

Teoria Simmetrica

Gas di Planck

(dicembre 2019)

Giuseppe Azzarello
pinoazzarello@gmail.com

Abstract

Nell'articolo precedente, sulla *Teoria Simmetrica*, è stato mostrato che la particella di Planck è una particella simmetrica, nella condizione di unificazione gravi-elettro-magnetica. Il dominio di questa particella è il vacuum, in cui regna accoppiata nel dipolo positivo-negativo, costituendo il *medium Planck*. Proseguendo la teoria, mostreremo che il *medium Planck*, descritto dalle unità naturali introdotte da Planck, stabilisce il quanto di entropia k_B , conferendo un nuovo significato alla costante dei gas R . Vedremo la riunificazione energetica alla scala di Planck, da cui si potranno individuare delle relazioni importanti per il proseguo, e mostreremo come il medium Planck è identificabile con il gas ideale della teoria termodinamica. Successivamente ipotizzeremo un possibile sistema termodinamico, in cui il medium Planck costituisce un cosmic background (CBPM). L'introduzione del quanto di entropia prolunga, come conseguenza logica, il concetto di quantizzazione alla termodinamica, ottenendo un quadro più aderente alla realtà fisica, nella direzione della riunificazione.

Keyword: zero-point energy, zero-point entropy, costante dei gas, entropia del medium Planck, gas ideale, energia alla scala di Planck, teorema del calore di Nernst.

1. Introduzione.

Lo scopo della fisica è quello di descrivere il mondo in cui viviamo, e questo avviene attraverso la costruzione di modelli (*teorie*) che codificano i fenomeni che si cerca di investigare. Nonostante la complessità del soggetto, le sue *strutture* sono catturate da un insieme di formule (abbastanza) semplici, confermandoci che l'impalcatura concettuale della fisica è autoconsistente. Di pari passo un modello è accompagnato da una *interpretazione*, che spiega il significato fisico della teoria e crea la corrispondenza tra il simbolismo matematico e la realtà. Spesso, il successo di un modello è stato confuso con la realtà ultima, e questo ha fatto sembrare illogico il progresso scientifico. Per questo abbiamo imparato che ad ogni teoria vi è abbinato un suo *regno di validità*. In questo senso, lo sviluppo di un modello è un processo di raffinamento che ne allarga gli orizzonti.

Nello sviluppo storico della fisica, viene marcata una netta separazione tra la *fisica classica* (formalismo Newton-Maxwell) e la *fisica moderna* (Relatività-Meccanica Quantistica), ma nessuna separazione tra la fisica prima e dopo la quantizzazione (*discretizzazione*) introdotta dalla costante di Planck h , e dopo la formulazione della *zero-point energy*, l'energia *immutabile* che ogni sistema fisico deve testimoniare allo zero assoluto, quando si ritiene che ogni fluttuazione nello stato microscopico deve cessare. Per la fisica moderna la *zero-point energy non è una proprietà intrinseca dell'universo* ma una conseguenza della relazione di indeterminazione di Heisenberg. Di opinione diversa era invece W. Nernst, secondo cui la *zero-point energy è una peculiarità dell'universo*. Quindi, anche se la meccanica quantistica "è la migliore teoria che abbiamo", ed ha ormai un secolo di vita, diventa discriminata la natura fisica della *zero-point energy*.

Nella metà del secolo scorso alcuni fisici audaci (T.W Marshall, T.H Boyer, ed altri), hanno sviluppato la teoria *Electrodynamic Stochastic*, che considera l'elettrodinamica di Maxwell con l'aggiunta della *zero-point energy* come condizioni al contorno. Questa teoria - che ha mostrato degli interessanti sviluppi, ottenendo risultati che prima erano solo appannaggio della *Quantum Electrodynamics* - va sottolineata soprattutto per il cambiamento di prospettiva. L'inclusione della *zero-point energy* apre la fisica classica a nuovi scenari, allargandone gli orizzonti.

2. Preliminari Termodinamici.

2.1- Entropia

L'entropia è una funzione di stato che rende conto della attitudine di un sistema fisico a scambiare energia. Ogni sistema soggetto a trasformazioni tende a modificarsi in modo da aumentare la propria entropia, o quanto meno a non farla diminuire (*teorema di massima entropia*).

La prima definizione di entropia è legata alla termodinamica, e fu introdotta da Clausius nel 1864. Supponendo che un sistema fisico scambia una certa quantità di energia ΔE , ad una temperatura (assoluta) T , si definisce la variazione di entropia ΔS come il rapporto tra l'energia scambiata e la temperatura alla quale avviene lo scambio, rispetto alla massa unitaria o una mole:

$$\Delta S \equiv \frac{\Delta E}{T} \geq 0 \quad \left[\frac{J}{mole \cdot ^\circ T} \right] \quad (1)$$

dove il segno di uguaglianza vale per i processi reversibili.

Come per l'energia, anche l'entropia non è calcolabile classicamente in senso assoluto, poiché è definita a meno di una costante additiva S_0 che non possiamo calcolare. Questo non comporta però delle difficoltà, dal momento che siamo sempre interessati a variazioni di entropia ΔS nei cambiamenti di stato di un sistema termodinamico.

