

# Die Formale Grundlage eines Quaternionischen Raum-Zeit-Kalküls

Teil A

Carsten S.P. Spanheimer  
*carsten.spanheimer@student.uni-tuebingen.de*

CC-by-nd-sa

17. April 2016

cspan.  
wordpress.  
com/?p=107



## Zusammenfassung

Die Einführung ‚quaternionischer Differentialformen‘ auf dem Tangentialraum einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit ergibt ein vielversprechendes mathematisches System zur Beschreibung unserer physikalischen (3+1)-Raumzeit schon mit einem Minimum von Grundannahmen.

Hier wird die Grundlage dieses Modells einer ‚Quaternionischen Raumzeit‘ dargestellt.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Situation . . . . .	2
1.2	Motivation . . . . .	3
1.3	Methodologische Vorbemerkungen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Differentialgeometrischer Ansatz</b>	<b>5</b>
2.1	Tangentialbündel auf einer Raumzeit-Mannigfaltigkeit . . . . .	5
2.2	Die Reellen <i>Lorentz</i> -Transformationen . . . . .	7
2.3	Die Anisometrischen Transformationen . . . . .	7
2.4	Geschlossenheit der Integrale und Konsequenzen . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Skaleninvarianz</b>	<b>8</b>
3.1	Reellwertige Exponentialmatrizen . . . . .	9
3.2	Eine Erzeugende Logarithmische Raumzeit . . . . .	10
3.3	Forderung nach Logarithmischer Quellenfreiheit . . . . .	10

1	<i>EINLEITUNG</i>	2
4	<b>Eine Quaternionische Raumzeit</b>	<b>12</b>
4.1	Eine Quaternionische Basis . . . . .	12
4.2	Quaternionische Morphismen . . . . .	13
4.3	Quaternionische Linearformen . . . . .	13
4.4	Die Quaternionischen <i>Lorentz</i> -Transformationen . . . . .	14
4.5	Quaternionische Integration . . . . .	14
4.6	Quaternionische Exponentialmatrizen . . . . .	15
4.7	Die Logarithmischen Quaternionischen <i>Lorentz</i> -Transformationen . . . . .	16
4.8	Die Logarithmischen Anisometrischen Transformationen . . . . .	16
5	<b>Quaternionische ‚Differentialformen‘</b>	<b>17</b>
5.1	Quaternionische 2-Formen . . . . .	18
5.2	Ableitungen der 2. Stufe und Inertialsysteme . . . . .	19
5.3	Ableitungen der 3. Stufe und Beschleunigung . . . . .	23

## Vorwort

Die vorliegende Darstellung richtet sich vorwiegend an Studenten der Physik, Mathematik und insbesondere der Mathematischen Physik, aber auch an jedes andere Publikum, welches daraus etwas für sich gewinnen kann. Dazu sei jeder Leser ermutigt, getrost Passagen zu überspringen, die für den persönlichen Erkenntnisgewinn als unwesentlich erscheinen mögen.

Zum vollen Verständnis vorausgesetzt werden Kenntnisse in Analysis, Differentialgeometrie und der Speziellen Relativitätstheorie (SRT). Kenntnisse der orthodoxen Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) sind jedoch weder erforderlich noch hilfreich.

## 1 Einleitung

### 1.1 Situation

Die klassische elektromagnetische Feldtheorie und die Newtonsche Gravitation werden beschrieben durch skalar-, vektor- und tensorwertige Funktionen, sei es auf einem euklidischen flachen Raum mit gleichförmigem Zeitverlauf oder auf einer *Minkowski*-flachen Raumzeit. In beiden Fällen werden Raum und Zeit als eine flache Mannigfaltigkeit angenommen, was es immerhin vereinfacht, Verschiebungen entlang der Raum- und Zeit-Koordinaten vorzunehmen.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) wird die flache Raumzeit ersetzt durch den differentialgeometrischen Ansatz einer Raumzeit-Mannigfaltigkeit, sodass das Gravitationsfeld auf dem Tangentialbündel angesiedelt ist und die Mannigfaltigkeit durch das Gravitationsfeld selbst verzerrt wird. Der Preis dafür ist, dass selbst ‚gerade Linien‘ nur durch Integration unendlich vieler unendlich kleiner Wegschritte verfolgt werden können.

Elektromagnetische Felder werden immer noch als ein separates Vektorbündel auf der Raumzeit-Mannigfaltigkeit betrachtet. *Einstein, Hilbert, Weyl, Lanczos* und andere hatten bereits versucht, die elektromagnetische Theorie im Tangentialbündel aufzufinden.

## 1.2 Motivation

Gesucht wird eine umfassende Theorie der grundlegenden physikalischen Phänomene, das sind Kraftfelder, Wellen, Elementarteilchen bis hin zu Atomen und Molekülen, also eine gemeinsame Grundlage für die Bereiche der klassischen Feldtheorien, der Kern- und Teilchenphysik und der Quantenmechanik, sowie ein Stück weit der Atom- und Molekülphysik. Für die darauf aufbauenden höheren Beschreibungsebenen unserer Welt könnten wir diese Theorie dann getrost wieder entlassen.

Der vorliegende Ansatz zielt darauf ab, eine Vereinigung zwischen Gravitation und Elektromagnetismus herzustellen auf der Grundlage einer Differentialgeometrie, die der orthodoxen ART entspricht, aber nicht mit ihr konform geht.

Die zugrundeliegende Vorstellung ist eine reine Raum-Ontologie. Es wird vorausgesetzt, dass nichts existiert außer Raum(-Zeit) und dass Felder, Wellen und Teilchen daher Merkmale der Raumzeit selbst sein müssen.

Damit wird auch der Begriff der Raumzeit aufgewertet. Aus der Rolle einer bloßen Bühne des Geschehens erhebt sie sich zum eigentlichen und einzigen Akteur auf der Bühne, die sie selbst bietet.

Eine primäre Ontologie auf einer einfach zusammenhängenden Raumzeit sollte Gravitations- und elektromagnetische Felder hervorbringen sowie Wellenerscheinungen.

In einer sekundären Ontologie könnten Teilchen als ‚topologische Zentren‘ auftreten und mögliche ‚topologische Adhäsionskräfte‘ mit den Kernkräften identifiziert werden.

## 1.3 Methodologische Vorbemerkungen

### Physik und Mathematik

Physiker suchen nach Regelmäßigkeiten in der materiellen Natur, das sind logische Beziehungen, die sich formal beschreiben lassen. Unsere Sprache der formalen logischen Beschreibung ist die Mathematik, und daher ist es keineswegs verwunderlich, dass das, was logisch beschreibbar ist, durch Mathematik beschrieben werden kann.

Wenn also der logisch erfassbare Anteil unserer Naturbeobachtungen durch Mathematik beschrieben werden kann, dann sollten wir doch auch umgekehrt die Mathematik fragen können, welche logischen Zusammenhänge in der Physik zu erwarten wären, um diese dann mit unseren empirisch gewonnenen Erkenntnissen zu vergleichen.

Wenn die materielle Grundlage unserer Welt rational erfassbar sein sollte, dann müsste sie doch schon aus der Mathematik alleine erstehen.

## **Erfindung vs. Entdeckung**

Es ist ein Unterschied, ob man Mathematik bloß als Werkzeugkasten zur systematischen Konstruktion von Modellen versteht, oder ob man untersucht, was ‚die Mathematik‘ aus sich selbst heraus zu erzeugen in der Lage ist.

Das ist der Unterschied zwischen Ingenieurskunst und Detektivarbeit. Ein forensischer Ermittler würde auch nicht seine Evidenzen selbst schaffen, denn damit würde er nur verschleiern, welche Evidenzen tatsächlich vorliegen.

Es geht darum, die notwendigen mathematischen Strukturen zu entdecken, und nicht darum, welche zu erfinden.

## **Vorgehen**

Man beginne mit einem durch seine Einfachheit möglichst weit gefassten mathematischen Modell, und beschränke dann dessen ‚Beweglichkeit‘ durch möglichst wenige möglichst effektive und möglichst vernünftig erscheinende einschränkende Annahmen.

Eine Freiheit, die immer offensteht, ist, ohne Beschränkung der Allgemeinheit beliebig die Betrachtungsweise auf das Modell zu verändern, um Sachverhalte zu erkennen, die durch den jeweiligen Standpunkt sichtbar werden. Das ist ein entscheidendes Hilfsmittel zum Auffinden von Zusammenhängen.

Diese Vorgehensweise steht im Gegensatz dazu, ein Modell durch erweiternde Annahmen in seiner Bewegungsfreiheit so zu erweitern, wie sie der Ingenieur jeweils gerne hätte, um damit die empirischen Beobachtungen nachzubilden.

Die Methode der Erweiterung eines Modells wird nie zu einem Ende kommen müssen. Im Gegensatz dazu wird die Methode der Einschränkung bald zu einem Punkt kommen, an dem das Modell zu unbeweglich geworden ist. Der Raum der möglichen Kombinationen einschränkender Annahmen kann daher mit endlichem Aufwand erschöpfend abgesucht werden.

## **Risiko**

Das birgt allerdings das ‚Risiko‘, nach dem Ausschöpfen aller denkbaren Kombinationen von Einschränkungen des Modells nun doch kein Abbild der physikalischen Realität in der Mathematik zu finden.

