

**Author name**

Giuliano Bettini

**Title**

**32 point groups of three dimensional crystal cells described by 5 bits**

**Abstract**

There are 32 possible combinations of symmetry operations that define the external symmetry of crystals. These 32 possible combinations result in the 32 crystal classes.

But for a radar engineer it is inevitable to associate “32” to “5 bits”.

I submit a tentative classification of the 32 crystal classes with a 5 bit classification, obviously with a (tentative) physical meaning of each bit.

Each bit means a physical property.

## **Introduzione**

Come è noto a tutti gli appassionati di Mineralogia nonché ai matematici [1], [2], esistono solo 32 classi cristalline. A queste corrispondono matematicamente 32 *point groups*.

Per un ingegnere elettronico è inevitabile associare “32” a “5 bit”.

Questo significa fare l’ipotesi che esistano solo 5 proprietà di base. La loro presenza o assenza determina automaticamente la classe di appartenenza o il *point group* di appartenenza.

## **Classificazione a 5 bit**

Dopo lunghe analisi e vari tentativi sono giunto a proporre una possibile classificazione che riporto nella tabella seguente. Le 32 classi cristalline sono identificate con i simboli *Ornifold*, *Hermann Mauguin* e infine con una classificazione a 5 bit che ho provvisoriamente indicato *Bettini*.

**CRYSTAL CLASS – 5 bit - 4 3 2 m c**

**Orbifold      Hermann      Bettini**  
**Mauguin**

11	1	00000	0	triclinic
1x	<u>1</u>	0000c	1	triclinic
1*	m	000m0	2	monoclinic
2*	2/m	000mc	3	monoclinic
22	2	00200	4	monoclinic
222	222	0020c	5	orthorhombic
*22	mm	002m0	6	orthorhombic
*222	mmm	002mc	7	orthorhombic
33	3	03000	8	exagonal
3x	<u>3</u>	0300c	9	exagonal
3*	<u>6</u>	030m0	10	exagonal
2*3	<u>3</u> m	030mc	11	exagonal
66	6	03200	12	exagonal
223	32	0320c	13	exagonal
*223	<u>6</u> 2m	032m0	14	exagonal
*33	3m	032mc	15	exagonal
44	4	40000	16	tetragonal
2x	<u>4</u>	4000c	17	tetragonal
332	23	400m0	18	isometric
2*2	<u>4</u> 2m	400mc	19	tetragonal
224	422	40200	20	tetragonal
4*	4/m	4020c	21	tetragonal
*44	4mm	402m0	22	tetragonal
*224	4/mmm	402mc	23	tetragonal
226	622	43000	24	exagonal
6*	6/m	4300c	25	exagonal
*66	6mm	430m0	26	exagonal
*226	6/mmm	430mc	27	exagonal
432	432	43200	28	isometric
3*2	m3	4320c	29	isometric
*332	<u>4</u> 3m	432m0	30	isometric
*432	m <u>3</u> m	432mc	31	isometric

Per completezza aggiungo anche la notazione di Schoenflies.  
 La corrispondenza fra le notazioni è la seguente.

Bettini	Hermann-Mauguin	Schoenflies	Orbifold
0	1	$C_1$	11
1	$\underline{1}$	$S_2$	1x
2	m	$C_{1h}$	1*
3	2/m	$C_{2h}$	2*
4	2	$C_2$	22
5	222	$D_2$	222
6	mm2	$C_{2v}$	*22
7	mmm	$D_{2h}$	*222
8	3	$C_3$	33
9	$\underline{3}$	T	332
10	$\underline{6}$	$C_{3h}$	3*
11	$\underline{3m}$	$D_{3d}$	2*3
12	6	$C_6$	66
13	32	$D_3$	223
14	$\underline{6}2m$	$D_{3h}$	*223
15	3m	$C_{3v}$	*33
16	4	$C_4$	44
17	$\underline{2}$	$S_4$	2x
18	23	T	332
19	$\underline{4}2m$	$D_{2d}$	2*2
20	422	$D_4$	224
21	4/m	$C_{4h}$	4*
22	4mm	$C_{4v}$	*44
23	4/m mm	$D_{4h}$	*224
24	622	$D_6$	226
25	6/m	$C_{6h}$	6*
26	6mm	$C_{6v}$	*66
27	6/m mm	$D_{6h}$	*226
28	432	O	432
29	$m\underline{3}$	$T_h$	3*2
30	$\underline{4}3m$	$T_d$	*332
31	$m\underline{3}m$	$O_h$	*432

### **Significato dei vari bit**

Ovviamente è sempre possibile associare a 32 classi una denominazione che dia ad esse il nome classe 0 (00000), classe 1 (00001), classe 2 (00010), classe 3 (00011) e così via fino alla classe 31 (11111).