2.2 - Equazione di stato

Nel 1834 Clapeyron formulò l'equazione di stato dei gas ideali, sintetizzando le leggi empiriche di Avogadro, Boyle, Charles e Gay-Lussac. Nella sua forma più semplice, l'equazione è scritta nella forma calorica

$$PV = nRT \quad (2)$$

dove P è la pressione, V il volume, n il numero di moli, R la costante dei gas e T la temperatura assoluta. Questa equazione viene riferita ad un ipotetico gas ideale costituito da particelle puntiformi non interagenti, dove l'unica forma di energia presente è quella cinetica delle particelle che costituiscono il gas.

La costante dei gas si può esprimere nella forma

$$R = N_A k_B = 8,314 \left[\frac{J}{mole \cdot ^\circ T} \right] \quad (3)$$

dove il numero di Avogadro N_A rappresenta il numero di entità contenute in una mole, valendo la relazione

$$N_A = \frac{N}{n} \approx 6,022 \times 10^{23} \quad (4)$$

dove N esprime il numero complessivo di entità del sistema in studio.

3. Medium Planck.

Nell'articolo precedente [1] abbiamo mostrato che la particella di Planck è caratterizzata dalle unità naturali formulate da Planck, formando l'elemento costituente del *medium Planck*. Consideriamo le seguenti relazioni per il medium Planck:

$$k_B T_p = k_B \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = \sqrt{k_B^2 \frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad (5)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann e T_p la temperatura di Planck;

$$m_p c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} c^2 = \sqrt{c^4 \frac{\hbar c}{G}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad (6)$$

dove m_p è la massa di Planck e c la velocità delle onde elettromagnetiche nel vacuum;

$$\hbar \omega_p = h \nu_p = \hbar \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}} = \sqrt{\hbar^2 \frac{c^5}{\hbar G}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad (7)$$

dove \hbar è la costante di Planck ridotta ($\hbar = h/(2\pi)$), ω_p la frequenza angolare di Planck e ν_p la frequenza di Planck.

Come mostrato le tre espressioni (5),(6),(7), sono uguali tra loro ed uguali all'energia di Planck

$$E_p = h \nu_p = k_B T_p = m_p c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad (8)$$

Quindi possiamo riunirle in una unica relazione sia *quantitativa* che *qualitativa*

$$\underbrace{k_B T_p}_{thermal} = \underbrace{m_p c^2}_{particle} = \underbrace{h \nu_p}_{wave} \quad (9)$$

a testimonianza della unificazione energetica del medium Planck.

I tre aspetti della (9) sono chiaramente evidenti. Il vacuum, dominio del *medium Planck*, contiene tutte le forme energetiche, distinguibili solo attraverso l'applicazione di una particolare teoria che ne carpisce il carattere specifico (termico, particella, onda).

Se consideriamo le varie uguaglianze tra i termini della (9) otteniamo le seguenti relazioni:

$$k_B T_p = h \nu_p \quad k_B T_p = m_p c^2 \quad m_p c^2 = h \nu_p \quad (10)$$

dalle quali possiamo ricavare le relazioni

$$k_B \equiv \frac{h \nu_p}{T_p} \equiv \frac{m_p c^2}{T_p} \equiv \frac{E_p}{T_p} \approx 1,380 \times 10^{-23} \quad [J/^\circ K] \quad (11)$$

$$h \equiv \frac{k_B T_p}{\nu_p} \equiv \frac{m_p c^2}{\nu_p} \equiv \frac{E_p}{\nu_p} \approx 6,62 \times 10^{-34} \quad [J/Hz] \quad (12)$$

$$c^2 \equiv \frac{k_B T_p}{m_p} \equiv \frac{h \nu_p}{m_p} \equiv \frac{E_p}{m_p} \approx 9 \times 10^{18} \quad [J/Kg] \quad (13)$$

La relazione (11) ci dice che k_B è una costante energetica collegata all'aspetto *thermal-like* della particella di Planck; la relazione (12) ci dice che h è una costante energetica collegata all'aspetto *wave-like* della particella di Planck; la relazione (13) ci dice che c^2 è una costante energetica collegata all'aspetto *particle-like* della particella di Planck.

Sulla base di quanto finora introdotto, e dal significato fisico della (11), definiamo l'entropia della particella di Planck, o quanto di entropia, o zero-point entropy :

$$S_p \equiv k_B \quad (14)$$

Inoltre, si possono ricavare le seguenti relazioni:

$$\frac{k_B}{h} = \frac{v_p}{T_p} \approx 2,08 \times 10^{10} \quad [\text{Hz}/^\circ\text{K}] \quad (15)$$

$$\frac{k_B}{c^2} = \frac{m_p}{T_p} \approx 1,53 \times 10^{-40} \quad [\text{Kg}/^\circ\text{K}] \quad (16)$$

$$\frac{c^2}{h} = \frac{v_p}{m_p} \approx 1,36 \times 10^{52} \quad [\text{Hz}/\text{Kg}] \quad (17)$$

che risulteranno importanti nel seguito dello sviluppo.

