A deflexão da luz pelo Sol. A solução assintótica
(The deflection of light by the Sun. The asymptotic solution)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – Calculamos o ângulo da deflexão sofrida pela luz ao passar nas proximidades de uma grande massa *M*, o Sol, utilizando o comportamento assintótico da solução exata da equação do movimento da luz segundo a Relatividade Geral (espaço-tempo de Schwarzschild). O ângulo obtido foi de cerca de $5{,}93\text{x}10^{-4}$ '', o dobro do inverso do raio do Sol.

ABSTRACT – We calculate the angle of the deflection suffered by the light passing near a large mass *M*, the Sun, using the asymptotic behavior of exact solution of the equation for the light movement according to the General Relativity (Schwarzschild space-time). The resulting angle is about equal to $5{,}93\text{x}10^{-4}$ '', the double of inverse of Sun's radius.

Palavras chave: deflexão, luz, Sol, relatividade geral, solução aproximada, solução assintótica, espaço-tempo de Schwarzschild.

Keywords: deflection, light, Sun, general relativity, approximate solution, asymptotic solution, Schwarzschild's space-time.

1. Introdução

Mostramos em [1] que a Relatividade Geral obtém para o movimento da luz sob influência gravitacional de uma massa M uma solução que leva à colisão da luz com esta massa, o que não acontece com a Mecânica Newtoniana.

Esta colisão ocorre devido ao fato de que a solução obtida para a equação do movimento foi obtida apenas de maneira aproximada, em 2ª ordem, pelo método das perturbações. Não deveria haver colisão com uma solução exata, por imposição de condição de contorno apropriada.

Vejamos então o que ocorre sem usarmos o método das perturbações. Buscaremos o comportamento no infinito da solução exata que pode ser obtida com a Relatividade Geral, mas antes relembraremos a solução aproximada.

Segundo [2], a equação do movimento para partículas-teste no espaço-tempo de Schwarzschild[3] é

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2\varepsilon^2 - b}{l^2} + \frac{2mb}{l^2}u + 2mu^3, \tag{1}$$

para $u = 1/r$, ε e l constantes do movimento e $m = GM/c^2$, com os habituais significados de r, G, c.

Para partículas-teste com massa usamos $b = c^2$, e para partículas não massivas usamos $b = 0$. Então no caso do movimento da luz, considerando que o fóton não possua massa, (1) fica igual a

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2\varepsilon^2}{l^2} + 2mu^3, \tag{2}$$

que se transforma em

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2 \tag{3}$$

ao derivar os dois membros de (2) em relação a φ.

A solução aproximada de (3), pelo método das perturbações, é

$$u = \frac{1}{R_0}cos\varphi + \frac{m}{R_0^2}(1 + sen^2\varphi), \tag{4}$$

onde R_0 representa a distância de máxima aproximação da partícula com respeito à origem, em $\varphi = 0$. Embora ela forneça o ângulo de deflexão da luz considerado correto (a partir de $r \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 0$),

$$D = \frac{4m}{R_0} = \frac{4GM}{c^2R_0} \approx 1'', 75, \tag{5}$$

para $R_0 = R_S$ o raio do Sol (6,960 x 10^8 m), ela traz o inconveniente de que em $\varphi = 0$ não temos o esperado valor $r = R_0$, e sim

$$r(\varphi = 0) = \frac{1}{u(\varphi=0)} = R_0 \frac{1}{1+\frac{m}{R_0}} < R_0, \tag{6}$$

ou seja, o fóton, nesta aproximação, avança pelo interior do Sol, significando obviamente que houve uma colisão anterior em sua superfície.

A título de comparação, o deslocamento interior obtido em (6), para o raio do Sol R_0 = 6,960 x 10^8 m e a razão m/R_0 da ordem de 2 x 10^{-6}, é próximo de 1,4 x 10^3 m, que em virtude da grandeza do raio do Sol corresponde a uma região muito além de um volume molecular, por exemplo.

