As massas dos planetas do Sistema Solar
(The masses of the Solar System´s planets)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – Compara-se as massas atualizadas, de Mercúrio a Saturno, com os valores de Le Verrier e Newcomb e recalcula-se o valor do desvio obtido para a precessão secular do periélio de Mercúrio com as massas atualizadas.
ABSTRACT – Compares the current masses of Mercury to Saturn, with the values of Le Verrier and Newcomb and recalculates the value of the deviation obtained for the secular precession of the perihelion of Mercury with current masses.

Palavras-chave: massa, planetas, Sol, Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, vento solar, precessão, periélio, Relatividade Geral, Le Verrier, Newcomb.
Keywords: mass, planets, Sun, Mercury, Venus, Earth, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune, solar wind, precession, perihelion, General Relativity, Le Verrier, Newcomb.

1 – Introdução

As massas dos planetas, do Sol e dos corpos em geral têm fundamental importância na determinação dos movimentos celestes. Desde o estabelecimento e uso sistemático das leis de Newton, com a definição do conceito de força dependente da massa,

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}, \qquad (1)$$

e da lei da gravitação universal,

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \qquad (2)$$

que se sabe que o movimento dos planetas do sistema solar é dependente da massa de seus planetas, assim como do Sol.

A determinação dessas massas, entretanto, não é um processo direto, nem simples. Hoje temos as balanças, domésticas, industriais ou para fins específicos, capazes de medir a massa de corpos "aproximadamente" pequenos, uma maçã, uma pessoa, um caminhão, etc., mas não é com o uso delas que se mede as massas dos planetas, evidentemente. Para eles são necessárias observações astronômicas, medidas e cálculos baseando-se nas leis que os corpos deveriam seguir. Dessa maneira, as massas planetárias são soluções de equações, que podem variar conforme o método específico que se vai empregar. Podemos consultar uma leitura introdutória, elementar, em [1],[2].

Em [3] podemos verificar, dentre várias outras questões, comparações que Newcomb (1835-1909) faz sobre a massa de Vênus, para vários métodos de obtenção possíveis, e as dificuldades para se adotar um valor bem determinado para ele. Não é possível dizer que só há um valor que poderia ser usado para a massa de Vênus.

Le Verrier (1811-1877), antes de Newcomb, sabia que uma variação na massa adotada para Vênus ou Terra poderia explicar a precessão secular do periélio de Mercúrio (já que outros planetas ou teriam uma contribuição insignificante ou têm massas muito bem determinadas e portanto difíceis para se adotar outros valores), embora a causa que ele mais acreditava para este fenômeno era a da existência de um planeta (Vulcano) ou grupo de pequenos corpos entre Mercúrio e o Sol.[4],[5] Lembrando que Le Verrier foi quem previu a existência de um novo planeta, Netuno, através de desvios que ele causava na posição observada de Urano.

O que se pretende neste artigo, após o que já se expôs em [6] sobre a possível causa da precessão do periélio de Mercúrio ser o vento solar (pelo menos também influenciada por ele), a perda contínua da massa do Sol e consequente aumento da razão entre as massas dos planetas e a massa do Sol, é comparar as massas atualizadas, de Mercúrio a Urano, com os valores de Le Verrier e Newcomb e recalcular o valor do desvio obtido para a precessão secular do periélio de Mercúrio com as massas atualizadas, bem como calcular valores da precessão conforme observações descritas por Le Verrier[4].

2 – As massas dos planetas do Sistema Solar

Na página 19 de [4], no "Resumo das fórmulas relativas aos movimentos heliocêntricos e geocêntricos de Mercúrio", Le Verrier indica as massas adotadas para os planetas:

Mercúrio	m	$0{,}000\,000\,333\,3\,(1+\nu)$
Vênus	m^{I}	$0{,}000\,002\,488\,5\,(1+\nu^{I})$
Terra	m^{II}	$0{,}000\,002\,817\,4\,(1+\nu^{II})$
Marte	m^{III}	$0{,}000\,000\,333\,9\,(1+\nu^{III})$
Júpiter	m^{IV}	$0{,}000\,925\,381\quad(1+\nu^{IV})$
Saturno	m^{V}	$0{,}000\,284\,738\quad(1+\nu^{V})$

Os números decimais são as representações truncadas das frações correspondentes à razão entre a massa de cada planeta e o Sol, e as variáveis ν com os índices superiores I, II, ..., V são valores para "ajustes" possíveis para as respectivas massas, que podem ser positivos ou negativos. As variáveis referentes a Mercúrio não possuem índices.