Man setzt damit gewissermaßen alles auf eine Karte und ergibt sich der Möglichkeit, dass die Hoffnung auf eine realistisch-mathematische Beschreibung der Welt endgültig zunichte wird. Dann aber hätte man erschöpfend gesucht und immerhin die Erkenntnis gewonnen, dass die Physik tatsächlich nicht realistisch beschreibbar wäre.

Dieses Risiko geht ein ‚Ingenieur‘ der theoretischen Physik und auch der Mathematik nicht ein. Sarkastisch ausgedrückt sichert ihm die prinzipielle Unerschöpflichkeit der additiven Vorgehensweise sein Brot für alle Ewigkeit.

**Ausblick**

Wir werden aber sehen, dass die ersten Schritte auf dem Weg der Einschränkung bereits an unsere physikalische Realität herankommen. So kann die SRT sofort aufgefunden werden. Die *Minkowski*-Metrik entsteht von selbst auf einer quaternionischen Raumzeit und die Äquivalenz von Gravitation und Beschleunigung wird ersichtlich.

Erst wenn die weitere Erforschung dieses mathematischen Systems Abweichungen von der physikalischen Realität zeigt, so könnte man erwägen, Einschränkungen zu lockern oder schlimmstenfalls Erweiterungen hinzuzufügen, parallel zur Einsicht, inwieweit die physikalische Realität Erweiterungen enthalten muss.

Zunächst sollte der Raum der Möglichkeiten auf minimalistische Weise ausgeschöpft werden. Falls dennoch alle Bemühungen scheitern sollten, auf diesem Wege eine physikalische Theorie zu finden, so hat man immerhin ein interessantes spezielles mathematisches System untersucht.

**2 Differentialgeometrischer Ansatz****2.1 Tangentialbündel auf einer Raumzeit-Mannigfaltigkeit**

Die vierdimensionale Raumzeit wird aufgefasst als eine glatte Mannigfaltigkeit  $M$  (womöglich sogar kompakt und ohne Rand).

Zu jedem Punkt („Ereignis“)  $p \in M$  sei der Tangentialraum  $T_pM$  wohldefiniert. Die lokale Trivialisierung  $K^4$  über einem noch näher zu bezeichnenden Körper  $K$ , im einfachsten Fall  $K = \mathbb{R}$ .

**Ein Beobachter**

Es existiere eine Kartenabbildung auf einem Gebiet  $U \subseteq M$ ,

$$\varphi : T_pU \in C^\infty(M) \rightarrow K^n,$$

die einem Beobachter am Punkt  $p$  eine Koordinate  $\in \mathbb{K}^4$  zuweist.

**Mehrere Beobachter**

Zwei Beobachter in demselben Gebiet an den Punkten  $p, q$ . Ihre lokalen Kartenabbildungen  $\varphi_p, \varphi_q$  liefern deren jeweilige Koordinaten in Raum und Zeit.

Die Koordinaten der beiden Beobachter müssen zusammenpassen, das heißt, wenn wir die beiden Beobachter an einem Punkt zusammenführen, indem wir die Ableitungen ihrer Kartenabbildungen entlang von beliebigen Wegen aufintegrieren, so müssen wir auf denselben Wert für die Koordinate kommen,

$$p = q \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(p) = \varphi(q).$$

Das lässt sich am Besten sicherstellen, indem wir davon ausgehen, dass die beiden Beobachter ursprünglich dieselbe Position einnehmen und dann voneinander wegintegriert werden.

### Positions-Eichung, Zusammengeführte Beobachter

Wir nehmen die Sichtweise eines Beobachters ein, der seinen eigenen Zustand auf den eines anderen Beobachters am selben Punkt in Raum und Zeit bezieht. Der Positionsunterschied ist damit zunächst ‚hinweggeeicht‘.

Dann betrachten wir das Bezugssystem des anderen ‚Beobachters‘ als das Koordinatensystem, auf das wir uns beziehen. Ein Diffeomorphismus des Koordinatenübergangs,

$$\Phi : T_p M \rightarrow T_q M, \quad \Phi := \varphi(p) \circ \varphi(q)^{-1},$$

macht uns kartenunabhängig. Die Existenz einer absolut gegebenen Karte wird dann nicht mehr vorausgesetzt.

Wenn wir uns später vom Koordinatenursprung in alle Richtungen ‚wegintegrieren‘, so bauen wir dadurch überhaupt erst eine Karte auf. Daher können wir den Koordinatenübergangs-Diffeomorphismus getrost wieder als ‚Koordinatenfunktion‘ bezeichnen und bezeichnen ihn neu und in Indexschreibweise,

$$J^a(p) := \Phi.$$

Der Tensor der ersten Ableitungen bildet eine *Jacobi*-Matrix. Diese enthält in nullter Näherung den inertialen Orientierungs- und Bewegungszustand des Beobachters.

$$J^a_b(p) := \partial_b J^a(p) = DT\varphi(p).$$

Zwischen diesen beiden Beobachtern gilt als Isometrie die (endliche) *Lorentz*<sup>1</sup>-Transformation, das ist der *Lorentz*-Boost für die Bewegung der Beobachter gegeneinander (in genau dem Moment, wenn sich ihre Bahnen schneiden), sowie die statische Verdrehung ihrer ‚Kamera-Positionen‘ gegeneinander.

Immer noch können alle weiteren Ableitungen beliebige Werte annehmen.

### Subjektiver Beobachter

Für lokal identische Geschwindigkeit und gleiche Orientierung ist die *Jacobi*-Matrix lokal identisch mit der Einheitsmatrix, doch ihre weiteren Ableitungen müssen noch nicht verschwinden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei in einer infinitesimalen Umgebung von  $p$  die Kartenabbildung gleich der Identität,

$$T_p\varphi = T_p M.$$

Dann ist die *Jacobi*-Matrix der Kartenabbildung dort die Einheitsmatrix,

$$DT_p\varphi = \mathbb{1}_4,$$

doch immer noch können die weiteren Ableitungen endlich sein.

Dies entspricht der Situation eines Beobachters, der im Begriff ist, seinen Orientierungs- oder Bewegungs- und Verzerrungszustand zu verändern gegenüber einem hypothetischen Beobachter an demselben Punkt, welcher denselben Zustand beibehält.

---

<sup>1</sup>Hendrik Lorentz, 1853-1928

## 2.2 Die Reellen *Lorentz*-Transformationen

In der *Jacobi*-Matrix können allgemeine *Lorentz*-Transformationen dargestellt werden, das sind eine Geschwindigkeits-Transformation um  $\vec{v}$  und eine statische Rotation um  $\vec{\varrho}$ . Die reellwertige Matrixdarstellung der allgemeinen *Lorentz*-Transformation ist allgemein bekannt und wird hier beispielhaft illustriert.

Sei eine gleichförmige Bewegung in  $x$ -Richtung gegeben mit der Geschwindigkeit  $v_x$ , daraus  $\beta_x := v_x/c_0$ ,  $\gamma := 1/\sqrt{1-\beta_x^2}$ , daraus die Rapidity (rapidity)  $\nu_x := \operatorname{artanh}(\beta_x)$ , sodass  $\cosh(\nu_x) = \gamma$  und  $\sinh(\nu_x) = \beta_x\gamma$ . Außerdem sei das System rotiert in der  $(y,z)$ -Ebene um den Winkel  $\varrho_x$ .

Die reellwertige *Jacobi*-Matrix,

$$\mathbb{R} J_b^a = \left[ \begin{array}{c|cc} \cosh(\nu_x) & -\sinh(\nu_x) & \cdot & \cdot \\ -\sinh(\nu_x) & \cosh(\nu_x) & & \\ \cdot & & \cos(\varrho_x) & -\sin(\varrho_x) \\ \cdot & & +\sin(\varrho_x) & \cos(\varrho_x) \end{array} \right],$$

ermöglicht die Transformation eines Vierervektors in einem reellwertigen Kontext, zum Beispiel,

$$\begin{pmatrix} \cosh(\nu_x) d - \sinh(\nu_x) a \\ -\sinh(\nu_x) d + \cosh(\nu_x) a \\ \cos(\varrho_x) b - \sin(\varrho_x) c \\ \sin(\varrho_x) b + \cos(\varrho_x) c \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \cosh(\nu_x) & -\sinh(\nu_x) & \cdot & \cdot \\ -\sinh(\nu_x) & \cosh(\nu_x) & & \\ \cdot & & \cos(\varrho_x) & -\sin(\varrho_x) \\ \cdot & & +\sin(\varrho_x) & \cos(\varrho_x) \end{array} \right] \begin{pmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

In der reellen Darstellung wird zur Bildung des metrischen Tensors die *Minkowski*-Metrik als künstlicher Zusatz eingeführt.

Der metrische Tensor der allgemeinen *Lorentz*-Transformationen ist daher konstant die *Minkowski*-Metrik und der Betrag der Funktionaldeterminante ist konstant Eins,

$$\mathbb{R} g_{\mu\nu} = \mathbb{R} J_{\mu}^{\eta} \mathbb{R} J_{\nu}^{\eta} \eta_{\eta\eta} = \eta_{\eta\eta}, \quad \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = \det(\mathbb{R} J_b^a) = 1.$$

Somit stellen die allgemeinen *Lorentz*-Transformationen Isometrien der Raumzeit dar.