Se alla equazione (3), che sprime la costante dei gas, applichiamo quanto ottenuto finora, ovvero che k_B esprime il quanto di entropia, ed N_A il numero di particelle contenute in una mole, ne segue che *la costante dei gas $R = N_A k_B$ esprime l'entropia di una mole del medium Planck.*

Come verifica di questa *asserzione*, applichiamo l'equazione di stato dei gas ideali al *medium Planck*:

$$P_p V_p = n R T_p \quad (18)$$

Ricordiamo che

$$P_p = \frac{\hbar}{\ell_p^3 t_p} = \frac{\hbar}{\ell_p^3} \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}} \quad (\text{pressione di Planck}) \quad (19)$$

$$V_p = \ell_p^3 \quad (\text{volume di Planck}) \quad (20)$$

$$T_p = \frac{m_p c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} \quad (\text{Temperatura di Planck}) \quad (21)$$

Notiamo - come deve essere - che il prodotto $p_p V_p$ è una energia, esattamente l'energia di Planck:

$$p_p V_p = \frac{\hbar}{\ell_p^3} \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}} \ell_p^3 = \hbar \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 c^5}{\hbar G}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = E_p \quad (22)$$

Quindi dalla (18) ricaviamo

$$E_p = n R T_p \quad (23)$$

e da questa equazione segue che

$$\frac{E_p}{T_p} = n R \quad (24)$$

Applicando l'equazioni (11) alla (24), otteniamo

$$k_B = n R \quad (25)$$

e tenendo conto della (3)

$$k_B = n R = n N_A k_B = N k_B \quad (26)$$

Per avere l'uguaglianza occorre che sia $N=1$, ovvero k_B è *configurabile come l'entropia della singola particella di Planck.*

Che k_B possa esprimere il quanto di entropia non è un concetto nuovo. Anche se indirettamente, fu indicato da Leo Szilard (1929) nel famoso "problema del demone di Maxwell". Dal punto di vista classico, il termine $k_B T$ identifica l'energia media di un gas (*equipartition principle*), con distribuzione continua. Tuttavia, adesso il quanto di entropia k_B introduce una discretizzazione sulla energia termica, alla pari della costante di Planck \hbar rispetto alla energia ondulatoria. Quindi, *l'energia termica può assumere valori discreti con minima separazione $\delta E = k_B \delta T$.*

4. Il Gas Ideale è il medium Planck.

Consideriamo adesso un gas ideale. Si tratta di un modello termodinamico *semplice*, caratterizzato da particelle considerate non interagenti e puntiformi. Da evidenze sperimentali, Boyle e Mariotte trovarono una relazione tra la pressione ed il volume di un gas a temperatura costante:

$$pV = p_o V_o \quad T = \text{cost} \quad (27)$$

mentre Gay-Lussac ipotizzò la dipendenza dalla temperatura del volume di un gas a pressione costante:

$$V = \frac{T}{T_o} V_o \quad p = \text{cost} \quad (28)$$

Le quantità p_o, V_o, T_o sono la pressione, il volume e la temperatura di *uno stato termodinamico arbitrario ed ignoto, ma fissato*. Siamo interessati a capire se questo stato termodinamico può assumere qualsiasi configurazione oppure è *esclusivamente specifico*, e quindi uno *stato di riferimento intrinseco assoluto*. A tale scopo ci chiediamo che relazione esiste tra la pressione, il volume e la temperatura, se ci muoviamo dallo stato iniziale caratterizzato dalle grandezze (p_o, V_o, T_o) allo stato finale (p, V, T) - la trattazione che segue si può trovare in qualsiasi testo di termodinamica.

Prima cambiamo la pressione a temperatura costante, fino a raggiungere la pressione p , in cui si ottiene un volume V'_o :

$$pV'_o = p_oV_o, \quad T_o = \text{cost}, \quad \rightarrow \quad V'_o = \frac{p_oV_o}{p} \quad (29)$$

Adesso cambiamo la temperatura a pressione costante, ottenendo

$$V = \frac{T}{T_o} V'_o, \quad p = \text{cost} \quad (30)$$

Sostituendo il volume intermedio V'_o della (29) nella (30), otteniamo

$$V = \frac{T}{T_o} \frac{p_oV_o}{p} \quad (31)$$

ovvero

$$\frac{pV}{T} = \underbrace{\frac{p_oV_o}{T_o}}_{\text{terna fissa}} = \text{cost} \quad (32)$$

Notiamo che $(pV)/T$ è il rapporto energia/temperatura, ossia una entropia. Inoltre, dato che l'entropia $(pV)/T$ è una grandezza estensiva, allora deve aumentare in modo proporzionale al numero delle particelle del gas. Pertanto, l'entropia $(pV)/T$ deve essere pari al numero di particelle per il quanto di entropia k_B

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_oV_o}{T_o} = Nk_B \quad (33)$$

Adesso ci chiediamo: quanti modi abbiamo di scegliere la terna (p_o, V_o, T_o) ? Sicuramente infiniti se ci aspettiamo dei valori prefissati ma *privi di significato fisico*. Tuttavia, non stiamo cercando una terna (p_o, V_o, T_o) collegata ad un rapporto qualsiasi di valore fisso, ma collegata al quantum (*minimo*) di entropia k_B . Questo restringe la nostra ricerca. La strategia che seguiremo è quella di cercare il minimo volume V_o e la massima temperatura T_o , da cui seguirà - per interpolazione - una pressione p_o ben precisa.