Planeta	Massa (kg)	$m^{-1} = (M_p/M_S)^{-1}$	Le Verrier	Newcomb	$\nu^{\cdots}$
Mercúrio	$3{,}3022 \times 10^{23}$	6023560,05	3000000	7500000	-0,5020
Vênus (I)	$4{,}8685 \times 10^{24}$	408565,27	401847	401847	-0,01644
Terra (II)	$5{,}9736 \times 10^{24}$	332981,79	354936	327000	0,06593
Marte (III)	$6{,}4174 \times 10^{23}$	3099541,87	2680337	3093500	-0,1352
Júpiter (IV)	$1{,}8986 \times 10^{27}$	1047,67	1050	1047,88	0,002224
Saturno (V)	$5{,}6846 \times 10^{26}$	3499,10	3512	3512	0,003687
Urano (VI)	$8{,}6810 \times 10^{25}$	22913,26	?	?	?
Netuno (VII)	$1{,}0243 \times 10^{26}$	19419,12	?	?	?

Tabela 1 – Massa dos planetas do sistema solar (M_p) em kg e em relação à massa do Sol ($M_S = 1{,}9891 \times 10^{30}$ kg). Os algarismos romanos são os índices superiores comumente usados nas equações do movimento planetário.

Vimos anteriormente em [6] que Le Verrier formula a relação

$$288'' \nu' + 87'' \nu'' = 38{,}3'' \tag{3}$$

para explicar a precessão residual de Mercúrio, calculada em 38,3'' na época, ou melhor dizendo, como uma possibilidade para a causa desta precessão: uma variação nas massas de Vênus (ν') e Terra (ν'').

Utilizando as massas atuais de Vênus e da Terra e as respectivas massas adotadas por Le Verrier, conforme tabela 1, obtemos os seguintes valores para ν' e ν'':

$$m^{atual}_{Vênus} = m^{LeV}_{Vênus} (1 + \nu'),\ \nu' = -0{,}01644 \tag{4}$$
$$m^{atual}_{Terra} = m^{LeV}_{Terra} (1 + \nu''),\ \nu'' = 0{,}06593 \tag{5}$$

onde m é a razão entre a massa do planeta (M_p) e a massa do Sol (M_S),

$$m = M_p/M_S, \tag{6}$$

que fornece o valor final

$$288'' \nu' + 87'' \nu'' = 1{,}000212'', \tag{7}$$

ou seja, bem inferior aos 38'' ou 43'' procurados.

Na página 7 de [4], onde se estudam as “Variações anuais dos elementos”, vê-se que todos os planetas têm sua incerteza, ou ajuste possível, no valor da massa, que poderiam influir no valor da precessão anual (e secular) do periélio de Mercúrio,

$$e\delta\varpi = +1{,}08386 + 0{,}57704\,\nu^{I} + 0{,}17191\,\nu^{II} + 0{,}00587\,\nu^{III} + 0{,}31375\,\nu^{IV} + 0{,}01489\,\nu^{V} + 0{,}0028\,\nu^{VI} + 0{,}0012\,\nu^{VII}, \qquad (8)$$

onde e é o valor da excentricidade, ϖ a longitude do periélio e $\delta\varpi$ a variação angular da longitude do periélio de Mercúrio. Observo que o termo “longitude” é normalmente omitido nos textos sobre Relatividade que tratam da precessão dos periélios, mas é dele que falamos.

Utilizando os valores de ν^{I} a ν^{V} dados na tabela 1, admitindo $\nu^{VI} = \nu^{VII} = 0$, obtemos

$$e\delta\varpi = 1{,}085667. \qquad (9)$$

Adotando e = 0,2056 para o valor da excentricidade da órbita de Mercúrio vem

$$\delta\varpi = 5{,}28048'' \qquad (10)$$

para o valor anual da precessão do periélio, ou velocidade angular anual da longitude do periélio de Mercúrio. Se multiplicarmos este valor por 100 obteremos 528,05’’ para o valor aproximado da precessão secular do periélio de Mercúrio dado pela influência dos outros planetas conforme a Mecânica de Newton, valor próximo dos 532’’ mencionados por Weinberg[7], sem contar a rotação da Terra.