## 2.3 Die Anisometrischen Transformationen

Neben den isometrischen *Lorentz*-Transformationen besteht in den Diagonalelementen der *Jacobi*-Matrix die Möglichkeit zur Darstellung von anisometrische Transformationen, die den Raum entweder isotrop ‚aufblähen‘ oder anisotrop in eine Richtung verzerren, hier am Beispiel einer Verlängerung in  $x$ -Richtung. Damit die Funktionaldeterminante unverändert bleibt, tritt gleichzeitig eine kompensierende Zeitdilatation auf,

$$\mathbb{R} J_b^a = \left[ \begin{array}{c|ccc} \exp(\chi) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \exp(-\chi) & & \\ \cdot & & 1 & \\ \cdot & & & 1 \end{array} \right].$$

Der dazugehörige metrische Tensor ist dann

$${}^{\mathbb{R}}g_{\mu\nu} = {}^{\mathbb{R}}J^{\eta}_{\mu} {}^{\mathbb{R}}J^{\eta}_{\nu} \eta_{\eta\eta} = \left[ \begin{array}{c|ccc} +\exp(2\chi) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\exp(-2\chi) & & \\ \cdot & & -1 & \\ \cdot & & & -1 \end{array} \right].$$

In diesem Fall ist der metrische Tensor nicht mehr identisch mit der flachen *Minkowski*-Metrik.

## 2.4 Geschlossenheit der Integrale und Konsequenzen

Wenn wir mit Hilfe der Metrik den ersten Index der *Jacobi*-Matrix herunterziehen, sollten wir eine integrierbare 2-Form erhalten. Es wird gefordert, dass die Koordinaten-1-Form, die wir durch einmaliges Integrieren erhalten, geschlossen sein soll, also die 2-Form zweimal integrierbar ist bis hin zu einer skalaren Potential-0-Form.

Da die erhaltene doppelt-kovariante Matrix voll antisymmetrisch ist (wie auch der elektromagnetische *Faraday*-Tensor), würde man typischerweise alternierende Differentialformen verwenden. Dieser Kalkül würde aber nicht die anisometrische Verzerrung berücksichtigen. Außerdem wäre das wieder ein künstlich eingeführter Mechanismus.

Das Problem der Integrierbarkeit wird weiter unten auf andere Weise gelöst werden, nämlich durch die Einführung einer quaternionischen Algebra. Dass diese Wahl weder willkürlich noch speziell ist, soll im Folgenden entwickelt werden.

## 3 Skaleninvarianz

Um zu erläutern, was hier mit ‚Skaleninvarianz‘ gemeint ist, wärmen wir uns auf mit einem eindimensionalen Modell. Ein Automorphismus im Reellen,

$$L \in C^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto L(x)$$

sei wenigstens einmal differenzierbar,

$$L'(x) = \partial_x L.$$

Davon betrachten wir die Exponentialfunktion,

$$E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad x \mapsto E(x) = e^{L(x)},$$

und die Gesamtableitung ist proportional zum Exponential,

$$E'(x) = L'(x) e^{L(x)} = L'(x) E(x),$$

sodass die Ableitung der inneren Funktion als Quotient geschrieben werden kann,

$$L'(x) = \frac{E'(x)}{E(x)}.$$



Skalieren wir zusätzlich  $\alpha E(x)$  mit einem konstanten Faktor  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so können wir einen Zyklus von Ableitung, Division, Integration und Exponentiation durchlaufen,

$$\begin{array}{ccc} L(x) + c & \xrightarrow{\text{exp}} & \alpha E(x) = e^{L(x)+c} = \alpha e^{L(x)} \quad (\text{mit } \alpha := e^c) \\ \int d_{x+c} \uparrow & & \downarrow \partial_x \\ L'(x) = \frac{\alpha E'(x)}{\alpha E(x)} & \xleftarrow{1/\alpha E(x)} & \alpha E'(x) = L'(x) \alpha e^{L(x)}, \end{array} \quad (1)$$

und dabei beobachten, dass  $L'(x)$  den Skalenfaktor  $\alpha = e^c$  schon nicht mehr enthält, welcher so beliebig ist wie die additive Integrationskonstante  $c$ . Das ist die Bedeutung von ‘Skaleninvarianz’, wie wir sie hier verwenden werden.

Anders betrachtet ist  $L'(x) = E'(x)/E(x)$  die Ableitung von  $\log(E(x))$  und lebt in einem ‘logarithmischen Raum’, sodass Multiplikation in  $E(x)$  durch die Addition von Logarithmen dargestellt werden kann,  $E_1(x) \cdot E_2(x) = \exp(L_1(x) + L_2(x))$ , wobei  $E_1(x) = \exp(L_1(x))$ ,  $E_2(x) = \exp(L_2(x))$ .

### 3.1 Reellwertige Exponentialmatrizen

Die Exponentiation eines Automorphismus wird definiert durch die entsprechende Potenzreihe, sodass eine beliebige reelle quadratische Transformationsmatrix  $\mathbf{L}$  abgebildet wird auf eine andere reelle quadratische Transformationsmatrix  $\mathbf{E}$  mit positiv-definitiver Determinante,

$$\mathbf{E} = \exp(\mathbf{L}) := \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \mathbf{L}^k, \quad \det(\mathbf{E}) > 0,$$

wobei  $\mathbb{1}$  die Einheitsmatrix darstellt.

Konkrete Standardlösungen für die Matrix-Exponentiation lassen sich leicht angeben.

Das Exponential einer Nullmatrix ist die Identität, hier in 2D,

$$\begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{exp}} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

Der Logarithmus einer rein diagonalen Submatrix ist wieder eine Diagonalmatrix, und die Exponentiation wird einfach komponentenweise durchgeführt,

$$\begin{bmatrix} d & \\ & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{exp}} \begin{bmatrix} e^d & \\ & e^a \end{bmatrix}.$$

Das Exponential einer symmetrischen Submatrix ist wieder eine symmetrische Submatrix, welche eine hyperbolische Rotation beschreibt,

$$\begin{bmatrix} \cdot & \nu \\ \nu & \cdot \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{exp}} \begin{bmatrix} \cosh(\nu) & \sinh(\nu) \\ \sinh(\nu) & \cosh(\nu) \end{bmatrix}.$$

Das Exponential einer antisymmetrischen Submatrix ist eine orthogonale Submatrix, welche eine zyklische Rotation beschreibt,

$$\begin{bmatrix} \cdot & -\varrho \\ \varrho & \cdot \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{exp}} \begin{bmatrix} \cos(\varrho) & -\sin(\varrho) \\ \sin(\varrho) & \cos(\varrho) \end{bmatrix}.$$

### Spur zu Determinante

Die Determinante der Exponentialmatrix ist das Exponential der Spur der logarithmischen Matrix,

$$\det(E^a_b) = \exp(L^a_a).$$

### Addition zu Multiplikation

Nun könnten wir die Multiplikation von Exponentialmatrizen ausdrücken durch die Addition ihrer Logarithmen,

$$\exp(\mathbf{A}) \cdot \exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}),$$

doch während die Addition von (logarithmischen) Matrizen grundsätzlich kommutiert,  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ , ist die Multiplikation von (exponentiellen) Matrizen im allgemeinen nicht kommutativ,  $\exp(\mathbf{A}) \cdot \exp(\mathbf{B}) \neq \exp(\mathbf{B}) \cdot \exp(\mathbf{A})$ .

Die Multiplikation von Morphismen lässt sich nur dann durch eine Addition von erzeugenden Logarithmen ausdrücken, wenn

- die zu multiplizierenden Exponentialmatrizen im speziellen Fall kommutieren, oder
- die logarithmischen Matrizen nur unendlich gering verschieden sind von der Nullmatrix und damit die Exponentialmatrizen unendlich nahe bei der Einheitsmatrix (Identität) liegen.

**Theorem.** *Matrizenmultiplikation kommutiert im Grenzfall der Identität und kann dann dargestellt werden als das Exponential der Summe von logarithmischen Matrizen nahe der Nullmatrix.*

Insbesondere ist die Exponentialfunktion transparent gegenüber Basiswechseln,

$$\exp(B^a_b A^b_c B^c_d) = B^a_b \exp(A^b_c) B^c_d.$$

$$\exp(B^a_\circ A^\bullet_\circ B^\bullet_b) = B^a_\circ \exp(A^\bullet_\circ) B^\bullet_b.$$

## 3.2 Eine Erzeugende Logarithmische Raumzeit

Die infinitesimale Einbettungsmatrix kann logarithmiert werden. In der Tat können wir sie allgemein als das Exponential einer logarithmischen Einbettung darstellen.

## 3.3 Forderung nach Logarithmischer Quellenfreiheit

Nun nehmen wir die Forderung hinzu, dass die Spur der logarithmischen *Jacobi*-Matrix identisch verschwindet,

$$\Gamma_{\delta\delta} \delta^{\delta\delta} = 0,$$

was man als 4-dimensionale Quellenfreiheit im ‚logarithmischen Raum‘ verstehen kann.

### Imaginäre Einheiten

Noch wurde keine Einschränkung ausgesprochen, dass die Einträge von Tensoren reell sein müssten. So suchen wir nach imaginären Einheiten mit möglichen Rechenregeln.

Die Spur sollte eine 1-dimensionale Größe sein, das heißt, dass die Diagonalelemente einer Matrix linear abhängig sein sollen, denn sonst würde die Bedingung der verschwindenden Spur zerfallen in mehrere unabhängige Gleichungen, die gleichzeitig zu null werden. Schlimmstenfalls müssten alle Diagonalelemente identisch verschwinden. Dann aber wäre keine anisotrope Verzerrung mehr darstellbar.