4.1 - Stima di V_o :

La general relativity di Einstein nasce dalla esigenza di riconciliare la gravitazione di Newton con la special relativity, ed esclude qualunque effetto quantistico. D'altra parte, nella quantum theory si esclude qualsiasi effetto gravitazionale. Queste due teorie, oltre a differire per il paradigma fondativo, e quindi sulla prospettiva di una visione del mondo, hanno un altro problema che non permette il loro collegamento: la general relativity è una teoria deterministica mentre la quantum theory è una teoria probabilistica.

Se vogliamo sviluppare una teoria che cerca di conciliare la general relativity e la quantum theory - e questo è attualmente lo scopo della quantum gravity - è ragionevole aspettarsi che vengano coinvolte le tre costanti fondamentali c , G e \hbar , che operano nelle due teorie.

Nel 1899 Planck - ribaltando l'approccio antropocentrico sulla ricerca di unità di misura universali - parte da queste tre costanti fondamentali per definire quelle che verranno battezzate le *unità di Planck*. Queste unità mantengono il loro significato in tutti i tempi ed in ogni luogo. Tuttavia, costituiscono dei limiti invalicabili, oltrepassati i quali la fisica come la conosciamo perde di significato.

Nella quantum theory, ad ogni massa m c'è associata la *lunghezza d'onda Compton* ℓ_c , che fissa la scala delle distanze, importante per comprendere il comportamento di una particella di massa data:

$$\ell_c = \frac{\hbar}{mc} \quad (34)$$

D'altra parte, nella general relativity, ad ogni massa m c'è associato il *raggio di Schwarzschild* R_s , che fissa la scala delle distanze per comprendere il comportamento di un oggetto di massa data:

$$R_s = \frac{Gm}{c^2} \quad (35)$$

Nella general relativity le informazioni provengono dalla osservazione di oggetti molto pesanti in cui $R_s \square \ell_c$, mentre nella quantum theory le informazioni provengono dalla osservazione di oggetti molto leggeri dove $\ell_c \square R_s$. Questo ci pone di fronte alla impossibilità di conciliare queste due teorie. A meno che esista un "luogo" dove sia R_s che ℓ_c risultano uguali, individuando una scala di lunghezze che permetta una loro coesistenza.

Analizzando le due scale di distanza (34) e (35) - intrinseche rispettivamente della quantum theory e della general relativity - notiamo che entrambe sono caratterizzate soltanto dalla massa, poiché il resto sono costanti. Allora: è possibile che questo "luogo" sia caratterizzato da una massa particolare?

Il *medium Planck* è caratterizzato dalla lunghezza di Planck e dalla massa di Planck:

$$\ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (36)$$

Se consideriamo la massa di Planck e la inseriamo nella (34) otteniamo:

$$\ell_c = \frac{\hbar}{m_p c} = \frac{\hbar}{\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} c} = \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{G}{\hbar c}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 G}{c^2 \hbar c}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad (37)$$

uguale alla lunghezza di Planck, $\ell_c = \ell_p$. Allo stesso modo, se inseriamo la massa di Planck nella (35) otteniamo:

$$R_s = \frac{G m_p}{c^2} = \frac{G \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}}{c^2} = \frac{G}{c^2} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \sqrt{\frac{G^2 \hbar c}{c^4 G}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad (38)$$

uguale alla lunghezza di Planck, $R_s = \ell_p$.

Ne concludiamo che, queste due lunghezze caratteristiche, ℓ_c e R_s , vengono riunificate quando la massa m è la massa di Planck m_p , ed entrambe sono uguali alla lunghezza di Planck ℓ_p .

Questo risultato indica che alla scala di Planck la general relativity e la quantum theory potrebbero unificarsi.

Bene. Siamo arrivati alla conclusione che stavamo cercando. La lunghezza di Planck è la più piccola lunghezza interessante per il nostro scopo, e di conseguenza il volume di Planck $V_p = \ell_p^3$ è il risultato cercato.

4.2 - Stima di T_o :

In questo caso il lavoro è tutto in discesa. Semplicemente, la temperatura di Planck costituisce un limite insuperabile nella quantum theory. Inoltre si ritiene – secondo il modello standard della cosmologia – che la temperatura di Planck sia la temperatura iniziale a cui è avvenuto il Big Bang. Quindi la nostra scelta cade – in modo inevitabile - sulla temperatura di Planck T_p .

4.3 - Stima di p_o :

Infine, ottenuti il volume di Planck V_p e la temperatura di Planck T_p , come risultati cercati, per interpolazione calcoliamo la pressione p_o dalla (33), assumendo $N = 1$

$$\frac{p_o V_o}{T_o} = k_B \quad (39)$$

Posto $V_o = V_p$ e $T_o = T_p$, e considerando la (11), nella forma

$$\frac{p_p V_p}{T_p} = k_B \quad (40)$$

dalla (39) si ottiene

$$p_o = \frac{T_p}{V_p} k_B \quad \xrightarrow[k_B = \frac{p_p V_p}{T_p}]{} \quad p_o = \frac{T_p}{V_p} \frac{p_p V_p}{T_p} = p_p \quad (41)$$

Con questo risultato abbiamo completato la terna cercata. Riassumendo, possiamo stimare $V_o = V_p$, $T_o = T_p$ e $p_o = p_p$.