O ângulo de colisão φ pode ser obtido igualando (4) a $1/R_0$, ou seja,

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_0}cos\varphi + \frac{m}{R_0^2}(1 + sen^2\varphi), \qquad (7)$$

e então

$$\frac{m}{R_0}cos^2\varphi - cos\varphi + \left(1 - 2\frac{m}{R_0}\right) = 0, \qquad (8)$$

cuja solução matematicamente aceitável $(-1 \leq cos\varphi \leq +1)$ é

$$cos\varphi = \frac{1-\sqrt{1-4\frac{m}{R_0}(1-2\frac{m}{R_0})}}{2\frac{m}{R_0}}. \qquad (9)$$

Está claro que $\varphi = 0$ não é solução de (9), nem de (8), qualquer que seja o valor de m/R_0. Como m/R_0 é pequeno comparado com 1, da ordem de 2 x 10^{-6}, podemos aproximar (9) para

$$cos\varphi \approx 1 - 2\frac{m}{R_0}, \qquad (10)$$

que para ângulos φ também pequenos fornece

$$\varphi \approx 2\sqrt{\frac{m}{R_0}}, \qquad (11)$$

um ângulo muito pequeno, a raiz quadrada do ângulo obtido em (5) para a deflexão da luz, mas que não é nulo. Se um fóton emitido por uma estrela distante tivesse um movimento que obedecesse à solução (4) para as equações (3) ou (2), este fóton acabaria por colidir com o Sol, seria absorvido, e não chegaria à Terra. Se todos os fótons emitidos pela estrela que viessem em nossa direção tivessem esta mesma trajetória claro que a estrela se tornaria invisível para nós. Estamos evidentemente desprezando todos os mais complicados efeitos envolvendo Eletromagnetismo, Termodinâmica e Mecânica Quântica.

2 – A solução assintótica

Em [1] mencionamos que "Se esta mesma solução que prediz o desvio de 1'',75 para o ângulo de deflexão da luz também leva antes à colisão da luz, parece claro que *a priori* ela não pode ser adotada para o cálculo desta deflexão, despreocupadamente, sem maior análise. Precisamos de melhor solução, e que não leve a nenhuma previsão indesejável." É o que faremos agora. O termo $\frac{c^2\varepsilon^2}{l^2}$ que aparece em (2), mas não em (3), terá importância fundamental.

Continuaremos a usar a equação do movimento obtida com a solução exata de Schwarzschild para as equações de campo de Einstein, que constitui uma solução para o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, representando um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico, como é esperado que ocorra no caso de sistemas planetários como o sistema solar, na região exterior a uma distribuição de massa com simetria esférica.[2]

Partiremos da equação (2),

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2\varepsilon^2}{l^2} + 2mu^3, \tag{12}$$

mas não precisaremos obter a solução exata $u(\varphi)$ para todo ângulo φ. Vimos na Introdução e em [1], conforme [2], que podemos obter o ângulo de deflexão da luz na presença de uma grande massa M através do limite que a solução da equação do movimento tem no infinito, i.e., $r \to \infty$ ou $u \to 0$, obtendo-se então o ângulo φ correspondente a este limite e o ângulo que as assíntotas da trajetória formam com o eixo Y, que é igual ao ângulo complementar de φ, em módulo. Sendo assim, o que principalmente nos interessará será a obtenção da solução assintótica da equação do movimento (12), mais especificamente o coeficiente angular de uma das assíntotas da trajetória da luz.

Para o movimento no plano XY os coeficientes angulares das assíntotas da trajetória da luz são iguais aos limites no infinito

$$\delta_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{dy}{dx} \tag{13}$$

e

$$\delta_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{dy}{dx}. \tag{14}$$

Como há simetria no movimento, bastará calcular um destes coeficientes, por exemplo, δ_+, e teremos $\delta_- = -\delta_+$.