So lässt sich finden, dass nur Einheiten mit den Regeln der komplexen imaginären Einheit,  $i^2 = -1$ , verwendbar sein können.

Mit einer einzigen imaginären Einheit sowie der reellen Eins können wir nun eine komplexe (1 + 1)–Raumzeit in 2 Dimensionen aufbauen, mit der Basis  $\{1, i\}$ . Das kann als ein 1-dimensionaler Raum mit Zeitentwicklung aufgefasst werden. Der Imaginärteil entspricht der Raumdimension, der Realteil entspricht der Zeitentwicklung, und wir werden einen eindimensionalen *Lorentz-Boost* darauf formulieren können.

Das ist zwar schon sehr schön, doch zur Beschreibung unserer physikalischen (1 + 3)–Raumzeit reicht das noch nicht aus.

### Quaternionische Einheiten und Fernere Kandidaten

Wir könnten dieselbe imaginäre Einheit allen anderen Raumrichtungen zuweisen, aber was wir brauchen, ist eine Antikommutativität zwischen den Raumdimensionen. Genau diese wird durch die quaternionischen Einheiten  $\{1, i, j, k\}$  eingeführt.

Die quaternionischen Einheiten wurden 1843 durch *William Hamilton* entdeckt, welcher auch Namensgeber für den *Hamilton-Formalismus* in der analytischen Mechanik und den *Hamilton-Operator* in der Quantenmechanik ist. Er hatte nach einem Zahlenkörper gesucht, der analog zu den komplexen Zahlen, mit ihren 2 Komponenten, auch mit 3 Komponenten funktioniert und herausgefunden, dass das erst wieder mit 4 Komponenten möglich ist. Allerdings ist die Multiplikation auf Quaternionen nicht mehr streng kommutativ.

Daraus hatte *Hamilton* die quaternionischen Zahlen ‚gemacht‘. Wir verwenden hier seine quaternionischen Einheiten, aber rechnen damit auf andere Weise.

Weitere Kandidaten wären die höheren *Cayley-Zahlen* in 8, 16, 32, usw... Komponenten, bei denen jedoch selbst die Assoziativität der Multiplikation nicht mehr gegeben ist. Darum werden diese hier nicht weiter untersucht.

## 4 Eine Quaternionische Raumzeit

### Quaternionische Einheiten

Die vier quaternionischen Einheiten  $\{1, i, j, k\}$  umfassen zusätzlich zur reellen Eins die drei quaternionischen imaginären Einheiten  $\{i, j, k\}$ , für die jeweils, analog zur komplexen imaginären Einheit  $i$ , gelten

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (2)$$

doch mit den drei zusätzlichen Multiplikationsregeln (von denen jede Einzelne schon aus den beiden anderen folgt),

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \quad (\text{forward cyclic permutation}). \quad (3)$$

Im folgenden gelten die Konventionen

$$\bar{i} := \frac{1}{i} = -i, \quad \bar{j} := \frac{1}{j} = -j, \quad \bar{k} := \frac{1}{k} = -k.$$

Aus (2) und (3) folgen die Korollare

$$\begin{aligned} ji &= \bar{k}, \quad kj = \bar{i}, \quad ik = \bar{j}, \quad (\text{reverse cyclic permutation}) \\ ijk &= jki = kji = -1, \\ kji &= jik = ikj = +1, \\ \alpha\beta\alpha &= +\beta \quad \text{with } \alpha, \beta \in \{i, j, k\}, \\ \alpha\alpha\beta &= \beta\alpha\alpha = -\beta \quad \text{with } \alpha \in \{i, j, k\}, \beta \in \{1, i, j, k\}. \end{aligned}$$

Die 3 quaternionischen Imaginärteile erzeugen zusammen das Kreuzprodukt von dreidimensionalen Vektoren.

### 4.1 Eine Quaternionische Basis

Wir definieren eine quaternionische Basisvektormatrix und ihre Inverse,

$$\mathbb{H} B := \mathbb{H} B^a_b = \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & i & & \\ & & j & \\ & & & k \end{array} \right], \quad \bar{\mathbb{H}} B := \mathbb{H} B^{-1} = \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & \bar{i} & & \\ & & \bar{j} & \\ & & & \bar{k} \end{array} \right].$$

Jede dieser beiden zueinander Inversen ist ihre eigene Transponierte und gleichzeitig die quaternionisch-Konjugierte der anderen,

$$\mathbb{H} B^T = \mathbb{H} B = \mathbb{H} B^*, \quad \bar{\mathbb{H}} B^T = \bar{\mathbb{H}} B = \bar{\mathbb{H}} B^*,$$

und beide Morphismen erzeugen, jeder für sich, dieselbe *Minkowski*-Metrik,

$${}^{\mathbb{H}}B^T {}^{\mathbb{H}}B = {}^{\mathbb{H}}\bar{B}^T {}^{\mathbb{H}}\bar{B} = \left[ \begin{array}{c|cc} + & & \\ \hline & - & \\ & & - \end{array} \right].$$

### Quaternionischer Basiswechsel

Ein quaternionischer Basiswechsel konvertiert zwischen einem reellwertigen Vektor  $V$  und dem entsprechenden quaternionischen Vektor,

$${}^{\mathbb{H}}V = {}^{\mathbb{H}}B {}^{\mathbb{R}}V, \quad {}^{\mathbb{R}}V = {}^{\mathbb{H}}\bar{B} {}^{\mathbb{H}}V.$$

### 4.2 Quaternionische Morphismen

Nehmen wir eine reellwertige Transformationsmatrix  $M$ , die einen reellwertigen Vektor in einen anderen überführt,

$${}^{\mathbb{R}}W = M {}^{\mathbb{R}}V,$$

Um einen quaternionischen Vektor als Argument einsetzen zu können, fügen wir eine Identität ein,

$${}^{\mathbb{R}}W = M {}^{\mathbb{R}}B {}^{\mathbb{H}}B {}^{\mathbb{H}}V = M {}^{\mathbb{H}}B {}^{\mathbb{H}}V,$$

und konvertieren auch das Ergebnis zu einem quaternionischen Vektor,

$${}^{\mathbb{H}}W = {}^{\mathbb{H}}B {}^{\mathbb{R}}B {}^{\mathbb{H}}V = ({}^{\mathbb{H}}B {}^{\mathbb{R}}B) {}^{\mathbb{H}}V =: M {}^{\mathbb{H}}V.$$

Damit definieren wir eine quaternionische Transformationsmatrix,  $M$ . Der quaternionische Basiswechsel stellt einen Isomorphismus her zwischen der reellwertigen Matrix,  $M$ , und der zugehörigen quaternionischen Darstellung  $M$ ,

$$M = B M B = \bar{B} M \bar{B} \Leftrightarrow M = \bar{B} M B = B M \bar{B}.$$

### 4.3 Quaternionische Linearformen

Der quaternionische metrische Tensor,

$$G = M^T M = (B M^T \bar{B}) (B M \bar{B}) = B (M^T M) \bar{B} = B G \bar{B},$$

ist für allgemeine *Lorentz*-Transformationen flach. Die flache Metrik ist in der quaternionischen Darstellung nicht die *Minkowski*-Metrik, sondern die *euklidische* Einheitsmetrik.

#### 4.4 Die Quaternionischen *Lorentz*-Transformationen

$${}^{\mathbb{H}}J^a_b = \left[ \begin{array}{c|cc} \cosh(\nu_x) & i \sinh(\nu_x) & \cdot & \cdot \\ \bar{i} \sinh(\nu_x) & \cosh(\nu_x) & & \\ \cdot & & \cos(\varrho_x) & i \sin(\varrho_x) \\ \cdot & & i \sin(\varrho_x) & \cos(\varrho_x) \end{array} \right].$$

Die hyperbolische Rotation ist, obwohl antisymmetrisch, immer noch selbstadjungiert, und die zyklische Rotation ist, obwohl symmetrisch, immer noch anti-selbstadjungiert,

$$\begin{pmatrix} (\cosh(\nu_x) d - \sinh(\nu_x) a) \\ i(-\sinh(\nu_x) d + \cosh(\nu_x) a) \\ j(\cos(\varrho_x) b - \sin(\varrho_x) c) \\ k(\sin(\varrho_x) b + \cos(\varrho_x) c) \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \cosh(\nu_x) & i \sinh(\nu_x) & \cdot & \cdot \\ \bar{i} \sinh(\nu_x) & \cosh(\nu_x) & & \\ \cdot & & \cos(\varrho_x) & i \sin(\varrho_x) \\ \cdot & & i \sin(\varrho_x) & \cos(\varrho_x) \end{array} \right] \begin{pmatrix} d \\ i a \\ j b \\ k c \end{pmatrix}.$$

In der quaternionischen Darstellung ist der metrische Tensor konstant die Einheitsmatrix und die Funktionaldeterminante ist konstant Eins,

$${}^{\mathbb{H}}g_{\mu\nu} = {}^{\mathbb{H}}J^{\delta}_{\mu} {}^{\mathbb{H}}J^{\delta}_{\nu} \delta_{\delta\delta} = \delta_{\delta\delta}, \quad \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} = \det({}^{\mathbb{H}}J^a_b) = 1.$$

Auch hier sind die allgemeinen *Lorentz*-Transformationen Isometrien der Raumzeit.