Per quanto mostrato per una singola particella, dalla (11) e dalla (33) si ricava

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_o V_o}{T_o} = \frac{p_p V_p}{T_p} = k_B \quad (42)$$

Questo risultato identifica lo stato iniziale (p_o, V_o, T_o) con il medium Planck caratterizzato dalla terna (p_p, V_p, T_p) .

Per un gas ideale, l'equazione (2) arricchita dalla (25), diventa

$$\frac{PV}{T} = k_B = \frac{P_p V_p}{T_p} \quad (43)$$

oppure

$$\frac{PV}{P_p V_p} = \frac{T}{T_p} \quad (44)$$

Le relazioni (43)-(44) alimentano quanto già sostenuto nell'articolo precedente [1]: *le nostre misure sono riferite al medium Planck rispetto a cui valutiamo i nostri risultati.*

5. Quantum o costanti di proporzionalità?

Nello sforzo di ottenere una interpolazione tra lo spettro di Wien e lo spettro di Rayleigh-Jeans, in grado di descrivere il black body radition spectrum in modo unitario, Planck identifica due costanti. Una è la costante di Planck h , associata allo spettro totale del blackbody. L'altra è la costante di Boltzmann k_B - a cui Planck diede questo nome in

onore di Boltzmann - che associa l'energia alla temperatura $E = k_B T$. Ma il primo ad usare la costante di Planck in termini di un fattore di proporzionalità fu Einstein nel 1905, che introduce l'idea di particella di luce (fotone) con una energia connessa alla frequenza $E = h\nu$, potendo spiegare l'effetto fotoelettrico.

I teorici *non assumono* la costante di Boltzmann come una costante universale, come la costante di Planck o la velocità della luce nel vacuum, poiché la considerano come un fattore di scala tra energia e temperatura. Tuttavia, anche h e c sono fattori di scala tra vari parametri e l'energia, per esempio $E = h\nu$ e $E = mc^2$. Questa posizione deriva dalla convinzione che non sembra esserci un dominio fisico in cui la k_B possa assumere un valore limite. Rispetto a questo atteggiamento, si può obiettare che non esiste - a tutt'oggi - un paradigma in grado di innalzare questo punto di vista a *principio*, capace di discriminare tra una *semplice* costante di proporzionalità e una costante *universale*.

Dal punto di vista classico, si può assumere che quando $h \rightarrow 0$, oppure $c \rightarrow \infty$, questi limiti cambiano la fisica in modo fondamentale. Ma l'assunzione $h \rightarrow 0$ oppure $c \rightarrow \infty$ ha un significato puramente *qualitativo* e *non quantitativo*, dato che *non sarà mai* $h = 0$ o $c = \infty$. Per questi valori la fisica sarebbe rilegata solo al regime classico.

6 – L'oscillatore di Planck

L'oscillatore armonico è un modello teorico molto importante - soprattutto in meccanica statistica - in cui si assume che le interazioni tra oscillatori siano deboli, così che possono scambiare energia e raggiungere una distribuzione di equilibrio. Nei cinque articoli pubblicati da Planck tra il 1897-1899, per spiegare l'origine della universalità della radiazione termica (Kirchhoff), egli considera un oscillatore Hertziano, costituito da un dipolo vibrante in presenza di un campo elettromagnetico. Nel prossimo articolo (già in preparazione) avremo modo di analizzare nei dettagli la legge di Planck sulla radiazione del black body.

Consideriamo il medium Planck come formato da infiniti oscillatori armonici 1D in equilibrio alla temperatura T_p . L'energia del singolo oscillatore sarà formata dalla energia cinetica e dall'energia potenziale

$$E(x, p) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (45)$$

dove k rappresenta la forza costante di guida. Inoltre sappiamo che k è legata alla frequenza angolare dalla relazione

$$k = m\omega^2 \quad (46)$$

da cui

$$E(x, p) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (47)$$

Ipotizzando che l'oscillatore del medium Planck possa oscillare alla lunghezza caratteristica di Planck, ovvero $x = \ell_p$, con velocità di Planck $v_p = c$, la (47) diventa

$$E(x, p) = \frac{1}{2}m_p c^2 + \frac{1}{2}m_p \omega_p^2 \ell_p^2 \quad (48)$$

Dato che la massa di Planck è

$$m_p = \frac{\hbar}{\ell_p c} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (49)$$

dalla (48) si ricava

$$E(x, p) = \frac{1}{2}m_p c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{\ell_p c}\right)\omega_p^2 \ell_p^2 = \frac{1}{2}m_p c^2 + \frac{1}{2}\hbar \frac{\omega_p^2 \ell_p}{c} \quad (50)$$

Inoltre sappiamo che

$$\ell_p = \frac{\lambda_p}{2\pi} \quad (51)$$

con λ_p la lunghezza d'onda di Planck, e quindi

$$E(x, p) = \frac{1}{2}m_p c^2 + \frac{1}{2}\hbar \frac{\omega_p^2 \ell_p}{c} = \frac{1}{2}m_p c^2 + \frac{1}{2}\hbar \frac{\omega_p^2 \lambda_p}{2\pi c} \quad (52)$$