Mas ainda é possível obter um valor mais exato que o obtido em (10). Quando se trata na página 21 dos “Elementos do movimento de órbita”, para 1º de janeiro de 1850 e t o ano juliano em 1850 + t, Le Verrier obtém para o valor teórico da longitude do periélio

$$\varpi = 75°7'1'',03 + 55'',5308\,t + 0'',0001111\,t^2 + 2'',8064\,\nu^{I}t + 0'',8361\,\nu^{II}t + 0'',0255\,\nu^{III}t + 1'',5259\,\nu^{IV}t + 0'',0724\,\nu^{V}t + 0'',0014\,\nu^{VI}t + 0'',0006\,\nu^{VII}t, \qquad (11)$$

donde se vê que além dos termos lineares em t há uma pequena aceleração angular, devido ao termo quadrático t^2. Ou seja, o deslocamento secular $\delta\varpi$ do periélio não é constante, mas crescente com o tempo.

Fazendo t = 100 em (11) e adotando os mesmos valores para os ν usados na passagem de (8) para (9) obtemos para o desvio secular $\delta\varpi$ o valor

$$\delta\varpi = 5555{,}11'', \qquad (12)$$

que difere de 45,62'' do valor observado (5600,73''± 0,41'')[7].

É esta diferença de cerca de 45'', ou de 43'' nos cálculos posteriores a Le Verrier, que até o momento fica sem explicação.

3 – Conclusão

A relação (3) proposta por Le Verrier não é verdadeira, pois os valores que temos para ν^{I} e ν^{II} produzem pouco mais de 1'' para o valor da precessão secular do periélio, o que justifica Le Verrier preferir a hipótese da existência de Vulcano à variação das massas na explicação dessa anomalia.

O maior valor de ν em módulo está no planeta Mercúrio, conforme se vê na tabela 1. Tanto Le Verrier quanto Newcomb erraram na massa de Mercúrio, o que nos faz crer que isto deve ter prejudicado no valor final calculado para o deslocamento do periélio, e possivelmente os coeficientes de (8) e (11) deveriam ser recalculados.

Fazendo t = 100 e $\nu^{I} = \nu^{II} = \ldots = \nu^{VII} = \nu$ em (11), qual o valor de ν que faria o valor teórico da precessão secular do periélio de Mercúrio ser igual ao respectivo valor observado? A equação que obtemos para este problema é

$$5554{,}1911'' + 526{,}83''\ \nu = 5600{,}73'', \qquad (13)$$

que tem por solução

$$\nu \approx 0{,}088376, \qquad (14)$$

ou seja, um pequeno ajuste de cerca de +8,8% para os valores dos ν, i.e., nos valores das massas dos planetas, explicaria classicamente a diferença no valor da precessão.

Se assumirmos $\nu = 0$, i.e., valores exatos para as massas, então os coeficientes que multiplicam t e t^2 deveriam sofrer um aumento de cerca de 1,008379 vezes o seu valor, ou seja, aproximadamente +0,84%.

Há de se lembrar, entretanto, que a precessão do periélio não é o único elemento observado, e calculado, no Sistema Solar. São 6 os elementos estudados na Mecânica Celeste, e todos utilizam estas incertezas ou ajustes ν, ν^{I}, ν^{II}, ... em suas equações. Um valor utilizado para determinado ν devido a um elemento influenciaria no valor obtido para outro elemento, e este é um cuidado que se deve ter. Nota-se assim a necessidade de se resolverem sistemas de equações, e não somente equações, na Mecânica Celeste. Mas havendo mais planetas (7) que elementos (6), há um grau de liberdade nesse sistema, e assim sempre será possível ajustar todos os elementos com seus respectivos dados de observação, para um planeta específico. Uma vez encontrados todos os valores para ν compatíveis com os dados observacionais de um planeta, não poderá haver incompatibilidades quando estes mesmos ν forem usados para o estudo dos elementos de outros planetas, evidentemente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Newcomb, S. *Elements of Astronomy*, New York: American Book Company (1900).

2. Newcomb, S. *Popular Astronomy*, London: Macmillan and Co. (1878).

3. Newcomb, S., *Discussion of Observed Transits of Mercury, 1677 to 1881*, Astronomical Papers of the American Ephemeris and Nautical Almanac (1882), em www.relativitycalculator.com/pdfs/mercury_perihelion_advance/S.Newcomb.pdf

4. Le Verrier, U.J., *Theorie du Mouvement de Mercure*, Annales de L'Observatoire Impérial de Paris, Recherches Astronomiques, tome V, chapitre XV (1859).

5. Le Verrier, U.J., "Lettre de M. Le Verrier à M. Faye sur la théorie de Mercure et sur le mouvement du périhélie de cette planète", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **49**, pp. 379-383 (1859).

6. Godoi, V.M.S., *Solar Wind: Refining a Hypothesis About the Precession of the Perihelion of Mercury*, em http://www.vixra.org/abs/1407.0160 (2014).

7. Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, pp.198-199. New York: John Wiley & Sons, Inc. (1972).