Diese *Lorentz*-Invarianz mussten wir nicht extra einführen, stattdessen kommt sie aus der quaternionischen Algebra hervor. Auch die *Minkowski*-Metrik mussten wir nicht einführen, sondern die quaternionische Algebra verhält sich bereits entsprechend.

Was bringt nun die Einführung der quaternionischen Basis an zusätzlichen Möglichkeiten? Wenn wir den ersten Index der *Jacobi*-Matrix herunterziehen, erhalten wir eine Bilinearform, die sowohl für die isometrischen (*Lorentz*-) Transformationen als auch für die nichtisometrischen Transformationen rein symmetrisch ist (aber nicht notwendigerweise selbstadjungiert),

$${}^{\mathbb{H}}J_{ab} = \eta_{aa} \cdot \exp({}^{\mathbb{H}}\Gamma^a_b) = \left[ \begin{array}{c|cc} \cosh(\nu_x) & i \sinh(\nu_x) & \cdot & \cdot \\ i \sinh(\nu_x) & -\cosh(\nu_x) & & \\ \cdot & & -\cos(\varrho_x) & \bar{i} \sin(\varrho_x) \\ \cdot & & \bar{i} \sin(\varrho_x) & -\cos(\varrho_x) \end{array} \right].$$

Die anisometrischen Transformationen werden hier im quaternionischen System genauso beschrieben wie im Reellen, siehe Seite 7.

#### 4.5 Quaternionische Integration

Durch die quaternionischen Signaturen können speziell orthogonale Transformationen im Raum und allgemein *Lorentz*-Transformationen in symmetrischer Form dargestellt werden.

Dadurch wird es möglich, nicht nur einmal, bis zur dualen Koordinatenfunktion  $\varphi^* = {}^{\mathbb{H}}J_a$ , zu integrieren,

$${}^{\mathbb{H}}J_a = \int {}^{\mathbb{H}}J_{ab} \cdot dX^b, \quad {}^{\mathbb{H}}J_a, X^b \in \mathbb{H}^4,$$



### 4.7 Die Logarithmischen Quaternionischen *Lorentz*-Transformationen

Aus (4) und (5) lässt sich ein logarithmischer Automorphismus zusammensetzen,

$$\mathbb{H}\Gamma_b^a = \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & i\nu_x & \cdot & \cdot \\ \hline \bar{i}\nu_x & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bar{i}\varrho_x \\ \cdot & \cdot & \bar{i}\varrho_x & \cdot \end{array} \right], \quad \mathbb{H}\Gamma_b^a \in \mathbb{H}^4 \times \mathbb{H}^4,$$

welcher durch Exponentiation die quaternionische *Jacobi*-Matrix der *Lorentz*-Transformation erzeugt,

$$\mathbb{H}J_b^a = \exp(\mathbb{H}\Gamma_b^a) = \left[ \begin{array}{c|ccc} \cosh(\nu_x) & i \sinh(\nu_x) & \cdot & \cdot \\ \hline \bar{i} \sinh(\nu_x) & \cosh(\nu_x) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cos(\varrho_x) & i \sin(\varrho_x) \\ \cdot & \cdot & i \sin(\varrho_x) & \cos(\varrho_x) \end{array} \right].$$

Wird der erste Index der Erzeugenden wieder heruntergezogen, so ist die erhaltene 2-Form streng symmetrisch (doch nicht selbstadjungiert),

$$\mathbb{H}\Gamma_{ab} = \eta_{aa} \mathbb{H}\Gamma_b^a = \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & i\nu_x & \cdot & \cdot \\ \hline i\nu_x & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & i\varrho_x \\ \cdot & \cdot & i\varrho_x & \cdot \end{array} \right], \quad \mathbb{H}\Gamma_{ab} \in \mathbb{H}^4 \times \mathbb{H}^4.$$

Damit lässt sie sich prinzipiell als zweite Ableitung eines logarithmischen Skalarpotentials darstellen,

$$\mathbb{H}\Gamma_{ab} = \partial_a \partial_b \mathbb{H}\Gamma = \partial_b \partial_a \mathbb{H}\Gamma, \quad \mathbb{H}\Gamma \in \mathbb{H},$$

und kann zu einer geschlossenen 1-Form integriert werden,

$$\mathbb{H}\Gamma_a = \int \mathbb{H}\Gamma_{ab} dX^b, \quad \mathbb{H}\Gamma_a, X^b \in \mathbb{H}^4.$$

### 4.8 Die Logarithmischen Anisometrischen Transformationen

Eine rein diagonale Erzeugendenmatrix ist reellwertig,

$$\mathbb{H}\Gamma_{ab} = \left[ \begin{array}{c|ccc} \chi & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & -\gamma_{\mathbf{x}}^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\gamma_{\mathbf{y}}^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\gamma_{\mathbf{z}}^2 \end{array} \right] \Rightarrow \mathbb{H}\Gamma_b^a = \left[ \begin{array}{c|ccc} \chi & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \gamma_{\mathbf{x}}^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \gamma_{\mathbf{y}}^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{\mathbf{z}}^2 \end{array} \right],$$

und unterliegt der *d'Alembert*-Spurbedingung,  $\chi = \gamma_{\mathbf{x}}^2 + \gamma_{\mathbf{y}}^2 + \gamma_{\mathbf{z}}^2$ .

Exponentiation ergibt dieselbe anisometrische (und allgemein auch anisotrope) Streckung wie in 2.3,

$$\mathbb{H}J_b^a = \exp(\mathbb{H}\Gamma_b^a) = \left[ \begin{array}{c|ccc} \exp(\chi) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \exp(\gamma_{\mathbf{x}}^2) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \exp(\gamma_{\mathbf{y}}^2) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \exp(\gamma_{\mathbf{z}}^2) \end{array} \right].$$



## 5 Quaternionische ,Differentialformen‘

*Konvention.* Wo im Folgenden der *Jacobi*-Logarithmus oder die *Jacobi*-Matrix nicht als quaternionisch oder reellwertig gekennzeichnet werden, seien diese als quaternionisch verstanden,

$$\Gamma_{ab} := \overset{\mathbb{H}}{\Gamma}_{ab}, \quad J_b^a := \overset{\mathbb{H}}{J}_b^a.$$

Aus reellwertigen Dreier-Kovektoren,

$$\vec{s} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{r} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

zusammen mit je einem Zeitskalar,  $d, \delta$ , definieren wir uns quaternionische Vierervektoren,

$$S_a := \overset{\mathbb{H}}{B} \cdot \begin{pmatrix} d \\ \vec{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ i a \\ j b \\ k c \end{pmatrix}, \quad R_a := \overset{\mathbb{H}}{B} \cdot \begin{pmatrix} \delta \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ i \alpha \\ j \beta \\ k \gamma \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise werden Quaternionen als Quadrupel dargestellt, mit einer festgelegten Signatur von ,Vorzeichen‘,

$$V_a \sim \begin{pmatrix} + \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix},$$

Zunächst definieren wir uns einen Integral- und einen Differentialoperator,

$$f^a = f := \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad \partial_a = \vec{\partial} := \begin{pmatrix} \partial/\partial t \\ \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix},$$

sodass

$$\partial_a f^b = \delta_a^b, \quad \partial \cdot f = \mathbb{1}.$$

Mit dem Integrationsoperator ,verpacken‘ wir den Vierer-Kovektor zu einem hyperkomplexen ,Scheinskalar‘ (,Schein-‘, weil er immer noch das Element eines vierdimensionalen Vektorraumes darstellt<sup>2</sup>),

$$S := f^\delta S_\delta = f \cdot \overset{\mathbb{H}}{B} \cdot \begin{pmatrix} d \\ \vec{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ i a \\ j b \\ k c \end{pmatrix} = d dt + a i dx + b j dy + c k dz,$$

<sup>2</sup>In demselben Sinne sind herkömmliche komplexe Zahlen auch ,Scheinskalar‘, da sie im Allgemeinen zu nicht weniger als zwei Termen zusammengefasst werden können, einem reellen und einem imaginären – bei Quaternionen sind es vier Terme.

was man als ‘skalare quaternionische Differential-1-Form’ bezeichnen könnte.

Die Anwendung des Differentialoperators packt den ursprünglichen Kovektor lediglich wieder aus und ergibt wieder ein Quadrupel,

$$\partial_a S = \begin{pmatrix} d \\ i a \\ j b \\ k c \end{pmatrix} = \partial_a (f^b S_b) = (\partial_b f^b) S_a = S_a,$$

wobei die eingesetzten Komponenten als Zeitableitung und als Raumgradient in Erscheinung treten,

$$d = \partial_t S, \quad \vec{s} = \text{grad } S.$$

### 5.1 Quaternionische 2-Formen

Um integrieren zu können, benötigen wir symmetrische 2-Formen, sowohl im logarithmischen als auch im realen Raum, denn wir sollten in beiden Räumen einander entsprechende Stammformen angeben können.