Inoltre

$$\frac{\lambda_p}{c} = \frac{1}{\nu_p} \quad (53)$$

con ν_p la frequenza di Planck, quindi

$$E(x, p) = \frac{1}{2}m_p c^2 + \frac{1}{2}\hbar \frac{\omega_p^2 \lambda_p}{2\pi c} = \frac{1}{2}m_p c^2 + \frac{1}{2}\hbar \frac{\omega_p^2}{2\pi \nu_p} \quad (54)$$

Infine, dato che la frequenza angolare di Planck è

$$\omega_p = 2\pi\nu_p = \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}} = \frac{m_p c^2}{\hbar} \quad (55)$$

ne segue

$$E(x, p) = \frac{1}{2} m_p c^2 + \frac{1}{2} \hbar \frac{\omega_p^2}{\omega_p} = \frac{1}{2} m_p c^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega_p \quad (56)$$

ed utilizzando la (8), risulta

$$E(x, p) = \frac{1}{2} m_p c^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega_p = k_B T_p = \hbar \omega_p = m_p c^2 \quad (57)$$

Dalla relazione (57) vediamo che l'energia cinetica della particella di Planck è uguale alla energia potenziale

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_p c^2 \quad E_{pot} = \frac{1}{2} \hbar \omega_p \quad (58)$$

come atteso per un oscillatore armonico classico.

Infine, l'entropia si calcola facilmente dalla definizione:

$$S = \frac{E}{T} = \frac{k_B T_p}{T_p} = \frac{\hbar \omega_p}{T_p} = \frac{m_p c^2}{T_p} = k_B \quad (59)$$

Prima di proseguire, vogliamo mostrare un particolare. Abbiamo visto dalla (46) che vale la relazione

$$k = m_p \omega_p^2 \quad (60)$$

Vogliamo ricavare quanto vale la forza di guida, in cui si userà la (49) e la seconda della (55):

$$k = m_p \omega_p^2 = \left(\frac{\hbar}{\ell_p c} \right) \left(\frac{c^5}{\hbar G} \right) = \frac{c^4}{\ell_p G} \quad (61)$$

Dato che la forza di Planck vale

$$F_p = F_{max} = \frac{c^4}{G} \quad (62)$$

se ne ricava

$$k = \frac{F_p}{\ell_p} \quad (63)$$

ovvero la k esprime il campo d'azione per unità di lunghezza, ed è equivalente al risultato classico per la costante elastica di una molla

$$k = \frac{F}{x} \quad (64)$$

Ritorniamo adesso ai nostri affari. Prima però è opportuno richiamare alcuni concetti necessari per il seguito della trattazione.

7 – Risultati storici

7.1 - Teoria cinetica dei gas

La meccanica statistica classica è stata sviluppata applicando idee statistiche alla meccanica classica. La teoria è una conseguenza della teoria cinetica classica, basata sull'ipotesi che l'equilibrio termico si raggiunge attraverso lo scambio di energia tra masse puntiformi per mezzo di collisioni. In queste condizioni l'energia potenziale sarà trascurabile rispetto all'energia cinetica. Un singolo oscillatore armonico può essere considerato in equilibrio termico con un heat bath quando immaginiamo che l'oscillatore scambia energia con le particelle del heat bath. All'equilibrio, l'energia cinetica dell'oscillatore corrisponderà (in media) con l'energia cinetica delle particelle del heat bath. Così, l'energia media dell'oscillatore immerso nel heat bath, fornita dalla collisione con le particelle del heat-bath, è direttamente collegata alla energia cinetica media delle particelle del heat-bath.

L'elettrodinamica classica si è sviluppata nello stesso periodo in cui si è sviluppata la meccanica statistica classica. Tuttavia, in totale contrasto con la meccanica classica, nella elettrodinamica classica non ci sono cose del tipo trasferimento di energia a causa di collisioni tra oggetti puntiformi. Brusche collisioni tra particelle cariche coinvolgono grandi perdite di energia per radiazione. Questo perché l'elettrodinamica classica utilizza le forze di Coulomb long-range, che non si adattano alla meccanica statistica classica. Il trasferimento di energia nei sistemi elettromagnetici coinvolge le forze dei campi elettromagnetici associati alle particelle cariche o ad onde elettromagnetiche. In totale contrasto alla situazione nella meccanica statistica classica, i dipoli elettrici oscillanti, di frequenze diverse, interagenti attraverso i campi elettromagnetici, non sono forzati ad avere la stessa energia media in situazioni di comportamento steady-state.

7.2 - relazione di Planck-Einstein

Nel 1900 Planck ipotizza con successo la quantizzazione dell'energia, ossia l'ipotesi che l'energia, sia per i sistemi meccanici che per la radiazione elettromagnetica, non può essere posseduta o scambiata in quantità arbitrarie ma solo in pacchetti elementari - non ulteriormente suddivisibili - detti *quanti*. L'idea nasce dalla esigenza di ottenere un'energia media degli oscillatori, grazie alla quale la radiazione elettromagnetica si porta all'equilibrio con le pareti di

una cavità (*problema del black body*). Le implicazioni di questa ipotesi furono portate alle loro logiche conseguenze grazie alla interpretazione fornita da Einstein e Debye, che per primi attribuirono a questi quanti una realtà fisica. Nell'assunto finale, le energie possibili di qualsiasi oscillatore, anche meccanico, di frequenza angolare ω , devono essere discrete ed equispaziate di una quantità $\hbar\omega$, e date quindi dalla relazione $E_n = n\hbar\omega$, con n un intero positivo.