Em coordenadas polares $(r,\ \varphi)$ nós temos

$$x = r\ cos\varphi \tag{15.1}$$

$$y = r\ sen\varphi \tag{15.2}$$

e então

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi = cos\varphi\ dr - r\ sen\varphi\ d\varphi \tag{16.1}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi = sen\varphi\ dr + r\ cos\varphi\ d\varphi. \tag{16.2}$$

Supondo que nesta trajetória, no infinito, $cos\varphi \neq 0$ e $sen\varphi \neq 0$, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{dy}{dx} = \lim_{r\to\infty} \frac{r\ cos\varphi\ d\varphi}{-r\ sen\varphi\ d\varphi} = -\frac{1}{tg\varphi|_{u\to 0_+}}, \tag{17}$$

para φ pertencente ao primeiro ou quarto quadrante.

Mas $tg\varphi|_{u\to 0_+}$ corresponde ao coeficiente angular da reta tangente à solução $u(\varphi)$ da equação (12) em $u \to 0_+$, ou seja,

$$tg\varphi|_{u\to 0_+} = \frac{du}{d\varphi}|_{u\to 0_+} = \pm \left|\frac{c\varepsilon}{l}\right|, \tag{18}$$

onde *c* é a velocidade da luz no vácuo, *l* o momento angular por unidade de massa e ε uma constante a determinar, que no limite newtoniano corresponde à conservação da energia.

Podemos manter apenas o sinal positivo em (18), devido à simetria do movimento. O ângulo de deflexão total β será o dobro do que obteremos com só um dos sinais, o positivo.

Para o cálculo de ε usaremos (12) em $\varphi = 0$. Como $u = 1/r$ então

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{19}$$

Para $\varphi = 0$ temos, por simetria,

$$\frac{dr}{d\varphi}(\varphi = 0) = 0, \tag{20}$$

e pela condição de contorno

$$u(\varphi = 0) = \frac{1}{R_0}, \tag{21}$$

obtemos de (19), para $u = \frac{1}{R_0}, r = R_0$,

$$\frac{du}{d\varphi}(\varphi = 0) = 0, \tag{22}$$

e assim (12) em $\varphi = 0$ fica igual a

$$\frac{1}{R_0^2} = \left(\frac{c\varepsilon}{l}\right)^2 + 2m\frac{1}{R_0^3}. \tag{23}$$

A constante de movimento l é igual a

$$l = r^2\dot{\varphi}, \tag{24}$$

o momento angular por unidade de massa, que para $\varphi = 0$, onde vale $r = r_{min} = R_0$, igual ao ponto de menor aproximação com relação à origem, e

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{max} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\Big|_{\varphi=0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y/R_0}{\Delta y/c} = \frac{c}{R_0}, \qquad (25)$$

leva a

$$l = R_0^2 \frac{c}{R_0} = R_0 c. \qquad (26)$$

Então aplicando (26) em (23) obtemos

$$\frac{1}{R_0^2} = \left(\frac{c\varepsilon}{R_0 c}\right)^2 + 2m\frac{1}{R_0^3}, \qquad (27)$$

donde

$$1 = \varepsilon^2 + \frac{2m}{R_0}. \qquad (28)$$

Isto dá para ε o valor de

$$\varepsilon = \pm\sqrt{1 - \frac{2m}{R_0}}, \qquad (29)$$

e assim a tangente do ângulo φ em $u \to 0_+$, dada em (18), fica igual a

$$tg\varphi|_{u\to 0_+} = \frac{1}{R_0}\sqrt{1 - \frac{2m}{R_0}}, \qquad (30)$$

onde usamos apenas o sinal positivo, conforme já explicado.

Este valor corresponde então ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $u(\varphi)$ em $u \to 0_+, r \to \infty$, valor que depende apenas fracamente da massa M do Sol ($1{,}9887973 \times 10^{30}$ kg). A maior contribuição para o valor de φ é dada pelo raio R_0, distância ao centro do Sol ($R_S = 6{,}960 \times 10^8$ m).