Exponenzieren können wir allerdings nur Morphismen. Also wird die logarithmische 2-Form im ersten Index heraufgezogen zum logarithmischen Morphismus, in dieser Form exponenziert zur realen *Jacobi*-Matrix und schließlich wieder hinabgeschoben zur realen 2-Form,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & & \mathbb{H} & & \mathbb{H} \\ \Gamma_{ab} & & \Gamma_b^a & & J_{ab} \\ \text{(logarithmische} & \xrightarrow{\cdot \eta^{aa}} & \text{(logarithmischer} & \xrightarrow{\text{exp}} & \text{(reale 2-Form} \\ \text{2-Form} & & \text{Morphismus)} & & \text{symmetrisch)} \\ \text{symmetrisch,} & & & & \\ \text{Spur} \stackrel{!}{=} 0) & & & & \end{array} \cdot \eta_{aa}$$

Dazu betrachten wir im Einzelnen den *Lorentz*-Boost,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & & \mathbb{H} & & \mathbb{H} \\ \Gamma_{ab} = & \xrightarrow{\cdot \eta^{aa}} & \Gamma_b^a = & \xrightarrow{\text{exp}} & J_{ab} = \\ \left[ \begin{array}{c|c} \cdot & i\nu \\ \hline i\nu & \cdot \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c|c} \cdot & i\nu \\ \hline \bar{i}\nu & \cdot \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c|c} \cosh(\nu) & i \sinh(\nu) \\ \hline \bar{i} \sinh(\nu) & \cosh(\nu) \end{array} \right] \\ \text{(Spur} \stackrel{!}{=} 0) & & \text{(Spur} = 0) & & \text{(Det} = 1) \end{array} \xrightarrow{\cdot \eta_{aa}} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c|c} \cosh(\nu) & i \sinh(\nu) \\ \hline i \sinh(\nu) & -\cosh(\nu) \end{array} \right] \\ \text{(Det} = -1) \end{array},$$

sowie räumliche Rotation,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & & \mathbb{H} & & \mathbb{H} \\ \Gamma_{ab} = & \xrightarrow{\cdot \eta^{aa}} & \Gamma_b^a = & \xrightarrow{\text{exp}} & J_{ab} = \\ \left[ \begin{array}{c|c} \cdot & i\varrho \\ \hline i\varrho & \cdot \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c|c} \cdot & \bar{i}\varrho \\ \hline \bar{i}\varrho & \cdot \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \cos(\varrho) \quad \bar{i} \sin(\varrho) \\ \hline \cos(\varrho) \quad \bar{i} \sin(\varrho) & 1 \end{array} \right] \\ \text{(Spur} \stackrel{!}{=} 0) & & \text{(Spur} = 0) & & \text{(Det} = 1) \end{array} \xrightarrow{\cdot \eta_{aa}} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & -\cos(\varrho) \quad i \sin(\varrho) \\ \hline -\cos(\varrho) \quad i \sin(\varrho) & 1 \end{array} \right] \\ \text{(Det} = -1) \end{array},$$

und schließlich Anisometrie, wie sie in beschleunigten Bezugssystemen auftreten wird,

$$\begin{array}{c} \mathbb{H} \\ \Gamma_{ab} = \\ \left[ \begin{array}{c|c} \chi & \\ \hline & -\chi \end{array} \right] \\ (\text{Spur} \stackrel{!}{=} 0) \end{array} \xrightarrow{\cdot \eta^{aa}} \begin{array}{c} \mathbb{H} \\ \Gamma_{ab}^a = \\ \left[ \begin{array}{c|c} \chi & \\ \hline & \chi \end{array} \right] \\ (\text{Spur} = 2\chi) \end{array} \xrightarrow{\text{exp}} \begin{array}{c} \mathbb{H} \\ J_{ab}^a = \\ \left[ \begin{array}{c|c} \exp(\chi) & \\ \hline & \exp(\chi) \end{array} \right] \\ (\text{Det} = \exp(2\chi)) \end{array} \xrightarrow{\cdot \eta_{aa}} \begin{array}{c} \mathbb{H} \\ J_{ab} = \\ \left[ \begin{array}{c|c} \exp(\chi) & \\ \hline & -\exp(\chi) \end{array} \right] \\ (\text{Spur} = 0) \end{array} .$$

## 5.2 Ableitungen der 2. Stufe und Inertialsysteme

Nun betrachten wir das einfache Produkt zweier solcher 1-Formen als eine 2-Form,

$$\begin{aligned} \Gamma &:= (f^a S_a)(f^b R_b) = \left( \begin{pmatrix} d \\ \vec{s} \end{pmatrix} \cdot \mathbb{H} \cdot \vec{j} \right) \left( \begin{pmatrix} \delta \\ \vec{r} \end{pmatrix} \cdot \mathbb{H} \cdot \vec{j} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ i dx \\ j dy \\ k dz \end{pmatrix} \right) \left( \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ i dx \\ j dy \\ k dz \end{pmatrix} \right) \\ &= (d dt + a i dx + b j dy + c k dz) (\delta dt + \alpha i dx + \beta j dy + \gamma k dz) . \end{aligned}$$

Für die erste partielle Ableitung der 2-Form kommt die *Leibnizsche* Produktregel zum Tragen und liefert die Summe zweier Quadrupel,

$$\begin{aligned} \Gamma_a &:= \partial_a \Gamma = \partial_a (f^b S_b)(f^c R_c) = (\partial_b (f^b S_a))(f^c R_c) + (f^b S_b)(\partial_c (f^c R_a)) \\ &= S_a (f^\delta R_\delta) + (f^\delta S_\delta) R_a \\ &= \begin{pmatrix} d \\ i a \\ j b \\ k c \end{pmatrix} (\delta dt + i \alpha dx + j \beta dy + k \gamma dz) + (d dt + i a dx + j b dy + k c dz) \begin{pmatrix} \delta \\ i \alpha \\ j \beta \\ k \gamma \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Da die  $f$ -Faktoren unendlich klein sind, liegt die erste Ableitung immer noch unendlich nahe bei Null.

Erst mit der zweiten Ableitung verschwinden die letzten  $f$ -Faktoren, und das Ergebnis ist die endliche Summe zweier Matrizen, die zueinander transponiert sind,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Gamma_{ab} &= \partial_b \Gamma_a = \partial_a (S_a (f^\delta R_\delta) + (f^\delta S_\delta) R_a) = S_a (\partial_c f^c R_b) + (\partial_c f^c S_b) R_a \\ &= S_a R_b + S_b R_a \\ &= \begin{pmatrix} d \\ i a \\ j b \\ k c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & i \alpha & j \beta & k \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & i a & j b & k c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ i \alpha \\ j \beta \\ k \gamma \end{pmatrix} =: \Pi_{sr} + \Pi_{rs} . \end{aligned} \quad (6)$$

Das äußere (dyadische) Produkt zweier quaternionischer (Ko-)Vektoren trägt wieder in jeder Komponente ein bestimmtes Vorzeichen,

$$\Pi_{sr} := S_s R_r = \left[ \begin{array}{c|ccc} d\delta & i d\alpha & j d\beta & k d\gamma \\ \hline i a\delta & -a\alpha & k a\beta & \bar{j} a\gamma \\ j b\delta & \bar{k} b\alpha & -b\beta & i b\gamma \\ k c\delta & j c\alpha & \bar{i} c\beta & -c\gamma \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{c|ccc} + & i & j & k \\ \hline i & - & k & \bar{j} \\ j & \bar{k} & - & i \\ k & j & \bar{i} & - \end{array} \right]. \quad (7)$$

In der zweiten Ableitung wird das dyadische Produkt zu seiner eigenen Transponierten addiert. Das Ergebnis ist daher streng symmetrisch (doch nicht notwendigerweise selbstadjungiert) und kann in aussagekräftige Komponenten zerlegt werden,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab} := \Pi_{ab} + \Pi_{ba} &= \left[ \begin{array}{c|ccc} 2d\delta & i(d\alpha + \delta a) & j(d\beta + \delta b) & k(d\gamma + \delta c) \\ \hline i(d\alpha + \delta a) & -2a\alpha & k(a\beta - b\alpha) & j(c\alpha - a\gamma) \\ j(d\beta + \delta b) & k(a\beta - b\alpha) & -2b\beta & i(b\gamma - c\beta) \\ k(d\gamma + \delta c) & j(c\alpha - a\gamma) & i(b\gamma - c\beta) & -2c\gamma \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|ccc} 2d\delta & i\nu_x & j\nu_y & k\nu_z \\ \hline i\nu_x & -2a\alpha & k\rho_z & j\rho_y \\ j\nu_y & k\rho_z & -2b\beta & i\rho_x \\ k\nu_z & j\rho_y & i\rho_x & -2c\gamma \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{c|ccc} +2 & i & j & k \\ \hline i & -2 & k & j \\ j & k & -2 & i \\ k & j & i & -2 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & i\nu_x & j\nu_y & k\nu_z \\ \hline i\nu_x & \cdot & \cdot & \cdot \\ j\nu_y & \cdot & \cdot & \cdot \\ k\nu_z & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & k\rho_z & j\rho_y \\ \cdot & k\rho_z & \cdot & i\rho_x \\ \cdot & j\rho_y & i\rho_x & \cdot \end{array} \right] + 2 \left[ \begin{array}{c|ccc} \chi & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & -s_x r_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -s_y r_y & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -s_z r_z \end{array} \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Wir finden wieder die Rapidität  $\vec{v}$  als Zeitableitung der logarithmischen Koordinate  $\vec{\xi}$ , in Form einer Linearkombination der ursprünglich eingesetzten Vektoren,

$$\begin{aligned} \vec{v} &:= \delta\vec{s} + d\vec{r} \\ &= \text{grad } \vartheta = \partial_t \xi \\ &= \text{grad } \partial_t \Gamma = \partial_t \text{grad } \Gamma. \end{aligned}$$

Wir finden die Orientierung, das ist eine statische Rotation  $\vec{\varrho}$  als Rotationsableitung der logarithmischen Koordinate  $\vec{\xi}$ , in Form des Kreuzprodukts der ursprünglich eingesetzten Vektoren,

$$\vec{\varrho} := \vec{s} \times \vec{r} = \text{rot grad } \Gamma.$$

Dabei fällt auf, dass in diesem quaternionischen System offenbar die Rotationsableitung eines Gradienten nicht identisch verschwindet. Das ist auch gut so, denn da nun jeder Vektor als Gradient einer skalaren Größe dargestellt werden kann, könnten wir sonst keine Rotationsableitungen von Vektoren bilden.