8 – Modello del medium Planck – Cosmic Background Planck (CBP)

Ipotizziamo che il medium Planck rappresenti un enorme heat bath Σ formato da un gas ideale, in cui si trova immerso un sistema S , che funge da termometro, a cui è permesso assorbire o cedere energia $\hbar\omega$, attraverso salti discreti con intensità costante, ovvero $n\hbar\omega$. Potrebbe trattarsi di un atomo che esegue la transizione $E_f - E_i = \hbar\omega_{if}$, dallo stato energetico finale E_f allo stato energetico iniziale E_i , o qualsiasi caso più generale. Chiameremo "oscillatore" un singolo componente del sistema S , che potrà effettuare un salto energetico quando raggiunge la temperatura empirica \mathcal{G} in grado di assorbire l'energia $\hbar\omega = k_B\mathcal{G}$. Inoltre, il sistema S , immerso nel heat bath a temperatura T_p , può assorbire energia senza alterare la temperatura del heat bath.

Poiché non abbiamo notizie su quale sia il numero di particelle che forma il sistema Σ , ci limiteremo a trattare una singola particella di Planck ed un singolo oscillatore. Per indicare ciò, ad ogni grandezza calcolata aggiungeremo il pedice "1".

Il sistema completo $\Sigma \cup S$ avrà energia totale $E_1 = E_\Sigma + E_S$, formata dalla energia cinetica del sistema Σ , ovvero della particella del medium Planck, $\frac{1}{2}K_B T_p = \frac{1}{2}\hbar\omega_p = \frac{1}{2}m_p c^2$, e dall'energia dell'oscillatore di S , $n\hbar\omega$, da cui

$$E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega_p + n\hbar\omega \quad (65)$$

con ω la frequenza caratteristica dell'oscillatore del sistema S .

Seguendo la trattazione standard, ricaviamo la funzione di partizione necessaria per ottenere le nostre informazioni, ricordando che $\beta = 1/(k_B T)$:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_p + n\beta\hbar\omega\right)\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_p\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n\beta\hbar\omega] \end{aligned} \quad (66)$$

Sappiamo che l'espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-(n)\beta\hbar\omega] = 1 + \exp[-\beta\hbar\omega] + \exp[-2\beta\hbar\omega] + \dots \quad (67)$$

è la somma infinita di una serie geometrica, con termine generale minore di 1, e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-(n)\beta\hbar\omega] = \frac{1}{1 - \exp[-\beta\hbar\omega]} \quad (68)$$

Pertanto la funzione di partizione assume la forma

$$Z_1 = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_p\right]}{1 - \exp[-\beta\hbar\omega]} \quad (69)$$

Per calcolare l'energia media ci avvaliamo della relazione termodinamica

$$U_1 = -\frac{\partial(\ln Z_1)}{\partial\beta} \quad (70)$$

Calcoliamo prima il logaritmo

$$\begin{aligned} \ln Z_1 &= \ln\left(\exp\left[-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_p\right]\right) - \ln(1 - \exp[-\beta\hbar\omega]) = \\ &= -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_p - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \end{aligned} \quad (71)$$

e facendone la derivata rispetto a β :

$$\frac{\partial(\ln Z_1)}{\partial\beta} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_p - \frac{-(-\hbar\omega)e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_p - \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (72)$$

si ottiene

$$U_1 = -\frac{\partial(\ln Z_1)}{\partial \beta} = -\left[-\frac{1}{2}\hbar\omega_p - \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right] \quad (73)$$

$$U_1 = \left[\underbrace{\frac{1}{2}\hbar\omega_p}_{\text{zero-point energy}} + \underbrace{\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}}_{\text{Planck energy}} \right] \quad (74)$$

Questa espressione è analoga alla seconda formula di Planck, in cui compare già la *zero point energy*. Ritornando alla notazione standard, otteniamo

$$U_1 = \left[\frac{1}{2}\hbar\omega_p + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \right] \quad (75)$$

Calcolare il limite $T \rightarrow 0$, significa che la temperatura dell'oscillatore di S non è in grado di ricevere l'energia necessaria per eseguire il salto energetico, poiché si trova nella condizione $k_B T \ll k_B \theta = \hbar\omega$, che non gli permette di

assorbire l'energia $k_B T = \hbar\omega$. Pertanto, per $k_B T \ll \hbar\omega$, il termine $e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \rightarrow \infty$, e la (75) diventa

$$U_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega_p = \frac{1}{2}k_B T_p = \frac{1}{2}m_p c^2 \quad \text{per } T \rightarrow 0 \quad (76)$$

Alle basse temperature, prossime allo zero assoluto esiste una *zero point energy* $\frac{1}{2}k_B T_p = \frac{1}{2}\hbar\omega_p = \frac{1}{2}m_p c^2$ per il sistema completo.

