloor$  d'un nombre réel  $x$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Exemple  $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$  ou encore  $\lfloor 3 \rfloor = 3$ . La partie entière par excès notée  $\lceil x \rceil$  est définie par  $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ . Exemple  $\lceil -5/2 \rceil = -3$  ou encore  $\lceil -3 \rceil = -3$ .

La fonction  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  est la fonction plancher de  $x$  et la fonction  $f(x) = \lceil x \rceil$  est la fonction plafond. Si on avait défini  $T(x) = \lceil px/r \rceil$  alors le cas  $(p, r) = (3, 2)$  aurait été les suites normales  $3x + 1$  de Collatz-Kakutani. Ceci demeure vrai pour tous les  $(p, r)$ .

$$\lfloor \lfloor px/r \rfloor \rfloor = \lfloor \lceil -px/r \rceil \rfloor$$

### E.2 Trappes $T(x) = 0$

Il a été montré dans la généralisation  $px + q$  que pour obtenir des suites entièrement positives ou entièrement négatives il fallait  $q < p$ , sinon il fallait que  $p$  et  $q$  soient premiers entre eux pour éviter les trappes  $T(x) = 0$ . Dans Hasse-Allouche où  $p < r$  on a toujours  $T(1) = 0$ . Ce cas est incompatible avec la structure en vue : le monoïde libre des chaînes de fonctions entre nombres non multiples de  $r$ . Par voie de conséquence les suites seront restreintes à celles entièrement positives ou entièrement négatives.

### E.3 L'appellation Hasse-Allouche

La restriction  $p > r$  ne justifie pas un changement d'appellation.

Dans la suite  $n$  et  $d$  sont deux entiers strictement positifs fixés ; on suppose  $d \geq 2$  et  $\text{pgcd}(n, d) = 1$ . Soit  $A_d = \{0, r_1, \dots, r_{d-1}\}$  un système représentatif des entiers modulo  $d$ , où les  $r_i$  sont dans  $\mathbb{Z}$ , et soit  $\varphi$  la surjection canonique de  $\mathbb{Z}$  sur  $A_d$ .

L'application  $g$  de  $\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}$  est définie par :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{d} & \text{si } t \equiv 0 \pmod{d} \\ \frac{nt - \varphi(nt)}{d} & \text{si } t \not\equiv 0 \pmod{d} \end{cases}$$

FIGURE 2 – Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1978, Sur la conjecture de « Syracuse-Kakutani-Collatz » par Jean-Paul Allouche

4.3. **DEFINITION.** Let  $d, m \in \mathbb{N}$  satisfy  $d \geq 2$  and  $\gcd(d, m) = 1$ , assume that  $A_d := \{0, r_1, \dots, r_{d-1}\}$  is a complete system on incongruent residues to modulus  $d$ , and denote by  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow A_d$  the natural projection. Then a **Hasse function** is given by

$$H : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad H(x) := \begin{cases} \frac{x}{d} & \text{if } x \equiv 0 \pmod{d}, \\ \frac{mx - \varphi(mx)}{d} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

FIGURE 3 – The Dynamical System Generated by the  $3n+1$  Function, De Günther J. Wirsching

Allouche (1979, [58])<sup>24</sup> étudie la généralisation du problème de Syracuse proposée par Hasse.

$$g(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 \pmod{d} \\ (nm - nm\%d)/d & \text{sinon} \end{cases}$$

FIGURE 4 – La suite de Syracuse, un monde de conjectures, Luc-Olivier Pochon, Alain Favre

## Références

1. Pierre Lamothe, 2020, *Approche algébrique du problème  $3n + 1$  généralisé*, <https://vixra.org/abs/2002.0571>
2. Pierre Lamothe, 2020, *Cycles universels et cycles dérivés en  $3x + 1$  généralisé*, <https://vixra.org/abs/2002.0594>