In den Diagonalelementen tritt die Divergenz der logarithmischen Koordinate  $\vec{\xi}$  auf, und die Spurbedingung legt fest, dass  $\chi$  der Quellendichte des logarithmischen Koordinaten-Kovektorfeldes gleich ist,

$$\Gamma_{\delta\delta} \delta^{\delta\delta} = 2(\chi - \vec{s} \cdot \vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \chi = \text{div } \xi.$$

**Zusammenfassung der 2. Stufe**

Die 2-Form trägt 16 Komponenten,

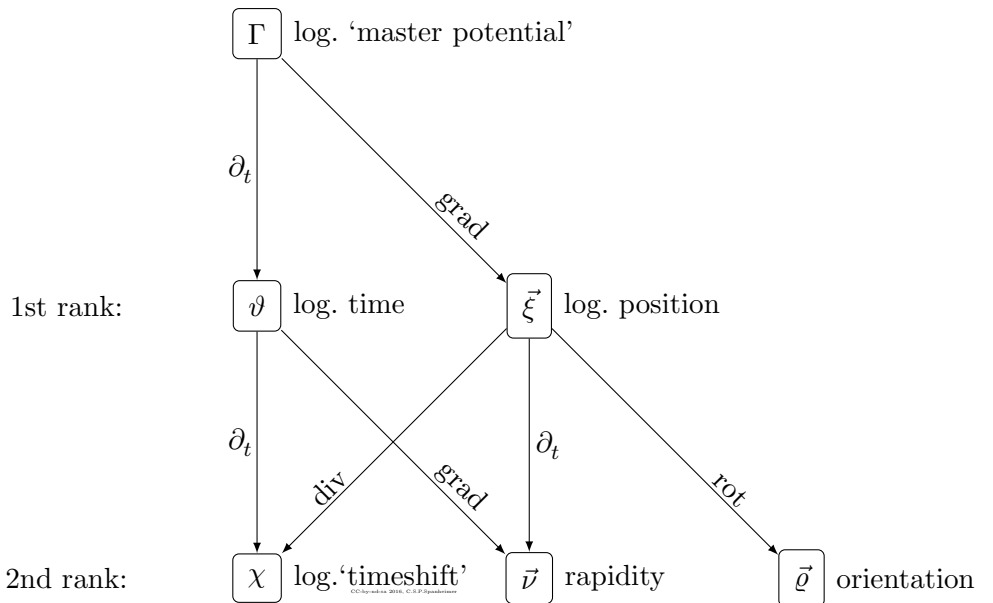
$$\overset{\mathbb{H}}{\Gamma}_{ab} := \partial_a \partial_b \overset{\mathbb{H}}{\Gamma} = \left[ \begin{array}{c|ccc} 2\chi & i\nu_x & j\nu_y & k\nu_z \\ \hline i\nu_x & -2\star & k\rho_z & j\rho_y \\ j\nu_y & k\rho_z & -2\star & i\rho_x \\ k\nu_z & j\rho_y & i\rho_x & -2\star \end{array} \right], \quad \sum \star = \text{div } \vec{\xi}.$$

Wegen der 2-Symmetrie sind nur 10 Komponenten verschieden, und da die **tt**-Komponente  $\chi$  von den 3 Komponenten der Divergenz,  $\text{div } \vec{\xi}$ , abhängt, verbleiben noch 9 unabhängige Komponenten.

Da aber die Komponenten der Divergenz nicht invariant sind gegenüber Koordinatenwechseln und auch keinen Vektor bilden, werden sie durch ihre Summe und damit wieder durch die **tt**-Komponente repräsentiert. Somit bleiben 7 invariante Größen, das sind 1 Skalar und 2 Vektoren,

$$\begin{aligned} \text{Timeshift,} \quad \chi &:= (\partial_t \vartheta = \text{div } \xi) = (\partial_t^2 \Gamma = \text{div grad } \Gamma), \\ \text{Rapidity,} \quad \vec{\nu} &:= (\partial_t \xi = \text{grad } \vartheta) = (\text{grad } \partial_t \Gamma = \partial_t \text{grad } \Gamma), \\ \text{Orientation,} \quad \vec{\rho} &:= \text{rot } \vec{\xi} = \text{rot grad } \Gamma. \end{aligned}$$

**Kommutationen der 2. Stufe**



### Identitäten der 2. Stufe

Aus der Geschlossenheitsbedingung für die Koordinate  $(\vartheta, \vec{\xi})$  folgt die Vertauschbarkeit auch aller Ableitungstypen, und damit zwischen Gradient und Zeitableitung,

$$\vec{v} = \text{grad } \partial_t \Gamma = \partial_t \text{grad } \Gamma.$$

Die Spurbedingung, formuliert mit zweiten Ableitungen, führt zu einer *d'Alembert*-Gleichung,

$$\chi = \partial_t^2 \Gamma = \text{div grad } \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \square \Gamma = 0.$$

Für die Rapidität gilt außerdem eine Identität analog zur *Lorenz*<sup>3</sup>-Eichung in der Elektrodynamik,

$$\vec{v} = \partial_t \xi = \text{grad } \vartheta,$$

und für den ‚logarithmischen Timeshift‘ erhalten wir eine Kontinuitätsgleichung,

$$\chi = \text{div } \xi = \partial_t \vartheta.$$

## 5.3 Ableitungen der 3. Stufe und Beschleunigung

### Rotation der Rapidität

Die Zeitableitungen der räumlichen Orientierung sind unbeeinflusst durch die *d'Alembert*-Spurbedingung,

$$\Gamma_{abc} + = 6 \left( \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & & \\ \hline & \cdot & k\omega_z & j\omega_y \\ k\omega_z & & \cdot & i\omega_x \\ j\omega_y & i\omega_x & & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & \cdot & k\omega_z & j\omega_y \\ \hline & \cdot & & & \\ k\omega_z & & & & \\ j\omega_y & & & & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & k\omega_z & \cdot & i\omega_x \\ \hline & k\omega_z & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & \\ i\omega_x & & & & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & j\omega_y & i\omega_x & \cdot \\ \hline & j\omega_y & & \cdot & \\ i\omega_x & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \end{array} \right] \right),$$

darin ist  $\vec{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit der Rotation über der Zeit,

$$\vec{\omega} := \partial_t \vec{\varrho} = \text{rot } \vec{v}.$$

### SRT und Eigenrotation

Die SRT fordert *Lorentz*-Invarianz, also Isometrie, auf der 2. Stufe. Dadurch werden viele Ableitungen der 3. Stufe verboten. So ist lineare Beschleunigung nicht mehr verträglich mit der SRT, da sie eine Anisometrie induziert.

Was bleibt, ist die Zeitableitung der Orientierung, also Eigenrotation.

<sup>3</sup>Ludvig Lorenz, 1829-1891

### Divergenz der Rapidität

Außerdem finden wir die Zeitableitung des logarithmischen ‚Timeshift‘ und die Divergenz der Rapidität,

$$\vec{v} \Gamma_{abc} + = 6 \left( \left[ \begin{array}{c|ccc} \phi & & & \\ \hline & \star & & \\ & & \star & \\ & & & \star \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & \star & & \\ \hline \star & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & \star & \\ \hline & \star & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & & \star \\ \hline & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{array} \right] \right),$$

mit

$$\phi := \partial_t \chi, \quad \sum \star = \operatorname{div} \vec{v},$$

welche durch die Spurbedingung verknüpft sind zu einer Kontinuitätsgleichung,

$$\phi = (\partial_t \chi = \operatorname{div} \vec{v}),$$

wobei die Bedeutung dieser Größen noch zu entschlüsseln wäre.

Für  $\phi$  gibt es noch keine Bezeichnung, also führen wir hier eine ein: ‚Diffluenz‘ (en: ‚diffluence‘) sei die Divergenz der Rapidität.

### Divergenz der Rotation

$$\Gamma_{abc} + = 6 \left( \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & & \\ \hline & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & \cdot & & \\ \hline \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & -V \\ & & -V & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & \cdot & \\ \hline & \cdot & \cdot & -V \\ & \cdot & \cdot & \\ & -V & \cdot & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & & \cdot \\ \hline & \cdot & & -V \\ & & \cdot & \\ & -V & \cdot & \end{array} \right] \right).$$

Die Divergenz der Orientierung verbirgt sich in den sechs  $V$ -Komponenten, welche aus Symmetriegründen alle denselben Wert haben müssen. Da diese Komponenten in keine Spurbildung eingehen, werden sie auch nicht von der Spurbedingung erfasst.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\varrho} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\xi} &= \Gamma_{yzx} = \Gamma_{xzy} = \Gamma_{xyx} = \Gamma_{zyx} = \Gamma_{zxy} = \Gamma_{yxz} \\ &= \Gamma_{,y,z,x} + \Gamma_{,x,z,y} + \Gamma_{,x,y,z} + \Gamma_{,z,y,x} + \Gamma_{,z,x,y} + \Gamma_{,y,x,z} = -V. \end{aligned}$$

Im euklidischen 3D-Raum verschwindet die Divergenz einer Rotationsableitung identisch. Hier ist aber noch nicht klar, ob  $V$  identisch verschwinden muss. Es geht nicht darum, die gewohnte Identität in dieses System hineinzustecken, sondern sie müsste sich aus diesem System ergeben. Die Divergenz der Rotationsableitung verschwindet hier also erst einmal nicht automatisch.