Per il calcolo dell'entropia del sistema complessivo ci avvaliamo della sua additività, cioè $S_1 = S_\Sigma + S_S$. Sappiamo che $S_\Sigma = k_B$, mentre per l'oscillatore del sistema S utilizziamo la relazione tra l'energia libera di Helmholtz, F , e l'entropia, a volume costante:

$$S_S = -\left(\frac{\partial F_S}{\partial T} \right)_V \quad (77)$$

Usiamo l'energia libera di Helmholtz

$$F_S = -k_B T \ln Z_S \quad (78)$$

e la (69) senza il termine in Σ :

$$Z_S = \frac{1}{1 - \exp[-\beta\hbar\omega]} \quad (79)$$

Quindi

$$\ln Z_S = -\ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \quad (80)$$

da cui

$$F_S = -k_B T \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) \right] \quad (81)$$

Facendone la derivata rispetto a T si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_S}{\partial T} &= k_B \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) + k_B T \frac{-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \left[\frac{\hbar\omega k_B}{(k_B T)^2} \right]}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \\ &= k_B \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) - k_B T \left[\frac{\hbar\omega k_B}{k_B^2 T^2} \right] \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = k_B \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) - k_B \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \end{aligned}$$

$$= k_B \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) - k_B \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{K_B T} \right)}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} = k_B \left[-\frac{\left(\frac{\hbar\omega}{K_B T} \right)}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} + \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) \right] \quad (82)$$

Quindi si ricava l'entropia

$$\begin{aligned} S_s &= -\left(\frac{\partial F_s}{\partial T} \right)_V = -k_B \left[-\frac{\left(\frac{\hbar\omega}{K_B T} \right)}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} + \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) \right] = \\ &= k_B \left[\frac{\left(\frac{\hbar\omega}{K_B T} \right)}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} - \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) \right] \end{aligned} \quad (83)$$

L'entropia di tutto il sistema vale:

$$S = k_B + k_B \left[\frac{\left(\frac{\hbar\omega}{K_B T} \right)}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} - \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right) \right] \quad (84)$$

Per studiare il comportamento dell'entropia, facciamo la sostituzione $x = \frac{\hbar\omega}{K_B T}$:

$$\begin{aligned} S &= k_B + k_B \left[\frac{x}{e^x - 1} - \ln(1 - e^{-x}) \right] = k_B + k_B \left[\frac{x}{e^x - 1} - \ln \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = \\ &= k_B + k_B \left[\frac{x}{(e^x - 1)} - \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) \right] \end{aligned} \quad (85)$$

Nel limite per $T \rightarrow 0$, come abbiamo discusso per l'energia, $x \rightarrow \infty$. Per il primo termine in parentesi, dato che si tratta di un rapporto tra infiniti ma con il denominatore di ordine maggiore rispetto al numeratore, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(e^x - 1)} = 0 \quad (86)$$

Per il secondo termine in parentesi, l'argomento del logaritmo è anche un rapporto tra infiniti, ma dello stesso ordine, quindi abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) \right] = \ln 1 = 0 \quad (87)$$

Pertanto nella (85) la parentesi scompare e rimane k_B :

$$S \rightarrow k_B \quad \text{per } T \rightarrow 0 \quad (88)$$

Questo risultato sembra in disaccordo con la terza legge della termodinamica (teorema del calore di Nernst). Nella letteratura scientifica, esistono tre interpretazioni della terza legge della termodinamica, due dovute a Nernst, ed una dovuta a Planck. L'enunciato di Planck afferma che quando la temperatura tende a zero, $T \rightarrow 0$, l'entropia di un qualsiasi sistema tende a zero, $S \rightarrow 0$. Questa è la formulazione attualmente accettata. Invece Nernst, nella sua prima enunciazione, ottenuta per ricavare il lavoro producibile in una reazione, dichiara che l'entropia di un sistema allo zero assoluto, $T \rightarrow 0$, è una costante universale, che si può assumere uguale a zero, $S \approx \text{cost} \approx 0$. Nella seconda enunciazione, che può sembrare differente dalla prima, Nernst afferma che è impossibile, attraverso un numero finito di trasformazioni, raggiungere la temperatura assoluta $T \approx 0$. Questa seconda formulazione di Nernst è molto più restrittiva e più calzante alla teoria termodinamica, in quanto supporta la seconda legge della termodinamica, soprattutto quando si interpreta l'entropia come la *degradazione dell'energia*, noto come principio di Kelvin.

Supponiamo di voler raffreddare un sistema termodinamico ad una temperatura più bassa della temperatura ambiente. Per ottenere questo raffreddamento, chiaramente dovremmo isolare il sistema dall'ambiente circostante,

altrimenti il calore fluirebbe in modo naturale dall'ambiente verso il sistema. Pertanto è necessaria una trasformazione adiabatica. Ma le trasformazioni adiabatiche sono anche isoentropiche, e quindi l'entropia deve rimanere costante durante la trasformazione. Dato che l'entropia è diversa da zero all'inizio, non può essere zero alla fine della trasformazione, mostrando che lo zero assoluto non è ottenibile.

Inoltre, una macchina che sfruttasse un ciclo di Carnot, da un serbatoio ad una temperatura alta T_H ad un serbatoio alla temperatura zero, trasformerebbe tutto il calore in lavoro, diventando un moto perpetuo di prima specie, il che è impossibile.

9 – Discussione

10 - Conclusione

Reference

[1] G. Azzarello - *Symmetric Theory: Planck's Particle*. Open Access Library Journal, 4:e3554 (2017). <https://doi.org/10.4236/oalib.1103554>