Tuttavia ciò non ha nessun particolare significato ed è essenzialmente un'operazione stupida.

Risulta invece significativo poter associare a ciascun bit una proprietà fisica posseduta dal cristallo.

Ciò vorrebbe dire che esistono solo 5 proprietà di base. La loro presenza o assenza determina automaticamente la classe di appartenenza o il *point group* di appartenenza.

Il significato che ho provvisoriamente identificato è il seguente.

#### **Bit c**

0000c nella posizione 00001

La presenza del bit c corrisponde alla presenza della proprietà usualmente denominata *centro*.

#### **Bit m**

000m0 nella posizione 00010

La presenza del bit m corrisponde alla presenza della proprietà usualmente denominata *piani*.

#### **Bit 2**

00200 nella posizione 00100

La presenza del bit 2 corrisponde alla presenza della proprietà usualmente denominata *asse 2*.

#### **Bit 3**

03000 nella posizione 01000

La presenza del bit 3 corrisponde alla presenza della proprietà usualmente denominata *asse 3*.

#### **Bit 4**

40000 nella posizione 10000

La presenza del bit 4 corrisponde alla presenza di una proprietà più subdola che provvisoriamente identifico così: un asse di simmetria che corrisponde alla metà di una simmetria possibile e/o esistente.

Questo bit quindi compare a identificare un asse 4,  $90^\circ$  come metà di  $180^\circ$ , o anche un asse 6,  $60^\circ$  come metà di  $120^\circ$ .

La tabella seguente mostra le 32 classi cristalline e le loro simmetrie con i simboli Hermann Mougain [3].

Ho aggiunto la classificazione proposta, con i simboli di Bettini.

Crystal System	Crystal Class	Symmetry	Name of Class and Bettini symbol
Triclinic	1	none	Pedial 00000
	$\bar{1}$	i	Pinacoidal 0000c
Monoclinic	2	$1A_2$	Sphenoidal 00200
	m	1m	Domatic 000m0
	2/m	i, $1A_2$ , 1m	Prismatic 000mc
Orthorhombic	222	$3A_2$	Rhombic-disphenoidal 0020c
	mm2 (2mm)	$1A_2$ , 2m	Rhombic-pyramidal 002m0
	2/m2/m2/m	i, $3A_2$ , 3m	Rhombic-dipyramidal 002mc
Tetragonal	4	$1A_4$	Tetragonal- Pyramidal 40000
	$\bar{4}$	$\bar{A}_4$	Tetragonal-disphenoidal 4000c
	4/m	i, $1A_4$ , 1m	Tetragonal-dipyramidal 4020c
	422	$1A_4$ , $4A_2$	Tetragonal- Trapezohedral 40200
	4mm	$1A_4$ , 4m	Ditetragonal-pyramidal 402m0
	$\bar{4}2m$	$1\bar{A}_4$ , $2A_2$ , 2m	Tetragonal-scalenohedral 400mc
	4/m2/m2/m	i, $1A_4$ , $4A_2$ , 5m	Ditetragonal-dipyramidal 402mc
Hexagonal	3	$1A_3$	Trigonal-pyramidal 03000
	$\bar{3}$	$1\bar{A}_3$	Rhombohedral 0300c
	32	$1A_3$ , $3A_2$	Trigonal-trapezohedral 0320c