### Rotation der Rotation

Die Rotationsableitung der Orientierung verbirgt sich in 18 Komponenten, von denen aufgrund der dreifachen Symmetrie nur 6 verschieden sind,

$$\Gamma_{abc} + = 3 \left( \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & & \\ \hline & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & \cdot & & \\ \hline \cdot & \cdot & A & C \\ & A & B & \\ & C & & D \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & \cdot & \\ \hline & A & B & \\ \cdot & B & \cdot & E \\ & & E & F \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & & & \cdot \\ \hline & \cdot & & C & D \\ & & \cdot & E & F \\ & \cdot & D & F & \cdot \end{array} \right] \right),$$

wobei auch noch nicht klar ist, ob sich die Spurelemente kompensieren,

$$\Gamma_{a\delta\delta} \delta^{\delta\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ B + D \\ A + F \\ C + E \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Beschleunigung und Gravitation

Die Zeitableitung der Rapidity,  $\vec{\alpha} = \partial_t \vec{v}$ , ist eine ‚logarithmische Beschleunigung‘, für die bereits der Begriff ‚Celerität‘ (en: celerity) eingeführt ist,

$$\vec{v} \Gamma_{abc} + = 3 \left( \left[ \begin{array}{c|ccc} \cdot & i\alpha_x & j\alpha_y & k\alpha_z \\ \hline i\alpha_x & \cdot & & \\ j\alpha_y & & \cdot & \\ k\alpha_z & & & \cdot \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} i\alpha_x & \cdot \\ \hline \cdot & \bar{i}\gamma_x \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} j\alpha_y & \cdot \\ \hline \cdot & \bar{j}\gamma_y \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} k\alpha_z & \cdot \\ \hline \cdot & \bar{k}\gamma_z \end{array} \right] \right).$$

Gleichzeitig ist Celerität aber auch der Gradient des ‚Timeshift‘  $\chi$ ,

$$\vec{\alpha} := (\partial_t \vec{v} = \text{grad } \chi),$$

Der mit  $\vec{\gamma}$  bezeichnete Kovektor bildet sich aus den übrigen Spurkomponenten, welche in die Rotation der Rotation nicht einbezogen sind.

Unter der Annahme, dass die Rotation der Rotation verschwindet, folgt aus der Spurbedingung die Äquivalenz von Beschleunigung und Gravitation, wenn  $\vec{\gamma}$  als Gravitationsfeldstärke interpretiert wird,

$$\vec{\alpha} \equiv \vec{\gamma}.$$

### Kontraktion

Der Tensor der 3. Stufe kann einmal kontrahiert werden zu einem Vektor. Mit der  $\delta$ -Metrik ist dieser Vektor wegen der Spurbedingung identisch Null,

$$\Gamma_{a\delta\delta} \delta^{\delta\delta} = (0|0|0|0),$$

doch die Betrachtung nur der  $tt$ -Kontraktion oder die Kontraktion mit der inversen *Minkowski*-Metrik,  $\eta^{\eta\eta}$ , ergibt als Kenngröße einen Vierervektor aus Diffluenz und Celerität,

$$\Gamma_{att} \delta^{tt} = \partial_t^2 \Gamma_a = \frac{1}{2} \Gamma_{a\eta\eta} \eta^{\eta\eta} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{\alpha} \end{pmatrix}.$$

### Zusammenfassung der 3. Stufe

In den 64 Komponenten der 3-Form können aufgrund der 3-fachen Symmetrie nur 20 verschiedene Werte auftreten. Durch die Spurbedingung sind 4 Werte von anderen abhängig, verbleiben also 16 unabhängige Größen. Voll unabhängig sind

$$V, \omega_x, \omega_y, \omega_z,$$



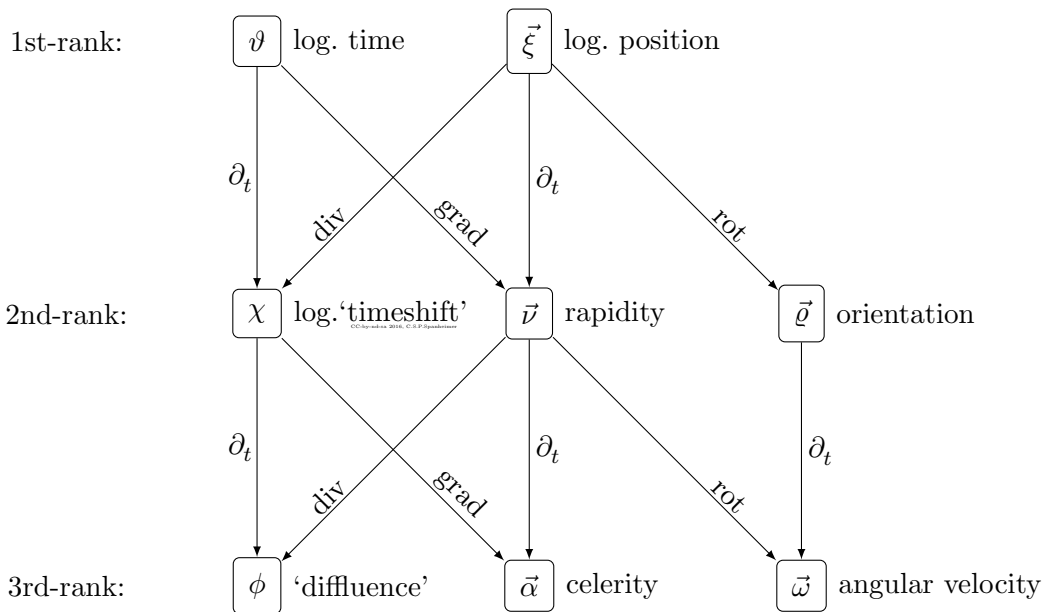
und in den folgenden Vierergruppen sind jeweils 3 Größen unabhängig,

$$\begin{aligned} &\phi, \star, \star, \star \\ &\alpha_x, \gamma_x, B, D \\ &\alpha_y, A, \gamma_y, F \\ &\alpha_z, C, E, \gamma_z. \end{aligned}$$

Da die Komponenten der Divergenz nicht invariant sind gegenüber Koordinatenwechseln und auch keinen Vektor bilden, werden sie durch ihre Summe und damit wieder durch die **ttt**-Komponente repräsentiert. Somit bleiben noch 7 invariante Größen, das sind 1 Skalar und 2 Vektoren,

$$\begin{aligned} \text{Diffluence,} \quad \phi &:= (\partial_t \chi = \text{div } \vec{v}) = (\partial_t^2 \vartheta = \text{div grad } \vartheta), \\ \text{Celerity,} \quad \vec{\alpha} &:= (\partial_t \vec{v} = \text{grad } \chi) = (\partial_t \text{grad } \vartheta = \text{grad } \partial_t \vartheta), \\ \text{Rotation,} \quad \vec{\omega} &:= (\partial_t \vec{\varrho} = \text{rot } \vec{v}) = (\partial_t \text{rot } \vec{\xi} = \text{rot } \partial_t \vec{\xi} = \text{rot grad } \vartheta), \end{aligned}$$

**Kommutationen der 3. Stufe**



**Identitäten der 3. Stufe**

Aus der Vertauschbarkeit aller Ableitungstypen folgen mehrere Identitäten,

$$\begin{aligned} \phi &= (\partial_t \text{div } \vec{\xi} = \text{div } \partial_t \vec{\xi}), \\ \vec{\alpha} &= (\partial_t \text{grad } \vartheta = \text{grad } \partial_t \vartheta), \\ \vec{\omega} &= (\partial_t \text{rot } \vec{\xi} = \text{rot } \partial_t \vec{\xi}). \end{aligned}$$

Die *d'Alembert*-Spurbedingung führt zu

$$\phi = (\partial_t^2 \vartheta = \operatorname{div} \operatorname{grad} \vartheta),$$

$$\vec{\alpha} = (\partial_t^2 \vec{\xi} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\xi}),$$

sowie einer Kontinuitätsgleichung,

$$\phi = (\partial_t \chi = \operatorname{div} \vec{\nu}),$$

sodass Diffluenz nicht nur die Divergenz der Rapidität, sondern gleichzeitig die Zeitableitung der logarithmischen Rotverschiebung darstellt.

Weiters eine Celeritäts-Eichung, deren Form der einer *Lorenz*-Eichung entspricht, sodass hier das logarithmische Beschleunigungsfeld nicht nur die Zeitableitung der Rapidität ist, sondern gleichzeitig den Gradienten der logarithmischen Rotverschiebung darstellt,

$$\vec{\alpha} = (\partial_t \vec{\nu} = \operatorname{grad} \chi),$$

sowie eine weitere Eichung, in der die Winkelgeschwindigkeit nicht nur die Zeitableitung der Orientierung, sondern auch die Rotationsableitung der Rapidität ist,

$$\vec{\omega} = (\partial_t \vec{\varrho} = \operatorname{rot} \vec{\nu}).$$