Aplicando o resultado anterior em (17) obtemos o coeficiente angular de uma das assíntotas da trajetória, $\delta_+ = tg\delta$,

$$\delta_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{tg\varphi|_{u\to 0_+}} = -\frac{R_0}{\sqrt{1-\frac{2m}{R_0}}} = tg\delta, \qquad (31)$$

que corresponde a um ângulo δ entre $\pi/2$ e π, um ângulo de tangente negativa.

Da conhecida relação trigonométrica

$$tg\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{tg\varphi} \tag{32}$$

vemos que o ângulo δ que se obtém de (31) é então

$$\delta=\varphi+\frac{\pi}{2}. \tag{33}$$

Como o ângulo que precisamos para o cálculo da deflexão da luz é o complementar de δ, em módulo, o ângulo que as assíntotas da trajetória da luz fazem em relação ao eixo vertical Y, voltamos novamente ao ângulo φ, dado em (30), localizado no primeiro quadrante.

Sendo $tg\varphi$ muito pequeno comparado com 1, podemos aproximar o ângulo φ em (30) fazendo

$$\varphi\approx tg\varphi|_{u\to 0_+}=\frac{1}{R_0}\sqrt{1-\frac{2m}{R_0}}\approx\frac{1}{R_0}(1-\frac{m}{R_0})\approx\frac{1}{R_0}, \tag{34}$$

e assim o ângulo de deflexão total β é aproximadamente igual a

$$\beta=2\varphi\approx\frac{2}{R_0}\approx 2{,}87\times 10^{-9}\ \mathrm{rad}\approx 5{,}93\times 10^{-4}{}'', \tag{35}$$

quase 3000 vezes menor que o ângulo de 1'',75 conhecido, usando R_0 = 6,960 x 10^8 m, o raio do Sol.

3. Conclusão

Na análise que fizemos da solução de Schwarzschild[3] em [4] concluímos que a Relatividade Geral não explica a precessão do periélio de Mercúrio, pois a solução obtida para a equação do movimento não pode ter infinitos pontos de máximos e mínimos, nem mesmo um número muito grande destes pontos extremos, que corresponderiam a um movimento do periélio (e afélio) a cada revolução completa, já que a equação do movimento envolve uma derivada de primeira ordem elevada ao quadrado de um lado e um polinômio de 3° grau do outro. Nos extremos de u, e consequentemente de $1/r$, chegamos a uma equação do 3° grau apenas, sem a esperada precessão a cada volta completa, o chamado avanço do periélio.

Em trabalho mais recente[5], e mais importante, concluímos de novo que a Relatividade Geral não explica esta precessão, pois, ao contrário da informação conhecida, a Mecânica de Newton explica completamente o movimento de precessão do periélio de Mercúrio (e muito provavelmente dos outros planetas também, além das outras anomalias já conhecidas). A Relatividade Geral era a responsável pela explicação da diferença entre a precessão observada ($\Delta\varphi_{OBS}$) e a calculada com a

Mecânica de Newton ($\Delta\varphi_N$) até então, mas uma vez que a Mecânica de Newton é capaz de obter o valor da precessão do periélio igual ao observado (com valores atualizados dos elementos considerados fixos, além das massas dos planetas do sistema solar e seus respectivos satélites), o resultado da precessão calculado com a Relatividade Geral ($\Delta\varphi$) deveria ser igual a zero, ao invés de 43'' por século, no caso de Mercúrio, conforme a equação (8.6.13) de Weinberg[6]:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{OBS} - \Delta\varphi_N. \tag{36}$$

Agora, no presente artigo, concluímos que a Relatividade Geral leva a um valor muito pequeno (5,93x10^{-4}''), o dobro do inverso do raio do Sol, e bem diferente do conhecido (1,75''), para o ângulo de deflexão da luz na passagem pelo Sol, o que de certa forma já era prenunciado pelas conclusões anteriores, referentes à precessão do periélio de Mercúrio. O valor obtido com a solução exata assintótica é praticamente independente da massa *M* que produz o campo gravitacional, enquanto a dependência maior é da distância mínima ao centro de força, em $\varphi = 0$, por imposição de condição de contorno, o que é bem diferente do resultado padrão conhecido. Há sim um sério problema com a Relatividade Geral, e resultados tão fartamente divulgados referentes aos cálculos obtidos com ela mostram-se incorretos quando calculados mais exatamente, sem as costumeiras aproximações de primeira e segunda ordens.