	3m	1A <sub>3</sub> , 3m	Ditrigonal-pyramidal 032mc
	$\bar{3}2/m$	1 $\bar{A}_3$ , 3A <sub>2</sub> , 3m	Hexagonal-scalenohedral 030mc
	6	1A <sub>6</sub>	Hexagonal-pyramidal 03200
	$\bar{6}$	1 $\bar{A}_6$	Trigonal-dipyramidal 030m0
	6/m	i, 1A <sub>6</sub> , 1m	Hexagonal-dipyramidal 4300c
	622	1A <sub>6</sub> , 6A <sub>2</sub>	Hexagonal-trapezohedral 43000
	6mm	1A <sub>6</sub> , 6m	Dihexagonal-pyramidal 430m0
	$\bar{6}m2$	1 $\bar{A}_6$ , 3A <sub>2</sub> , 3m	Ditrigonal-dipyramidal 032m0
	6/m2/m2/m	i, 1A <sub>6</sub> , 6A <sub>2</sub> , 7m	Dihexagonal-dipyramidal 430mc
Isometric	23	3A <sub>2</sub> , 4A <sub>3</sub>	Tetaroidal 400m0
	2/m $\bar{3}$	3A <sub>2</sub> , 3m, 4 $\bar{A}_3$	Diploidal 4320c
	432	3A <sub>4</sub> , 4A <sub>3</sub> , 6A <sub>2</sub>	Gyroidal 43200
	$\bar{4}3m$	3 $\bar{A}_4$ , 4A <sub>3</sub> , 6m	Hextetrahedral 432m0
	4/m $\bar{3}2/m$	3A <sub>4</sub> , 4 $\bar{A}_3$ , 6A <sub>2</sub> , 9m	Hexoctahedral 432mc

**Final classification, ordered from 0 to 15 and from 16 to 31**

0-Pedial 00000	16-Tetragonal- Pyramidal 40000
1-Pinacoidal 0000c	17-Tetragonal-disphenoidal 4000c
2-Domatic 000m0	18-Tetaroidal 400m0
3-Prismatic 000mc	19-Tetragonal-scalenohedral 400mc
4-Sphenoidal 00200	20-Tetragonal- Trapezohedral 40200
5-Rhombic-disphenoidal 0020c	21-Tetragonal-dipyramidal 4020c
6-Rhombic-pyramidal 002m0	22-Ditetragonal-pyramidal 402m0
7-Rhombic-dipyramidal 002mc	23-Ditetragonal-dipyramidal 402mc
8-Trigonal-pyramidal 03000	24-Hexagonal-trapezohedral 43000
9-Rhombohedral 0300c	25-Hexagonal-dipyramidal 4300c
10-Trigonal-dipyramidal 030m0	26-Dihexagonal-pyramidal 430m0
11-Hexagonal-scalenohedral 030mc	27-Dihexagonal-dipyramidal 430mc
12-Hexagonal-pyramidal 03200	28-Gyroidal 43200
13-Trigonal-trapezohedral 0320c	29-Diploidal 4320c
14-Ditrigonal-dipyramidal 032m0	30-Hextetrahedral 432m0
15-Ditrigonal-pyramidal 032mc	31-Hexoctahedral 432mc



I remember the meaning of bits:

0000c means value 1    00001  
000m0 means value 2    00010  
00200 means value 4    00100  
00300 means value 8    00100  
40000 means value 16   10000

I remember the (tentative) physical meaning of bits:

c meanings “center”.  
m meanings “planes”.  
2 meanings “axis 2”.  
3 meanings “axis 3”  
4 meanings “axis 4” or half of a possible and / or existing symmetry as in 43000 = axis 6.

### **Conclusioni**

Ho proposto una classificazione delle 32 classi cristalline a 5 bit, ciascuno dei quali corrisponde ad una proprietà fisica. Per quasi tutte le classi il risultato è pienamente soddisfacente ma alcuni casi mi appaiono ancora ambigui; è possibile che sia necessario un ulteriore lavoro.

Non so addurre per il momento nessuna giustificazione teorica per una possibile classificazione con 5 proprietà di base, se non una *congettura*, e la fiducia che *Essentia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*.

### **Bibliografia**

[1] D. Hestenes, “Point Groups and Space Groups in Geometric Algebra “, in L. Dorst, C. Doran, J. Lasenby (eds.), Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering, Birkhaeuser, Boston, 2002, pp. 3-34.

[2] E. Hitzer and C. Perwass, “CRYSTAL CELLS IN GEOMETRIC ALGEBRA”, Proceedings of the International Symposium on Advanced Mechanical Engineering Between University of Fukui – Pukyong National University, November 27, 2004

[3] S.A. Nelson, Earth & Environmental Sciences 2110, “MINERALOGY”, Tulane University, Department of Earth & Environmental Sciences