Sabemos que há outras maneiras de calcular a deflexão da luz na Relatividade Geral diferentes da que foi mencionada aqui (e na seção 3 de [1]), baseada em [2]. Dos autores mais consagrados talvez sejam Weinberg[6] e Landau & Lifschitz[7] os que mais diferem do método aqui apontado, e somos obrigados também a comentá-los, mesmo que uma análise mais completa caiba melhor em outro artigo. Lembramos ainda que também já fizemos uma crítica da dedução original de Einstein[8] deste ângulo de deflexão.

Weinberg[6] é rigoroso em várias passagens de seus cálculos, mas o resultado final baseia-se em uma integral elíptica (tal como em Landau[7]), que por sua vez envolve duas séries infinitas, para as funções que chama de *A(r)* e *B(r)*. A manipulação destas séries no integrando leva a uma terceira série infinita, e o resultado final, que dá o ângulo de deflexão esperado de 1'',75, é obtido com a primeira ordem em MG/r_0 desta série. Trata-se de fato de uma complicada série numérica, mas apenas os seus "primeiros" termos são utilizados para o resultado final, desprezando-se assim infinitos termos. Pessoalmente não consigo acreditar que todo o restante da série, a parte que foi desprezada, convirja para o valor zero, o que merece uma análise maior do assunto.

Landau & Lifschitz[7] fazem uma sofisticada dedução do ângulo de deflexão da luz. É difícil seguir o raciocínio deles (acho que Lifschitz é o grande relativista da dupla), mas *M*, o momento angular, ora é definido como constante, ora deriva-se em relação a ele. A ação *S* também é truncada, ou seja, em um desenvolvimento em série, função da distância *r*, despreza-se infinitos termos (esta omissão é bem mais oculta que a feita em Weinberg), sem esclarecimentos sobre as conseqüências desta aproximação. Eles chegam ao resultado conhecido, mas que sob uma melhor análise difere dos demais até aqui verificados: o ângulo de deflexão $\delta\varphi$ depende da freqüência da luz, $\omega_0 = -\partial\psi/\partial t$, devido à substituição que fazem, $\varrho = cM/\omega_0$, e ao correspondente resultado obtido, $\delta\varphi = \frac{4km\prime}{c^2\varrho}$. ψ é a eikonal, a fase de uma onda luminosa, que deve ser uma quantidade grande (§ 53 da *Teoria do Campo*).

Bibliografia

1. Godoi, V.M.S., *The Deflection of Light by the Sun. The Newtonian Calculation*, http://www.vixra.org/abs/1412.0263 (2014).

2. Lorenci, V. de, *Teoria da Gravitação*, em *Programa Mínimo de Cosmologia*, cap. 1, org. Mario Novello et al. Rio de Janeiro: Jauá Editora (2010).

3. Schwarzschild, K., *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*, em http://zelmanov.ptep-online.com/papers/zj-2008-03.pdf, do original "*Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*", Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189-196 (1916).

4. Godoi, V.M.S., *The Exact Schwarzschild Solution*, http://vixra.org/abs/1407.0005 (2014).

5. Godoi, V.M.S., *The Precession of the Perihelion of Mercury Explained by Celestial Mechanics of Laplace*, http://vixra.org/abs/1410.0133 (2014).

6. Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, pp. 188-190, 199. New York: John Wiley & Sons, Inc. (1972).

7. Landau, L. e Lifschitz, E., *Teoria do Campo*, pp. 379-383. São Paulo: Hemus Livraria Editora Ltda. (1974).

8. Godoi, V.M.S., *The Deflection of Light by the Sun. The Einstein's Calculation in 1916*, http://vixra.org/abs/1412.0141 (2014).